量子力学 I レポート問題　（川村）

A　黒体放射

1. 振動数 ν と $\nu + d\nu$ の間に値をとる光の固有振動の個数は単位体積当たり $\dfrac{8\pi\nu^2}{c^3}d\nu$ で与えられることを示せ。さらに，Boltzmann の原理と量子仮説を使って，Planck の公式

$$u(\nu, T)d\nu = \frac{8\pi h}{c^3}\frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}d\nu$$

を導け。ただし，$h = 6.63\times10^{-34}$J s は Planck 定数，$k = 1.38\times10^{-23}$J/K は Boltzmann 定数，$u(\nu, T)$ は 絶対温度 T，振動数 ν の電磁波による熱放射のエネルギー密度，$c = 3 \times 10^8$m s^{-1} は光速度である。

2. Planck の公式は，長波長領域（$\lambda = c/\nu \to$ 大）で Rayleigh-Jeans の公式

$$u(\nu, T)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}kTd\nu$$

（この公式は熱平衡状態におけるエネルギー等配分の法則を使って導くことができる。）短波長領域（$\lambda = c/\nu \to$ 小）で Wien の公式

$$u(\nu, T)d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}e^{-\frac{h\nu}{kT}}d\nu$$

に近づくことを示せ。（これらの公式は，断熱不変量 E/ν と ν/T の間に成立する関係式として理解することができる。）

3. 単振り子の長さを振動中に十分ゆっくり変えた場合，振動数とエネルギーの比 $\dfrac{E}{\nu}$ の値は一定に保たれることを振幅が小さい場合について示せ。（振幅が小さい場合に有効な振れの角度 θ に関する近似式 $\sin\theta \cong \theta$, $\cos\theta \cong 1 - \dfrac{\theta^2}{2}$ を使え。一般に周期運動する力学系において $\dfrac{E}{\nu}$ は断熱不変量である。）

4. 波長 $\lambda = 6000$Å の電磁波が出力 100W で放射されているとする。

    (a) 放射される光子のエネルギーは何 J か？　また何 eV か？

(b) １秒間に放射される光子の数はいくらか？　また１周期の間に放射される光子の数はいくらか？

5. 絶対温度が T，波長が λ の電磁波の熱放射のエネルギー密度 $\tilde{u}(\lambda, T)$ に関する Planck の公式は次式で与えられることを示せ。

$$\tilde{u}(\lambda, T)d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}}-1}d\lambda$$

また，上式を使って単位波長間隔当たりのエネルギーが最大になる波長 λ_{max} に関する公式 $\lambda_{\mathrm{max}}T = b$(Wien の変位則) を導け。ここで，$b \equiv \frac{hc}{4.965k} = 2.9 \times 10^{-3}$mK （4.965 は方程式 $(1-\frac{x}{5})e^x = 1$ の近似解）

6. 太陽は黒体として光を放出しているものとする。Stefan-Boltzmann の法則 $(U = \sigma T^4)$ と Wien の変位則と次の数値を用いて，太陽の表面温度及び λ_{max} を推定せよ。ここで，U は黒体の単位表面積から半空間に放射される単位時間当たりのエネルギー，$\sigma \equiv \dfrac{2\pi^5 k^4}{15c^2h^3} = 5.67 \times 10^{-8}\mathrm{W/m^2K}$ である。
$R_\odot = 7 \times 10^8$ m; 太陽半径
$d_\odot = 1.5 \times 10^{11}$ m; 太陽と地球との間の距離
$C_\odot = 1.4 \times 10^3$ J m^{-2} s^{-1}; 太陽定数（太陽が我々の真上に来たとき降り注ぐ単位面積，単位時間当たりのエネルギー）

7. 宇宙は，3K の黒体放射で満たされている。（Penzias と Wilson の発見）このとき λ_{max} と光子のエネルギー $(E = h\nu = hc/\lambda)$ を求めよ。

8. 長さ L の立方体の箱の中に N 個の光子が入っているとする。1 個の光子のエネルギーは $E = h\nu$ で与えられる。光子ガスを理想気体とみなした場合，圧力の大きさの平均値 P とエネルギー密度 u の間の関係式 $P = \dfrac{u}{3}$ を使って，光子の運動量の大きさは $p = \dfrac{h\nu}{c}$ で与えられることを示せ。

