第1章　力学

信州大学理学部　川村 嘉春

近い将来，共通教育で使用する予定のテキスト「基礎理学（物理学）」の原稿 (2005 年 2 月作成) に一部加筆・修正を加えたものです．

1.1　運動と力

物理学は，対象の違いにより幾つかの学問分野に分かれる．例えば，力学とは物体の運動と物体に働く力の関係を論ずる学問である．物理学の各分野を特徴づける構成要素として，役者である**対象**と役者が運動する舞台である時間と空間（まとめて，**時空**と呼ぶ）と脚本である**物理法則**に大別される．

最初に，ニュートン力学に関する構成要素について簡単に述べよう．

ニュートン力学の主な対象は，我々の回りにある目に見える物体（りんご，ボール，おもり，$\cdots$，天体など）である．簡単のために，**質点**と呼ばれる質量を持つが，大きさはゼロである仮想的な微小物体あるいは近似的に質点とみなせるような物体に基づいて議論を進める．実際，身の回りにある物体は大きさを持ち，一般に回転したり変形したりする．物体の回転や変形が無視できる状況では，物体は近似的に質点とみなしてよい．その場合，物体の運動はその重心に関する運動として理解できる．例えば，太陽系のサイズで議論する際には，太陽の周りを回っている地球は質点とみなしてよい．参考までに，大きさを持つ変形しない物体は**剛体**と呼ばれる．また，大きさを持ち力を加えると変形するが力を取り去ると元に戻るような物体は**弾性体**と呼ばれる．

ニュートン力学の舞台は，**3 次元ユークリッド空間**と**絶対時間**である．ここで，ユークリッド空間とは，曲率がゼロ（曲がっていない）の一様・等方な空間である．また，絶対時間とは，空間とは独立に一様に流れる時間のことである．

物理法則に関しては，物体の運動に関する法則と物体に働く力に関する法則からなる．物体の運動に関する基本的な法則は，ニュートンの発

見した三つの運動法則である．また，物体に働く力に関する代表的な法則は，ニュートンの発見した万有引力の法則である．これらの法則について，後ほど簡単な解説を加える．

現在知られている物理学の各分野は，それぞれ守備範囲を持っていて，ニュートン力学も例外ではない．この節で，ニュートン力学の適用限界とそれを越える物理学に関する記述の中に，難解な箇所が幾つかあります．初めて本書を読む場合には，それらの箇所は読み飛ばしても構いません．物理学に関する理解が深まってから読み返すことをお勧めします．

1.1.1　ニュートンの運動の第１法則

質点が何の力も受けないとき，質点の運動状態は変化しない．

物体が，その運動状態を保ち続けようとする性質を**慣性**と言う．それゆえ，運動の第１法則は，別名，**慣性の法則**と呼ばれている．乗り物に乗っているとき，我々はしばしば慣性を体験する．例えば，進行方向を向いて立っているとしよう．乗り物が急に停車したとき（急に動き出すとき）我々の体は前のめりになる（後ろに倒れそうになる）．これは，慣性に従おうとする体と乗り物と共に運動しようとする足との間の駆け引きにより起こる現象である．慣性の法則が成立する系を**慣性系**と呼ぶ．慣性系は無数に存在する．なぜなら，ある慣性系に対して原点をずらした系も慣性系であり，原点の周りに任意の角度回転させた系も慣性系であるからである．さらに，慣性系に対して，任意の速度で等速直線運動をしている観測者を基準にした座標系も慣性系である．しかも，運動の相対性から，運動法則を使って特別な慣性系を選び出すことは原理的に不可能である．この性質は『**相対性原理：すべての慣性系で同じ運動法則が成立する**』として理解されている．

ニュートン力学では，上の原理は**ガリレイの相対性原理**と呼ばれ，互いに等速直線運動している慣性系はガリレイ変換で結ばれる．着目する質点の位置（位置ベクトル）を，慣性系 I で $\boldsymbol{r}$，慣性系 I に対して相対的に一定の速度 $\boldsymbol{u}$ で並進運動をしている慣性系 I' で $\boldsymbol{r}'$ とする．ガリレイ変換を式で表すと次のようになる．

