

平成12年度
学士学位論文

シミュレーションによる
Positron Trapping

信州大学物理科学科
97S2028E
中村 美和子

平成13年2月5日

目次

第 1 章 序論	2
第 2 章 シミュレーション	3
2.1 方法	3
2.2 磁束密度の計算	3
2.2.1 1 個の円形電流が作る磁束密度	3
2.2.2 2 個の円形電流が作る磁束密度	7
2.3 結果	8
2.3.1 z 軸と平行に入射させた場合	8
2.3.2 z 軸と角度 θ をなす方向に入射させた場合	13
第 3 章 考察	18
付録	19
中心からの距離と磁束密度の関係	19
シミュレーションプログラム	22
参考文献	26

第1章 序論

陽電子は電子の反粒子なので電荷が正であること以外は電子と同じ性質を持っている。また陽電子にしかない特徴として消滅 γ 線がある。低エネルギーの陽電子は、電子と出会うと対消滅し、高いエネルギーを持った複数の γ 線になる。この γ 線を測定すると消滅相手となった電子の情報を得ることが出来る。陽電子は、物質の種類や状態を選ばず、電子が存在すれば必ず対消滅して自ら γ 線を発するので多くの種類の固体物質中の電子状態やミクロな構造変化の研究に利用されている。陽電子はまた、電子との束縛状態であるポジトロニウムを形成する。ポジトロニウムとは水素原子の陽子が陽電子に置き換わったものであり、質量は水素の約 1000 分の 1 である。ここでは陽電子の Trapping の目的はポジトロニウムの生成にある。ポジトロニウムを生成するには電子-陽電子雲が必要であり、そのためには多量の陽電子を蓄積することが可能な装置が必要となってくる。まずは成功したという論文 [1] を参考にシミュレーションを行う。

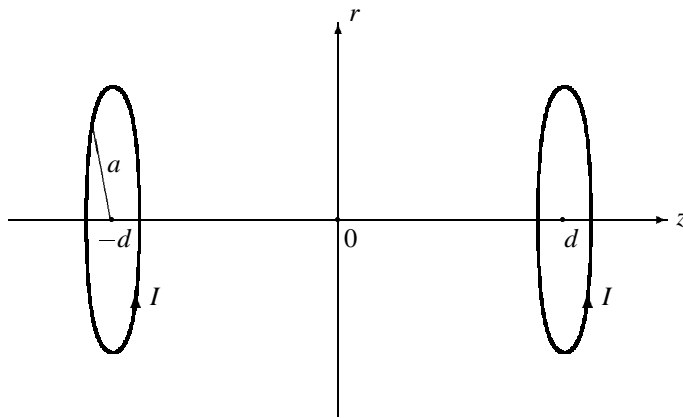
第2章 シミュレーション

2.1 方法

電荷 q を持った粒子にエネルギー (つまり速度 \mathbf{v}) を与え、磁場 (磁束密度 \mathbf{B}) のかかった領域へ入射するとローレンツ力 \mathbf{F} を受ける。(2.1)

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (2.1)$$

力は粒子の速度と磁場に垂直な方向に働くので、粒子は進路を曲げられる。このことを利用して、陽電子をある磁場中に留めておく、つまり Trap することができるか図のような装置を想定してシミュレーションを行う。



2 個の半径 a の円形コイルの中心を結ぶ線を z 軸とし、同じ向きに電流 I を流す。すると電流によって磁場が生じるので、ここに $-d$ から陽電子を入射する。

2.2 磁束密度の計算

2.2.1 1 個の円形電流が作る磁束密度

1 個の円形コイルに電流 I を流したときの任意の点の磁束密度 \mathbf{B} を求めるためにまず、ベクトルポテンシャル \mathbf{A} を求める。(図 2.1)