B 光電効果

9. 光電効果とは何か？　簡単に説明せよ。また，次の問に答えよ。
金属 A に対して光電子を放出させるのに必要な光子のエネルギーは

2.0eV であるとする。波長 2000Å の光を当てたときの光電子の最大エネルギーは何 eV か？

C コンプトン効果

10. 静止している電子に対して，波長 λ_0，エネルギー E_0，運動量 $\vec{p_0}$ の光子が衝突して，光子が，波長 $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$，エネルギー E，運動量 $\vec{p}$ の状態で入射方向に対して角度 θ の方向に散乱され，電子は運動エネルギー K，運動量 $\vec{p_e}$ を持って角度 $-\phi$ の方向にはじかれたとする。電子の運動方程式として相対論的な公式を使って，以下の公式を導け。

$$\Delta\lambda \equiv \lambda - \lambda_0 = \lambda_c(1-\cos\theta),$$
$$\lambda_c \equiv \frac{h}{mc} = 2.43\times 10^{-12}\mathrm{m} = 0.0243\text{Å}$$
$$\cot\frac{\theta}{2} = (1+\frac{h\nu_0}{mc^2})\tan\phi \quad , \quad \nu_0 \equiv \frac{c}{\lambda_0}$$
$$\frac{K}{E_0} = \frac{\frac{2h\nu_0}{mc^2}\sin^2\frac{\theta}{2}}{1+\frac{2h\nu_0}{mc^2}\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

ここで，$m = 0.511\ \mathrm{MeV/c^2} = 9.109\times 10^{-31}\ \mathrm{kg}$ は電子の質量である。

D 物質波

11. 次の物体 (?) の de Broglie 波長を求めよ。
    (a) 100m を 10.00s で走り抜けようとしている体重 72kg の陸上選手
    (b) ピッチャーが投げた 155km/hour のボール（硬球の重さは 145g）
    (c) 速度 10^6m/s の金属中の自由電子

12. 運動エネルギー K をもつ質量 m の粒子の de Broglie 波長を非相対論的な場合と相対論的な場合について求めよ。

E 原子の模型

13. 電荷密度 ρ の正電荷が一様に分布している球の中に，$-e$ の電子が存在していると仮定しよう。（Thomson の水素原子模型）

(a) 電子の運動は，球の動径方向に関して調和振動になることを示せ。

(b) 全正電荷 $e = 1.6 \times 10^{-19}$C，球の半径 $a = 1.0 \times 10^{-10}$m の時，調和振動の振動数はいくらになるか求めよ。

14. ラザフォードの原子模型に基づいて，水素原子が不安定であること，つまり，ボーア半径 $r_B = 5.3 \times 10^{-11}$m にある電子が原子核に落ち込むまでの時間が約 10^{-11} 秒であることを示せ。（電磁気学によると電荷 e を持った荷電粒子が加速度運動をする時，電磁波を放出し，単位時間当たり $\dfrac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\left|\dfrac{d\vec{v}}{dt}\right|^2$ だけのエネルギーを失うことが知られている。）

15. ボーアの水素原子の理論について，以下の問に答えよ。必要に応じて，次の数値を使用せよ。$k_0 = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9.0{\times}10^9$ N m^2/C^2，1eV $= 1.6{\times}10^{-19}$J，電子の質量 $m = 9.1 \times 10^{-31}$ kg，電気素量 $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C，プランク定数 $h = 6.6 \times 10^{-34}$ J s，光の速さ $c = 3.0 \times 10^8$ m/s

(1) 電子はとびとびのある特定のエネルギーを持った状態にある場合，電磁波を放射せずに安定に存在する。この状態を定常状態という。電子が陽子の周りを速さ v で半径 r の円運動をする際，電子の運動が力学的に安定であるための条件は，

$$k_0 \frac{e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

で与えられる。また，力は中心力であるから電子の軌道角運動量の大きさ $L = mvr$ は一定である。L に関してボーアは次のような条件を課した。

$$L = n\frac{h}{2\pi} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

n 番目の定常状態における電子の速さ v_n，軌道半径 r_n およびエネルギー E_n に関する以下の公式を導け。

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{2\pi k_0 e^2}{hn} , \qquad r_n = \frac{h^2}{4\pi^2 k_0 e^2 m} n^2 , \\ E_n &= -\frac{2\pi^2 k_0^2 e^4 m}{h^2 n^2} \end{aligned}$$

(2) 1 番目の定常状態に関する軌道半径 r_1(m) の値およびエネルギー E_1(eV) の値を求めよ。r_1 はボーア半径 r_B と呼ばれている。
また，r_B を古典電子半径 $r_e \equiv \dfrac{k_0 e^2}{mc^2} = 2.82 \times 10^{-15}$m と微細構造定数 $\alpha \equiv \dfrac{k_0 e^2}{\hbar c} \cong \dfrac{1}{137}$ を用いて表せ。