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{u}t \ . \tag{1.1}$$

ここで，t は時間を表す変数である．

☆ 時間と空間について

慣性系の間の相互関係は，物体が運動する舞台である時空の性質と密接に関係している．距離が定義された空間を**距離空間**と呼ぶ．ユークリッド空間は距離空間の一種で，例えば，3 次元ユークリッド空間内で直交座標を選んだとする．その場合，点 $P = (x, y, z)$ と点 $P' = (x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z))$ との間の距離 Δs の 2 乗は

$$\Delta s^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \tag{1.2}$$

で与えられる．距離は，基本的な物理量の一つでいかなる慣性系から見ても不変な量と考えられる．ある座標系に対して，原点をずらした座標系や原点の周りに任意の角度回転させた座標系から計っても (1.2) 式で定義された距離は変わらない．さらに，絶対時間を想定した場合，ガリレイ変換に対して (1.2) 式で定義された距離が不変であることがわかる．以上より，ニュートン力学の舞台は，3 次元ユークリッド空間と絶対時間（の直積からなる時空）と考えられる．

参考までに，マイケルソン・モーレーの実験により『**あらゆる慣性系で光の速さ** (c) **は一定である**』ことが確かめられている．この性質（アインシュタインにより**光速一定不変の原理**と呼ばれる原理に格上げされた）はガリレイ変換不変性と相容れない．実際，アインシュタインは，光速一定不変の原理と相対性原理に基づきニュートン力学に修正を加え，特殊相対性理論に基づく力学（特殊相対論的力学）を導いた．特殊相対性理論では時間を含めた形で距離（世界間隔）の定義が次のように変更されるため，その舞台は **4 次元ミンコフスキー空間**と呼ばれる 4 次元時空になる．

$$\Delta s^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - c^2(\Delta t)^2\ . \tag{1.3}$$

そこでは，ガリレイ変換不変性が，ローレンツ変換不変性に取って代わる．物体の速さ v と光の速さ c の比 v/c がゼロの極限で，特殊相対論的力学はニュートン力学に帰着する．

☆ 読者の疑問に答えるコーナー

Q.　慣性系はあるの？

質点に力が働いている場合でも，合力がゼロであるならば，質点の運動

状態は変化しないため慣性の法則があてはまる．地球は，太陽の周りを自転しながら公転しているため，厳密には慣性系とは言えない．しかし，地球上の物体の運動を論ずる際に，地球に固定された座標系を慣性系とみなしてよい場合が多い．例えば，地球上に設置された十分に滑らかな面上を物体が運動するとき，地球が物体に及ぼす重力は面の垂直抗力と相殺するため物体に働く合力はゼロとなり慣性系とみなせる．

Q.　慣性の法則は本当に成り立っているの？
疑うのも無理はない．日常出くわす現象と異なっているからである．例えば，平坦な道路でベビーカーを同じ速度で動かそうと思ったら，一定の力を加えて押し続けなければならない．さもなくば，どこかで止まってしまう．なぜ止まってしまうのかというと，法則の前提条件である「質点が何の力も受けていない，あるいは合力がゼロである」が成り立っていないためである．具体的には，ベビーカーには地面と車輪の間の摩擦力，本体と車輪の間の摩擦力，空気による抵抗力などが働き，運動状態を変化させる．
　慣性の法則をより基本的な原理や法則を使って導こうとする試みはあるが，成功していない．現在のところ，慣性の法則の正当性の根拠は**思考実験**による推論および法則と矛盾する現象が見つかっていないという経験事実に基づく．ここで，思考実験とは，現実に行うことが困難な実験を頭の中で仮想的に行う理想化された実験のことである．例えば，慣性の法則は次のような思考実験により推論される．ベビーカーを押すのを突然やめるとベビーカーは次第に減速し，やがて止まる．止まるまでの距離は，ベビーカーに作用する摩擦力や抵抗力が小さくなるほど長くなる．ベビーカーに働く力がゼロになる極限で（現実には実現不可能ではあるが），減速されることなく無限のかなたまで一定の速さで直進し続けると推測される．このようにして，慣性の法則に到達する．この例からもわかるように，思考実験はベールに包まれた物理法則を暴きだす手段として，しばしば，有効に機能する．

1.1.2　ニュートンの運動の第２法則

質点に力が働くとき，質点は力に比例する加速度を持つ．

この法則を式で表すと次のようになる．

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F}\ . \tag{1.4}$$

ここで，質量 m は物体の運動状態の変え難さ（慣性の大きさ）を表す比例係数で**慣性質量**と呼ばれる．また，$\boldsymbol{F}$ は質点に働く力である．質点の位置の変化は上の微分方程式を解くことにより決まるので，(1.4) 式は質点に関する運動方程式である．運動量 $\boldsymbol{p} = m\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ を使うと，(1.4) 式は次のように書き換えられる．