図 2.1: 円形電流によるベクトルポテンシャル

半径 a の円形コイル C の中心を原点 0 とし、中心軸を z 軸、点 P の位置ベクトルを \mathbf{r} 、 \mathbf{r} の xy 平面への射影を \mathbf{R} とする。 \mathbf{R} が x 軸となす角を φ とすれば、円柱座標 (R, φ, z) を用いて点 P を指定できる。

コイル上の任意の点 A の位置ベクトルを \mathbf{r}' とすると、点 A のまわりの電流要素は $I d\mathbf{r}'$ と表され、ベクトルポテンシャルは閉曲線 C に沿う線積分により

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{I d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.2)$$

と書ける。 $(\mu_0$ は真空の透磁率) 右辺の積分を計算するため、ベクトル \mathbf{r}, \mathbf{r}' を R, φ, z 方向の成分に分解すれば

$$\mathbf{r} = R\hat{\mathbf{R}} + z\hat{\mathbf{z}} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{r}' = a \cos(\varphi - \psi)\hat{\mathbf{R}} - a \sin(\varphi - \psi)\hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (2.4)$$

となる。ここで、 ψ は \mathbf{r}' と x 軸のなす角である。また、点 A のまわりの電流要素 $I d\mathbf{r}'$ を分解すれば、

$$I d\mathbf{r}' = I a d\psi \sin(\varphi - \psi)\hat{\mathbf{R}} + I a d\psi \cos(\varphi - \psi)\hat{\boldsymbol{\phi}} \quad (2.5)$$

となる。したがって、ベクトルポテンシャルは

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\varphi - \psi)\hat{\mathbf{R}} + \cos(\varphi - \psi)\hat{\boldsymbol{\phi}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\psi \\ &= \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\varphi - \psi)\hat{\mathbf{R}} + \cos(\varphi - \psi)\hat{\boldsymbol{\phi}}}{\sqrt{R^2 + z^2 + a^2 - 2aR \cos(\varphi - \psi)}} d\psi \end{aligned} \quad (2.6)$$

と表される。 R 方向の成分は

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\varphi - \psi)}{\sqrt{R^2 + z^2 + a^2 - 2aR \cos(\varphi - \psi)}} d\psi &= \left[-\frac{1}{aR} \sqrt{R^2 + z^2 + a^2 - 2aR \cos(\varphi - \psi)} \right]_0^{2\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるので、 \mathbf{A} は φ 方向の成分しかもたない。よって

$$A_\varphi = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(\varphi - \psi)}{\sqrt{R^2 + z^2 + a^2 - 2aR \cos(\varphi - \psi)}} d\psi \quad (2.7)$$

ここで

$$\varphi - \psi = 2\phi - \pi, \quad k^2 = \frac{4aR}{(a^2 + R^2) + z^2}$$

とおくと、 $d\psi = -2d\phi$ より

$$\begin{aligned} A_\varphi(k) &= \frac{\mu_0 k I}{2\pi} \sqrt{\frac{a}{R}} \int_0^{\pi/2} \frac{2 \sin^2(\phi) - 1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\phi)}} d\phi \\ &= \frac{\mu_0 I}{\pi k} \sqrt{\frac{a}{R}} \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{1 - k^2/2}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\phi)}} - \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\phi)} \right\} d\phi \\ &= \frac{\mu_0 I}{\pi k} \sqrt{\frac{a}{R}} \left\{ \left(1 - \frac{k^2}{2}\right) K[k^2] - E[k^2] \right\} \end{aligned} \quad (2.8)$$

ただし、

$$K[k^2] = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\phi)}}, \quad E[k^2] = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2(\phi)} d\phi$$

である。 $K[k^2]$ は第一種の完全楕円関数、 $E[k^2]$ は第二種の完全楕円関数という。磁束密度 \mathbf{B} はベクトルポテンシャル \mathbf{A} を用いて、

$$\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A} = \left(-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{R}} + \frac{a}{R}\frac{\partial(r\mathbf{A})}{\partial r}\hat{\mathbf{z}} \quad (2.9)$$