(3) 電子のコンプトン波長 $\lambda_e = \dfrac{h}{mc}$(m) の値を求めよ。また，$2\pi r_B$ と λ_e の比 $R \equiv \dfrac{2\pi r_B}{\lambda_e}$ が $1/\alpha$ になることを示せ。

(4) v_n, r_n, E_n を α, m, c, r_e, n を使って書き表せ。

(5) 電子に対して $mc,\quad mc^2,\quad \dfrac{\hbar}{mc},\quad \dfrac{\hbar}{mc^2}$ の値を求めよ。($\hbar \equiv \dfrac{h}{2\pi}$)

(6) Rydberg 定数 $R_\infty \equiv \dfrac{k_0^2 e^4 m}{4\pi \hbar^3 c} = 1.097 \times 10^7\ \mathrm{m}^{-1}$ を用いて，E_n に関する公式を書き直せ。
Bohr の理論によれば，放出される光の振動数は，

$$\nu = \frac{E_i - E_f}{h} = \frac{k_0^2 e^4 m}{4\pi \hbar^3}\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)$$

で与えられる。Rydberg 定数を用いて，$1/\lambda$ に関する公式を求めよ。

F 調和振動子の量子化

16. ハミルトニアン $H = \dfrac{p^2}{2m} + \dfrac{1}{2}m(2\pi\nu)^2 q^2$ で記述される 1 次元の調和振動子に対して，以下の問に答えよ。ここで，m と ν はそれぞれ振動子の質量と振動数である。

    (a) エネルギーの値が E である状態において，変数 p,q は楕円形のトラジェクトリを描く。このトラジェクトリに囲まれた面積 $J = \oint pdq$ に対して，条件 $J = hn$ (Bohr-Sommerfeld の量子化条件) を課すことにより $E = nh\nu (\equiv E_n)$ を導け。h はプランク定数，$n = 0, 1, 2, ...$ である。

(b) 振動子の位置を $q = a\cos(2\pi\nu t + \delta)$ と表わした時，振動子の振幅 a がとびとびの値 $a = \sqrt{\dfrac{hn}{2\pi^2 m\nu}}$ をとることを示せ。

(c) 振動子の位置を $q = Xe^{2\pi i\nu t} + X^* e^{-2\pi i\nu t}$ と表わした時，$|X|^2$ がとびとびの値 $|X|^2 = \dfrac{hn}{8\pi^2 m\nu}$ をとることを示せ。

(d) 振動子が n 番目の状態から $n-1$ 番目の状態に遷移する際に振動数の値が $\nu_{光} = \dfrac{E_n - E_{n-1}}{h}$ の光が放出されるとする。その光の強さは振動子 1 個当たりに換算して $\dfrac{dE_{光}}{dt} = h\nu_{光} A_{n\to n-1}$ で与えられる。$A_{n\to n-1}$ は振動子の遷移確率で対応原理から $A_{n\to n-1} = \dfrac{(2\pi)^4\nu^3}{3c^3 h}|C_1|^2$ となる。ここで，C_1 は振動子の双極子能率 P の中に現われる係数で $P = -eq = \dfrac{1}{2}(C_1 e^{2\pi i\nu t} + C_{-1}e^{-2\pi i\nu t})$，$c$ は光の速さである。振動子は電荷 $-e$ を持っているとした。(c) の結果を使って振動子の遷移確率に関する関係式 $A_{n\to n-1} = \dfrac{8\pi^2}{3}\dfrac{e^2\nu^2}{mc^3}n$ を示せ。

(e) ハイゼンベルクの行列力学を使って，調和振動子の定常状態のエネルギーが $E = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)h\nu (\equiv E_n)$，振動子が n 番目の状態から $n-1$ 番目の状態に遷移する確率が $A_{n\to n-1} = \dfrac{8\pi^2}{3}\dfrac{e^2\nu^2}{mc^3}n$ で与えられることを示せ。(放出される光の強さは q に関する遷移成分 $Q_{n,n-1}$ を使って，$\dfrac{dE_{光}}{dt} = \dfrac{(2\pi\nu)^4}{3c^3}4e^2|Q_{n,n-1}|^2$ で与えられる。)

余裕のある人は，さらに次の問題に挑んでみてください。

(f) シュレディンガーの波動力学を使って，調和振動子の定常状態のエネルギーが $E = (n + \dfrac{1}{2})h\nu (\equiv E_n)$ で与えられることを示せ。具体的には次の微分方程式を解くことによって，エネルギー固有値と固有関数を求めなさい。

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m(2\pi\nu)^2 x^2\right)\phi(x) = E\phi(x)$$

以上です。来年度，量子力学 II およびその演習，量子力学 III およびその演習でさらなるステップ・アップをしましょう！