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F}\ . \tag{1.5}$$

よって，運動の第 2 法則は次のように表現できる．

質点に働く力は，質点の運動量の時間変化に等しい．

ここで，**運動量**とは運動の勢いを表すベクトル量である．例えば，車が重いほど，また，速く走っているほど急ブレーキを掛けても勢い余ってすぐには止まれない．

運動の第 2 法則も，第 1 法則と同様に特定の座標系である慣性系でのみ成立する（非慣性系においては，(1.4) 式は成立しない．非慣性系においても，(1.4) 式と見かけの上で同じ形のまま運動方程式を扱いたい場合，**見かけの力（慣性力）**を導入する必要がある．遠心力は，見かけの力の一例である．物体の運動を記述するために，原理的にどんな座標系を選んでもよいはずなのに，多くの場合，慣性系を使用するのは，解析が容易になるからである．）．

質点に働く合力がゼロの場合，運動方程式 (1.4) を解くことにより，次のような解を得る．

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{v}_0 t + \boldsymbol{r}_0\ . \tag{1.6}$$

ここで，$\boldsymbol{r}_0$ は時刻 $t = 0$ での質点の位置である．上の解は質点が一定の速度 $\boldsymbol{v}_0$ で運動していることを表し，運動の第 1 法則に帰着する．

表 1.1: 物理量の単位名と次元式

物理量	単位名	記号	次元式
質量	キログラム	kg	M
長さ	メートル	m	L
時間	秒	s	T
速度	メートル毎秒	m/s	LT^{-1}
加速度	メートル毎秒毎秒	m/s^2	LT^{-2}
力	ニュートン	N(=kg·m/s^2)	MLT^{-2}
仕事	ジュール	J(=N·m=kg·m^2/s^2)	ML^2T^{-2}

☆ 単位と次元について

自然界には様々な物理量が存在する．例えば，位置，距離 (長さ)，時間，質量，加速度，力，運動量などがある．物理量を数値化する際に，万人に共通の基準を設けると便利である．その基準は**単位**と呼ばれている．運動を表す基本的な単位（**基本単位**）は，質量，長さ，時間の３種類である．基本単位以外の運動に関する物理量の単位は，これらを組み合わせて作られ，**組立単位**と呼ばれる．力学において登場する主な物理量に関する国際単位系 (SI) での単位名と記号を表 1.1 に記載した．例えば，力の単位はニュートン (N) で，質量 1kg の物体に 1m/s^2 の加速度を生じさせる力は 1N である．等号で結ばれる物理量はすべて同じ単位を持っている．

物理量 Q の**次元**とは，質量 M，長さ L，時間 T の値を独立に定数倍する変換により定義される．具体的には，$(M, L, T) \to (\xi M, \eta L, \zeta T)$（$\xi$, η, ζ は定数）という変換に対して，Q が次のような変換を受けるとする．

$$Q \to \xi^a \eta^b \zeta^c Q \ . \tag{1.7}$$

このとき，Q は質量，長さ，時間に関してそれぞれ次元 a，b，c を持つという．この変換は，質量，長さ，時間の単位を変更したことに相当する．物理量は次元式 $M^a L^b T^c$ を使って表すことができる（表１を参照せよ）．物理法則は，単位の選び方とは独立に成り立つはずである．つまり，物理現象を表す方程式は，変換 (1.7) のもとで不変である．これが成り立つためには，物理現象を表す方程式の各項が同じ次元を持つ必要がある．このような次元に関する性質を用いて，次元を持たない比例係数を除いて方程式の形を予測することが可能となる．この方法は**次元解析**と呼ばれ，

物理法則を探る際に有用である.

例題 1.1.
つる巻きばねに質量 m[kg] の物体をつるして振動させたとしよう. 物体がつりあいの位置から x[m] だけ変位したとき, 物体はばねから $F = kx$[N] の大きさの力を受ける. 力の向きは変位の方向と逆向きである. ここで, k は**ばね定数**と呼ばれる次元式 MT^{-2} の定数である. このようなばねの復元力に関する法則は**フックの法則**と呼ばれている. 物体の振動の周期 T は, m と k にのみ依存することが知られている. 次元解析を使って, T と m と k との間に成り立つ関係式を求めよ.