となる。すなわち、磁束密度 \mathbf{B} は

$$B_R = -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z}, \quad B_\phi = 0, \quad B_z = \frac{a}{R}\frac{\partial(r\mathbf{A})}{\partial r}$$

となる。結果は以下の通りである。

$$B_R = -\frac{k^2z}{4aR}A_\phi(k) + \frac{\mu_0 I}{\pi}\sqrt{\frac{a}{R}}\frac{k^3z}{2aR}\left\{-\frac{1}{2}K(k^2) + \left(1-\frac{k^2}{2}\right)K(1-k^2) - E(1-k^2)\right\} \quad (2.10)$$

$$B_z = \frac{k^2}{4aR}(a+R)A_\phi + \frac{\mu_0 I}{\pi}\sqrt{\frac{a}{R}}\left(-\frac{k^3z}{2aR} + \frac{k}{R}\right)\left\{-\frac{1}{2}K(k^2) + \left(1-\frac{k^2}{2}\right)K(1-k^2) - E(1-k^2)\right\} \quad (2.11)$$

ここで完全楕円積分の性質から微分 $k'(m) = k(1-m)$ の関係を用いた。

2.2.2 2個のコイルが作る磁束密度

実際には2個のコイルを用いるので、それぞれの円形電流が任意の点に作る磁束密度を求め、和をとればよい。

コイルは $z = -d$ と $z = d$ の位置に置くので、

$$z \rightarrow z+d, \quad z \rightarrow z-d$$

と置き換えると、それぞれの円形電流が作る磁束密度は

$$B_{R1} = -\frac{k1^2(z+d)}{4aR}A_\phi(k1) + \frac{\mu_0 I}{\pi} \sqrt{\frac{a}{R}} \frac{k1^3(z+d)}{2aR} \left\{ -\frac{1}{2}K(k1^2) + \left(1 - \frac{k1^2}{2}\right)K(1-k1^2) - E(1-k1^2) \right\}$$

$$B_{z1} = \frac{k1^2}{4aR}(a+R)A_\phi(k1) + \frac{\mu_0 I}{\pi} \sqrt{\frac{a}{R}} \left(-\frac{k1^3(z+d)}{2aR} + \frac{k1}{R} \right) \left\{ -\frac{1}{2}K(k1^2) + \left(1 - \frac{k1^2}{2}\right)K(1-k1^2) - E(1-k1^2) \right\}$$

$$B_{R2} = -\frac{k2^2(z-d)}{4aR}A_\phi(k2) + \frac{\mu_0 I}{\pi} \sqrt{\frac{a}{R}} \frac{k2^3(z-d)}{2aR} \left\{ -\frac{1}{2}K(k2^2) + \left(1 - \frac{k2^2}{2}\right)K(1-k2^2) - E(1-k2^2) \right\}$$

$$B_{z2} = \frac{k2^2}{4aR}(a+R)A_\phi(k2) + \frac{\mu_0 I}{\pi} \sqrt{\frac{a}{R}} \left(-\frac{k2^3(z-d)}{2aR} + \frac{k2}{R} \right) \left\{ -\frac{1}{2}K(k2^2) + \left(1 - \frac{k2^2}{2}\right)K(1-k2^2) - E(1-k2^2) \right\}$$

となる。ただし

$$k1^2 = \frac{4aR}{(a^2+R^2)+(z+d)^2}, \quad k2^2 = \frac{4aR}{(a^2+R^2)+(z-d)^2}$$

である。

成分ごとに和をとると

$$B_R = B_{R1} + B_{R2}$$

$$B_z = B_{z1} + B_{z2}$$

となり、これが実験で用いる磁束密度である。

2.3 結果

$a = 0.1(m)$, $I = 1.0(A)$, $d = 0.3(m)$ として、入射位置、入射角度そしてエネルギー（速度）を変化させてシミュレーションを行った。

2.3.1 z 軸と平行に入射させた場合

縦軸は陽電子を Trap した時間 $T(s)$ 、横軸は中心からの距離 $R(m)$ である。また、図中の V_0 は陽電子に与えた速度（エネルギー）である。

図 2.2: 入射位置と初速度を変化させたときの Trap 時間

図 2.3: $V_0 = 1.0E5$ のときの軌跡

図 2.4: xy 平面への射影 (横軸 x 、縦軸 y)

図 2.5: $V_0 = 2.0E5$ のときの軌跡

図 2.6: xy 平面への射影 (横軸 x 、縦軸 y)

図 2.7: $V_0 = 3.0E5$ のときの軌跡

図 2.8: xy 平面への射影 (横軸 x 、縦軸 y)

図 2.9: $V_0 = 4.0E5$ のときの軌跡

図 2.10: xy 平面への射影 (横軸 x 、縦軸 y)

2.3.2 z 軸と角度 θ をなす方向に入射させた場合

縦軸は陽電子を Trap した時間 $T(s)$ 、横軸は z 軸となす角度 θ である。

図 2.11: $V_0 = 1.0E5$ と $V_0 = 2.0E5$ のときの Trap 時間

図 2.12: $V_0 = 3.0E5$ と $V_0 = 4.0E5$ のときの Trap 時間

図 2.13: $V_0 = 1.0E5$ のときの軌跡

図 2.14: xy 平面への射影 (横軸 x 、縦軸 y)

図 2.15: $V_0 = 2.0E5$ のときの軌跡

図 2.16: xy 平面への射影 (横軸 x 、縦軸 y)

図 2.17: $V_0 = 3.0E5$ のときの軌跡

図 2.18: xy 平面への射影 (横軸 x 、縦軸 y)

図 2.19: $V_0 = 4.0E5$ のときの軌跡

図 2.20: xy 平面への射影 (横軸 x 、縦軸 y)

第3章 考察

陽電子は複雑な動きをするのではないかと予想をしたが、結果はそうはならなかった。

Trap した時間は $10^{-8} \sim 10^{-5}(s)$ オーダーという極めて短い時間であり、また陽電子の動きを見ると、ほとんど進路を曲げられることなく進んでいるので Trap した時間というよりは、単に 2 個のコイル間を通過するために要した時間というほうが正しいであろう。原因としては一番に磁場が考えられる。実際には 1 巻きのコイルを使用するわけではないので n 巻きのコイルを考える必要があるだろう。他にも考えなければならない要素があるかもしれない。

今回のシミュレーションの結果からは、この方法での Trapping が可能であるとは言えない。しかしまだ始めたばかりであり、完全に不可能とも言い切れない。これから試行錯誤を重ねていき、最終結論はその結果次第である。

付録

中心からの距離と磁束密度の関係

縦軸は磁束密度の R 成分、又は z 成分、横軸は中心からの距離 R である。
図中の $br1(bz1)$ は $R = 0.01(m)$ での磁束密度の R 成分 (z 成分) である。