解　次元を持たない比例係数を C として, 次のような関係式が予想される.

$$T = Cm^x k^y \ . \tag{1.8}$$

方程式の両辺の次元式はそれぞれ次のようになる.

$$(\text{左辺}) = T \ , \quad (\text{右辺}) = M^x (MT^{-2})^y = M^{x+y} T^{-2y} \ . \tag{1.9}$$

これらが一致することを要請すると, $x = -y = 1/2$ となる. よって, 関係式は次で与えられる.

$$T = C\sqrt{\frac{m}{k}} \ . \tag{1.10}$$

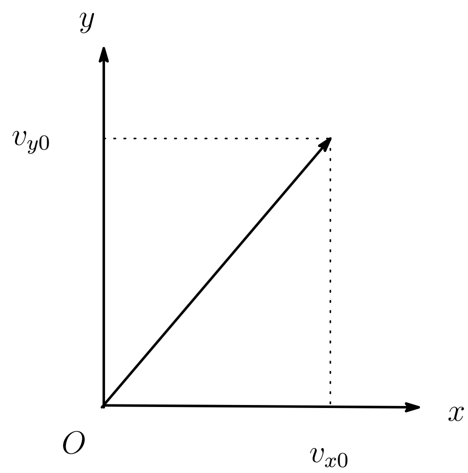
注：実際に, 運動方程式を解くことにより, 比例係数 C の値は 2π に等しいことがわかる.

☆ 放物運動について

物体の運動に関する具体的な例として, 地表付近で物体を放り投げたときの運動について議論しよう. 我々が採用する座標系は, 時刻 $t = 0$ での物体の位置を原点として鉛直上向きを y 軸, y 軸と物体の初速度 $\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{v}_0$ が張る平面内で, 水平方向を x 軸とする（図 1.1 を参照せよ）. 簡単のため, 空気による抵抗を無視する. 物体には, 鉛直下向きに mg の力（重力）が働くため, 質量 m の物体に関する運動方程式は以下のようになる.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \ , \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg \ . \tag{1.11}$$

図 1.1: 放物運動



ここで，gは重力加速度でその大きさは有効数字2桁で$g = 9.8\mathrm{m/s^2}$である．物体の位置と速度に関する初期条件$\boldsymbol{r}(0) = (0, 0)$ および$\boldsymbol{v}(0) = (v_{x0}, v_{y0})$のもとで次のような特解（未知定数を含まない解）が得られる．

$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t)) = (v_{x0}t, -\frac{1}{2}gt^2 + v_{y0}t) \ , \tag{1.12}$$

$$\boldsymbol{v}(t) = (v_x(t), v_y(t)) = (v_{x0}, -gt + v_{y0}) \ . \tag{1.13}$$

(1.12) 式で，tを消去すると次の方程式が得られる．

$$y(t) = -\frac{g}{2v_{x0}^2}x(t)^2 + \frac{v_{y0}}{v_{x0}}x(t) \ . \tag{1.14}$$

この曲線は上に凸な放物線である．

☆ 読者の疑問に答えるコーナー

Q.　未知量は何なの？力？質量？位置？
この問いの答えは，我々が扱う問題に依るである．ベビーカーの運動を例に取ろう．一定の速度で進んでいるベビーカーに対して，手を離した場合，ベビーカーは減速して止まってしまう．ベビーカーの加速度は原理的に測定することができる．この場合，質量（の基準）を決めればベビーカーを減速させる働きをする合力が未知量となり，合力は運動方程式を使って求めることができる．また，後で述べるように，他の質点の

質量は運動の第 3 法則を使って求めることができる．様々なベビーカーを使って，それらに働く摩擦力や抵抗力に関する経験則が得られたとしよう．つまり，ベビーカーを指定するとそれに働く摩擦力や抵抗力が理論的に求められるとする．この場合，加速度を未知量として扱うことにより，ベビーカーの位置の時間変化を予言することができる．この例からもわかるように物体に働く力があらかじめわかっていれば，物体の運動は正確に予測できる．

Q. 物体にはどんな力が働くの？
この問いに対して，運動の第 2 法則が重要な役目を果たしてきた．というのは，運動の第 2 法則は『力とは質点の運動状態を変える作用である』というように力の定義として解釈できるからである．実際，運動方程式 (1.4) を使って，日常生活で経験する力（重力，電磁気力，摩擦力など）の性質や法則が明らかにされてきた．物体に働く力を完全に理解するためには，次の問いに挑む必要がある．

Q. 力とは何なの？その起源は何なの？
この問いの答えは物理学の分野によって異なる．先ほど『**力とは物体の運動状態を変える作用で，物体の運動量の時間変化に等しい**』と述べた．場の古典論では，物体の存在によりその周りの時空が一種の興奮状態（ポテンシャルまたは場の生成）へと変化し，別の物体はその状態に反応することにより，間接的に力が働くと考える．つまり『**力とはポテンシャルまたは場を介して伝わる作用で，ポテンシャルの勾配に比例する**』と言い換えることができる．実は，場の概念の導入は第 2 法則の言い換え以上の内容を秘めている．何の介在もなしに離れた 2 点間で瞬時に伝わるような力は**遠隔作用**と呼ばれている．特殊相対性理論によると，光の速さを超えて情報を伝えることは不可能である．よって，実在する力は遠隔作用ではなくて**近接作用**と考えられる．場の理論に基づくと，力を近接作用として捉えることが可能になる．つまり，ある物体の存在により場が生成され，その場は有限の速さで拡がり，物体が存在する地点で場が物体に近接作用を施すと解釈される．場に関する具体的な例としては，質点の存在により重力を伝える場（重力場）が生成される．また，質点が電荷を帯びていれば，電磁気力を伝える場（電磁場）が生成される．

微視的な世界で（ニュートン力学やマックスウェルの電磁気学に代表される）古典物理学が破綻をきたす．微視的な世界の物理現象を記述する

理論として**場の量子論**が有効である．それによると「粒子＝量子場」で『**力とは粒子の間で力を媒介する粒子をやりとりすることにより伝わる相互作用である**』と解釈される．我々が抱いているパラダイム（考え方・認識の枠組）は，力に関する還元主義で，三つの要素 (1) これ以上細かく分けることのできない粒子（基本粒子）の存在，(2) 基本粒子によって媒介される基本的な力の存在，(3) 残りの力は基本的な力から派生する有効的・2次的なもの，からなる．現在，3世代のクォークとレプトンの存在が確認され，これらは物質を構成する基本粒子とみなされている．そして，それらの間に働く普遍的な性質を持つ力として四つの力（強い力，弱い力，電磁気力，重力）が存在し，これらの力は基本的な力と考えられている．ここで，強い力はクォークの間に作用する力で，核子などを構成し原子核を束縛する働きをする．弱い力が関与する典型的な作用は，中性子のベータ崩壊である．現在，基本的な力を統一的に理解しようとする試み（大統一理論，超弦理論など）が盛んになされている．

Q.　力に関する法則はどんなもの？
四つの基本的な力に関する法則は，微視的なレベルで『**ゲージ原理：時空の各点で独立な変換（ゲージ変換）を行っても同じ物理法則が成立する**』と呼ばれる対称性に関する原理に従って決定されることがわかっている．巨視的なレベルでは，力に関する法則として，例えば，重力に関する「万有引力の法則」，電磁気力に関する「クーロンの法則」,「ガウスの法則」,「電磁誘導の法則」,「アンペールの法則」，ばねの復元力に関する「フックの法則」などがある．これらの法則の起源を，より微視的なレベルの法則や原理に求めることができる．例えば，ばねの復元力は，ばねを構成する原子の間に働く電磁気的な力から合成された2次的な力である．また，電磁気学に関する法則の起源を「ゲージ原理」に求めることができる．このように物理法則にも階層性があり，どのような法則もより基本的な法則や原理から演繹的に導かれると期待されている．

☆ 万有引力の法則について

ニュートンが発見した万有引力の法則に関して簡単に触れておこう．

質量 m の物体と質量 M の物体の間には，それらの質量の積に比例し，物体間の距離の 2 乗に反比例する引力が働く．

この法則を式で表すと次のようになる．

$$F = G\frac{mM}{r^2}\ . \tag{1.15}$$

ここで，F は万有引力の大きさ，G は**万有引力定数**と呼ばれる定数で，その大きさは有効数字 4 桁で $G = 6.673 \times 10^{-11}\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{s}^{-2}\cdot\mathrm{kg}^{-1}$ である．

地表付近の重力について考察しよう．地球の半径を $R(\approx 6.4 \times 10^6\mathrm{m})$，地球の質量を $M(\approx 6.0 \times 10^{24}\mathrm{kg})$ とする．地表から高さ $r[\mathrm{m}]$ にある質量 $m[\mathrm{kg}]$ の物体に働く万有引力の大きさは,

$$F = G\frac{mM}{(R+r)^2} \approx m\frac{GM}{R^2} = mg \tag{1.16}$$

である．ここで，$R \gg r$ として r を無視した．また，g は放物運動のパラグラフで登場した重力加速度である．つまり，地表付近で物体に働く重力は，万有引力が原因である．万有引力はあらゆる物体に働く力で，天体の運動にも深く関わっている．万有引力の法則を使って，惑星の運動に関するケプラーの法則を導くことができる．このように，地球上の物体（例えば，りんご）の落下運動と天体の運動を統一的に理解することができる．