シミュレーションプログラム

今回の実験で用いたシミュレーションプログラムは以下の通りである。

```
c-----c
*   progrm mlense                                     *
c-----c
*   r(1) = x,   r(2) = y,  r(3) = z      (position)   *
*   r(4) = vx,  r(5) = vy,  r(6) = vz    (verocity)  *
c-----c

      parameter( n=6 )
      real r(n)
      common bx,by,bz

c   ***** step of the time *****
      dt=1.0E-12

100  format(4f17.5)
      do 20 s=0.01,0.09,0.01
      r(1) = s
      r(2) = 0.0
      r(3) = -0.3
      r(4) = 0.0
      r(5) = 0.0
      r(6) = 1.0E5
      t = 0.0

      do 10 it = 1, 10E11

      call rkstep(dt,t,r)

      if(r(3).gt.0.301.or.r(3).lt.-0.4) goto 11

      if((it/1000)*1000.eq.it) then

          write(*,100)  r(1),r(2),r(3)
          write(*,*) it

      endif

endif
```

```

10 continue
11 continue

20 continue
  stop
  end

c-----c
  subroutine deq(t,r,dr)
c-----c
*   differential equation is given here   *
*   dr/dt = f(t,r)                       *
c-----c

  parameter( ebym = 1.759E11 )
  real r(6),dr(6)
  common bx,by,bz

  call b(r(1),r(2),r(3))

  dr(1) = r(4)
  dr(2) = r(5)
  dr(3) = r(6)
  dr(4) = ebym * (r(5) * bz - r(6) * by)
  dr(5) = ebym * (r(6) * bx - r(4) * bz)
  dr(6) = ebym * (r(4) * by - r(5) * bx)

  return
  end

c-----c
  subroutine b(x,y,z)
c-----c
*   magnetic field b                       *
c-----c

  parameter (a=0.1, d=0.3, w=1.0, u=1.257E-6)
  real k1,kz1,kr1,As1,t1,k2,kz2,kr2,As2,t2
  common bx,by,bz

  r=(x**2+y**2)**0.5

  bx=0.0

```



```

by=0.0
bz=0.0

k1=2*(a*r/((a+r)**2+(z+d)**2))**0.5
k2=2*(a*r/((a+r)**2+(z-d)**2))**0.5
am1=(u*w*a**0.5)/(3.14159*k1*r**0.5)
an1=(1-k1**2/2)*ellick(k1)-ellice(k1)
am2=(u*w*a**0.5)/(3.14159*k2*r**0.5)
an2=(1-k2**2/2)*ellick(k2)-ellice(k2)
As1=am1*an1
As2=am2*an2
kr1=-(k1**4*(a+r))/(2*a*r)+k1**2/r
kr2=-(k2**4*(a+r))/(2*a*r)+k2**2/r
kz1=-k1**4*(z+d)/(2*a*r)
kz2=-k2**4*(z-d)/(2*a*r)
pe1=ellice(sqrt(1-k1**2))
pe2=ellice(sqrt(1-k2**2))
pk1=ellick(sqrt(1-k1**2))
pk2=ellick(sqrt(1-k2**2))
t1=-ellick(k1)/2+(1-k1**2/2)*pk1-pe1
t2=-ellick(k2)/2+(1-k2**2/2)*pk2-pe2

br1=kz1*As1/(2*k1**2)-am1*t1*kz1
bx1=x*br1/r
by1=y*br1/r
bz1=(1/(2*r)-kr1/(2*k1**2))*As1+am1*t1*kr1

br2=kz2*As2/(2*k2**2)-am2*t2*kz2
bx2=x*br2/r
by2=y*br2/r
bz2=(1/(2*r)-kr2/(2*k2**2))*As2+am2*t2*kr2

bx=bx1+bx2
by=by1+by2
bz=bz1+bz2

return
end
c-----c

```

```

subroutine rkstep(h,x,y)
c-----c
parameter( n = 6 )
real y(n),work1(n),work2(n),work3(n)

h2 = h/2.0
h6 = h/6.0
xh = x+h
xh2 = x+h2

call deq (x,y,work1)

do 10 j =1, n
work2(j) = y(j) + h2 * work1(j)
10 continue

call deq (xh2,work2,work3)
do 20 j=1,n
work1(j)=work1(j)+2.0*work3(j)
work2(j)=y(j)+h2*work3(j)
20 continue

call deq (xh2,work2,work3)

do 30 j=1,n
work1(j)=work1(j)+2.0*work3(j)
work2(j)=y(j)+h*work3(j)

30 continue

call deq (xh,work2,work3)

do 40 j=1,n
y(j) =y(j)+h6*(work1(j)+work3(j))
40 continue
x=xh
return
end

```

参考文献

- [1] パリティ Vol.06 No.07 1991-07 P68-71
- [2] H.Boehmer, M.Adams and N.Rynn.
Applied Surface Science 116(1997)23-27