万有引力に関係する質量は**重力質量**と呼ばれる．慣性質量と重力質量が比例関係にあること（比例係数はあらゆる物体について一定）は，実験で高い精度で確かめられていて，通常，その比例係数は 1 に選ばれる．ただし，理論的には「慣性質量＝重力質量」はそれほど自明なことではない．

参考までに「慣性質量＝重力質量」を自然に説明する原理が存在する．それは『**等価原理：適切な座標系を選択することによって，局所的に（着目する時空点の近傍で）重力の効果を消し去ることが可能である**』で，アインシュタインが一般相対性理論を構築する際に用いた指導原理の一つである．この原理が上の 2 種類の質量を結びつける理由は，以下の通りである．座標変換により，一般に見かけの力が生じる．見かけの力は慣性質量に比例する．任意の物体に対して重力質量に比例する重力を見かけの力によって消し去るためには，慣性質量が重力質量（に普遍的な比例定数をかけたもの）に一致していればよい．

補足として，一般相対性理論の構築に役立ったもう一つの原理についてコメントする．それは第 1 法則の所で述べた相対性原理を拡張した原

理で『**一般相対性原理：物理法則はあらゆる座標系に対して同等に表現される**』である．数学的に表現するならば，**物理法則は一般的な座標変換に対して共変な等式で表される**となる．よって，一般相対性理論で取り扱われる対象の多くは一般的な座標変換の下で共変に変換する量（スカラー，ベクトル，テンソル）である（テンソルではない重要な量としては，重力場と解釈されるレヴィ・チビタ接続係数がある）．

一般相対性理論では，物体が存在するとその周りの時空に歪みが生じる．これは，物理的には重力場の発生に相当する．別の物体は，その歪んだ時空内で最短のコースを進もうとする．つまり，重力場の作用を受けながら運動する．よって，一般相対性理論の舞台は **4 次元リーマン空間**と呼ばれる曲がった 4 次元時空である．そこでは，距離の定義に現れる**計量テンソル**と呼ばれる 10 個の独立な関数が重力ポテンシャルの役割を果たす．また，等価原理に従えば，リーマン空間内で慣性系を局所的に設定することが可能である．物理系に対する不変性の観点からすると『**一般相対性理論とは，局所的なローレンツ変換不変性と一般座標変換不変性を兼ね備えた理論である**』と言えよう．一般相対性理論は，ニュートンの重力理論を超える理論で様々な実験により検証されている．重力ポテンシャルが静的で十分弱く，物体の速さが光の速さに比べて十分小さい極限で，ニュートンの重力理論に帰着する．

1.1.3　ニュートンの運動の第３法則

ある質点１が別の質点２に力を及ぼすとき，質点１は質点２から同じ大きさで逆向きの力を受ける．力は２つの質点を結ぶ方向に働く．

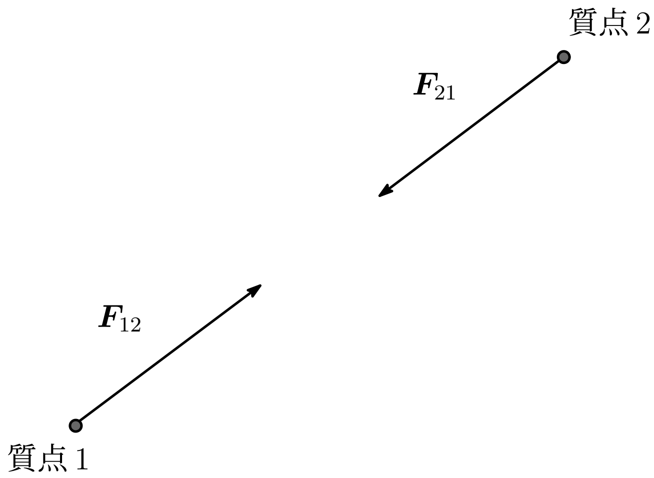
ここで，質点１が質点２に及ぼす力を**作用**，質点１が質点２から受ける力を**反作用**と呼ぶことがある．それゆえ，運動の第３法則は，別名，**作用・反作用の法則**と呼ばれる．この法則を式で表すと次のようになる．

$$m_1 \frac{d^2 \boldsymbol{r}_1}{dt^2} = \boldsymbol{F}_{12} \ , \qquad m_2 \frac{d^2 \boldsymbol{r}_2}{dt^2} = \boldsymbol{F}_{21} = -\boldsymbol{F}_{12} \ , \tag{1.17}$$

$$\boldsymbol{F}_{12} /\!/ \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2 \ . \tag{1.18}$$

ここで，質点１，質点２の質量をそれぞれ m_1，m_2，位置をそれぞれ $\boldsymbol{r}_1$，$\boldsymbol{r}_2$，質点１が質点２に及ぼす力を $\boldsymbol{F}_{21}$，質点２が質点１に及ぼす力を $\boldsymbol{F}_{12}$ とした（図 1.2 を参照せよ）．万有引力やクーロン力は，二つの質点の間

図 1.2: 作用・反作用の法則



の位置ベクトルの差にのみ依存するため $\boldsymbol{F}_{21} = -\boldsymbol{F}_{12}$ が成立する．例えば，万有引力の場合，

$$\boldsymbol{F}_{12} = -G\frac{m_1 m_2}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^3}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)\ , \tag{1.19}$$

$$\boldsymbol{F}_{21} = -G\frac{m_1 m_2}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|^3}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) \tag{1.20}$$

である．(1.18) 式は『**力は２つの質点を結ぶ方向に働く**』を表している．

さて，２つの質点の加速度が測られたとしよう．この場合，(1.17) の 2 式を連立させることにより，どちらかの質点の質量を基準にとって別の質点の質量を求めることができる．具体的には，次式を使って m_2 を求めることができる．

$$m_2 = -m_1\frac{d^2\boldsymbol{r}_1}{dt^2}\Big/\frac{d^2\boldsymbol{r}_2}{dt^2}\ . \tag{1.21}$$

☆ 運動量と角運動量の保存則

作用・反作用の法則は，運動量の保存則および角運動量の保存則と関係する．質点１，質点２の運動量をそれぞれ $\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$ とする．これらを使って (1.17) 式を書き直すと

$$\frac{d\boldsymbol{p}_1}{dt} = \boldsymbol{F}_{12}\ , \qquad \frac{d\boldsymbol{p}_2}{dt} = \boldsymbol{F}_{21} = -\boldsymbol{F}_{12} \tag{1.22}$$

となり，これらの式から，

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2) = 0 \tag{1.23}$$

が導かれる．(1.23) 式は，全運動量の保存 ($\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 =$ 一定) を意味している．

さらに，(1.18) 式は，次のように全角運動量の保存則と関係がある．質点１の角運動量 $\boldsymbol{L}_1$ と質点２の角運動量 $\boldsymbol{L}_2$ の定義式は，以下の通りである．

$$\boldsymbol{L}_1 \equiv \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{p}_1 \ , \qquad \boldsymbol{L}_2 \equiv \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{p}_2 \ . \tag{1.24}$$

それらの時間微分は次のようになる．

$$\frac{d\boldsymbol{L}_1}{dt} = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_{12} \ , \qquad \frac{d\boldsymbol{L}_2}{dt} = \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_{21} = -\boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_{12} \ . \tag{1.25}$$

これらの式から，

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2) = (\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) \times \boldsymbol{F}_{12} \tag{1.26}$$

が導かれる．(1.26) 式より，力が２つの質点の間の位置ベクトルの差に比例 ($\boldsymbol{F}_{12} // \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$) する場合，全角運動量が保存 ($\boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2 =$ 一定) する．

☆ 読者の疑問に答えるコーナー

Q.　質点が２個より多い場合はどうなるの？
互いに力を及ぼし合って運動している質点の集まりを**質点系**と呼ぶ．この場合も，質点系の外から力が働かない場合，系の全運動量や全角運動量は保存する．

Q.　どんな物理量が保存するの？
物理量が保存するとき，次のような要因が考えられる．物理系の持つ対称性に起因するものと位相幾何学的な性質に起因するものである（後者に関しては，本書のレベルを超えた内容なので説明を割愛する）．**物理系の持つ対称性とは，ある変換に対して物理系が不変に保たれる性質のことである．**先に述べたように力が２つの質点間の位置ベクトルの差という形で位置に依存する場合，運動量の保存則が成り立つ．力に関するこの性質は「原点の位置を変えても力は変化しない」つまり「物理系の並

進不変性」（「空間の一様性」）を意味している．同様にして，角運動量の保存則については，力が2つの質点間の位置ベクトルの差に比例することに起因する．力に関するこの性質は「座標系を任意の角度回転した座標系で見ても運動方程式の形が同じである」つまり「物理系の回転不変性」（「空間の等方性」）を意味している．さらに,「物理系の時間に関する並進不変性」（「時間の一様性」）はエネルギーの保存則を導く．また，電荷の保存則は「内部空間に関する位相変換不変性」に起因する．物理系の持つ対称性・保存則を探究することは，物理系の性質を把握する上できわめて重要である．

1.1.4 慣性系再考

最後に，２つの観点から慣性系について，もう一度考察してみよう．

☆ 直交座標系は特別なの？

ニュートンの第２法則を具現する運動方程式 (1.4) や (1.5) は，直交座標系では簡単な形をしているが，極座標を使って書き表すと複雑な形になる．つまり，採用する座標系に依存して方程式の形が変わる．座標の選び方は人為的なもので，使い勝手のよさが選択の基準となる場合が多い．座標系を勘などを頼りに選ぶより，座標変換の下で方程式の形が変わらないような定式化（さらに進んで座標成分そのものに依存しない定式化）に基づいて解析すると便利であるに違いない．よくよく考えてみると，**物体の運動状態のような物理的な状態は，ベクトルの如く座標系によらないはずである．**ベクトルの成分は座標系に依存するが，ベクトルそのものは座標系に依存しないことを思い出そう．力学に関して，そのような定式化は実際に存在し**解析力学**と呼ばれる１分野を成している．具体的には，**ラグランジュ形式**や**ハミルトン形式**と呼ばれる理論形式が存在する．ラグランジュ形式は一般化座標とそれに関する時間微分を変数とする．この形式において，基本的な方程式は**オイラー・ラグランジュの方程式**と呼ばれるもので点変換（各時刻で独立な座標変換）のもとで方程式は共変性を持つ.（直交座標でも，極座標でもオイラー・ラグランジュの方程式は同じ形をしている！）一方，ハミルトン形式では一般化座標と一般化運動量（合わせて正準座標と呼ばれる）が独立変数である．この形式において，基本的な方程式は**ハミルトンの運動方程式**と呼ばれ

るもので**正準変換**と呼ばれる正準座標に関する変数変換（点変換を含むより広い変換）のもとで方程式の形は変わらない．一般化座標の成す空間を配位空間，正準座標の成す空間を位相空間と呼ぶ．配位空間の座標変数に依存した形のオイラー・ラグランジュの方程式を依存しない形の方程式に書き換えることができる．ハミルトンの運動方程式についても，同様に正準座標に依存しない表式が存在する．

解析力学の主な利点を列挙しよう．(1) 物理系の変換と対称性（不変性）と保存則との間の関係が明確である．(2) 質点系のみならず剛体，弾性体，電磁場など様々な物理系に対して成り立つ．場の理論に関する解析力学は**場の解析力学**と呼ばれている．(3) 量子論の理論形式と類似性があり，物理系を量子化する（微視的な世界で成立する理論を構築する）際に，便利な処方箋が存在する．場の量子論に興味があり，将来，それを学びたいと希望する読者に対して，解析力学および場の解析力学は事前にしっかり学習してほしい分野の１つであることをここに明記する．

☆ 特別な座標系は存在するの？

以前,『**慣性系は無数に存在し，運動の相対性から，運動法則を使って特別な慣性系を選び出すことは原理的に不可能である**』と述べた．この主張は我々の世界（宇宙）において，特別な座標系が存在しないことを意味しているように受け取れる．実際，特別な座標系の有力候補であった絶対静止系（およびそれに付随したエーテルと呼ばれる媒質）を否定することから相対性理論は誕生した．しかし，再度，宇宙に目を向けると，絶対的な基準系（特別な座標系）の存在が浮び上がる．具体的には，(1) 物質に関する基準系（宇宙に存在する全物質に関する重心に設定した座標系），(2) 宇宙背景放射に関する基準系（宇宙背景放射が一様・等方に見える座標系），(3) ハッブルの法則に関する基準系（ハッブルの法則が等方的に成立する座標系）が考えられる．驚くべきことには，これら三つの基準系がほぼ（相対速度の大きさが 100km/s ほどの範囲内で）一致していることが観測により明らかになっている．ここで，物質に関する基準系は我々の銀河を含む超銀河団の中心（乙女座星雲のあたり）に設定している．この “一致” は，何を意味するのか？ 相対性理論と矛盾しないのか？　宇宙の成り立ちを解明する鍵になるのか？　など様々な疑問が湧き上がる．将来，相対性原理などを含めてパラダイムの変更が起こるかもしれない．