

# 軌道体大統一理論 (Orbifold GUT) の過去と未来 -3世代モデルへ向けて



信州大学理学部  
川村嘉春  
@理化学研究所  
2007年1月27日

# 集中セミナーの趣旨

「ワープ空間上での大きな階層性を保ったまま、大統一および電弱対称性をヒッグス場なしで破る統一的なモデルの構築」に向けて必要な材料が揃ってきた所で、それを一度整理して見直すこと。（尾田さん作成の集中セミナーの案内からの抜粋）

## 私の使命：材料の紹介

材料：大統一理論、軌道体、ワープ空間  
ちよつとだけ

# 軌道体大統一理論 (Orbifold GUT)

の過去と未来 – 3世代モデルへ向けて

(主催者から頂いた仮題)

1. 大統一理論

2. 軌道体

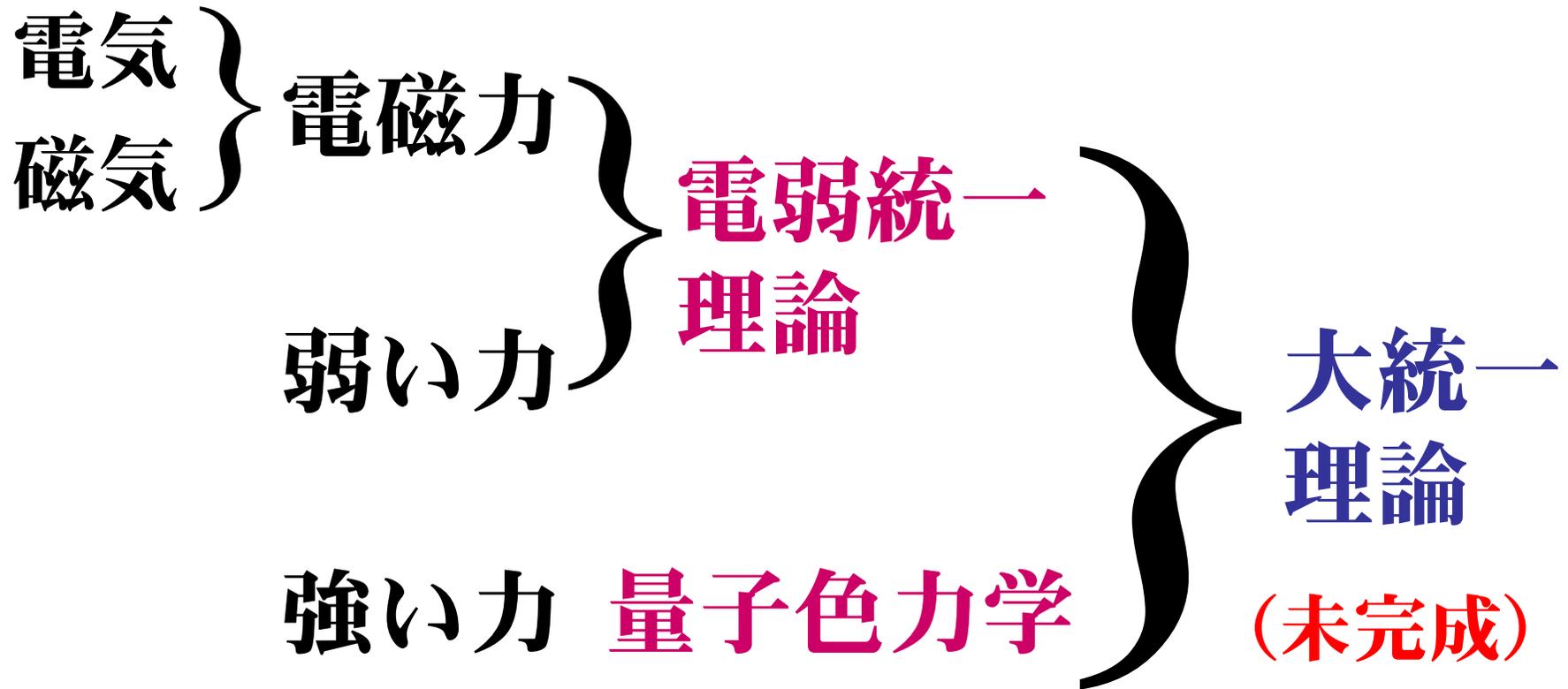
3. 過去

4. 未来 (3世代モデルへ向けて)

5. まとめ

(期待しすぎないで)

# 1. 大統一理論 (Grand Unified Theory : GUT)



標準模型

# 特徴 1. 力の大統一

**制約 1** : ゲージ結合定数の統一

$$g_3 = g_2 = g_1 @ M_{GUT}$$

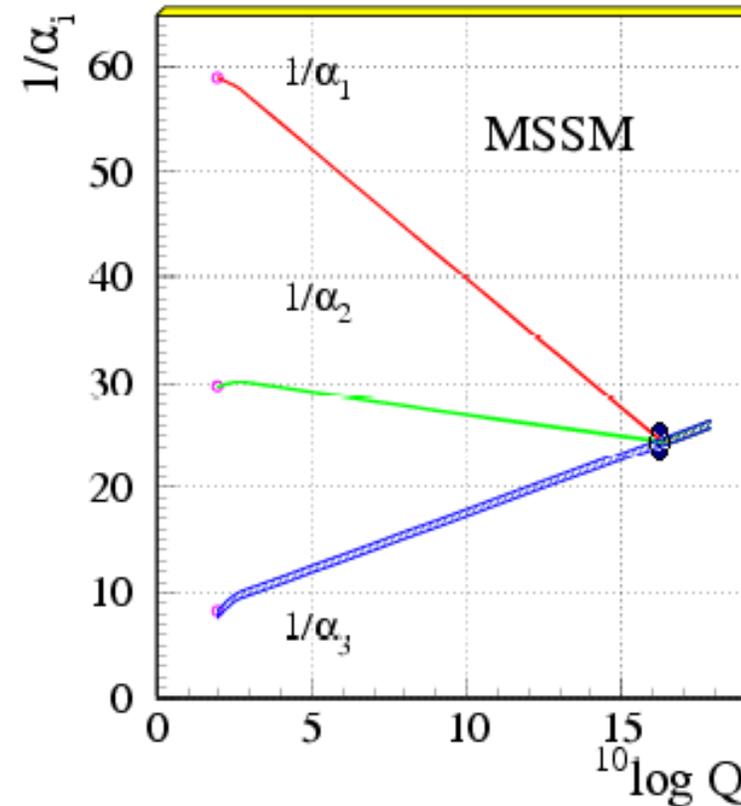
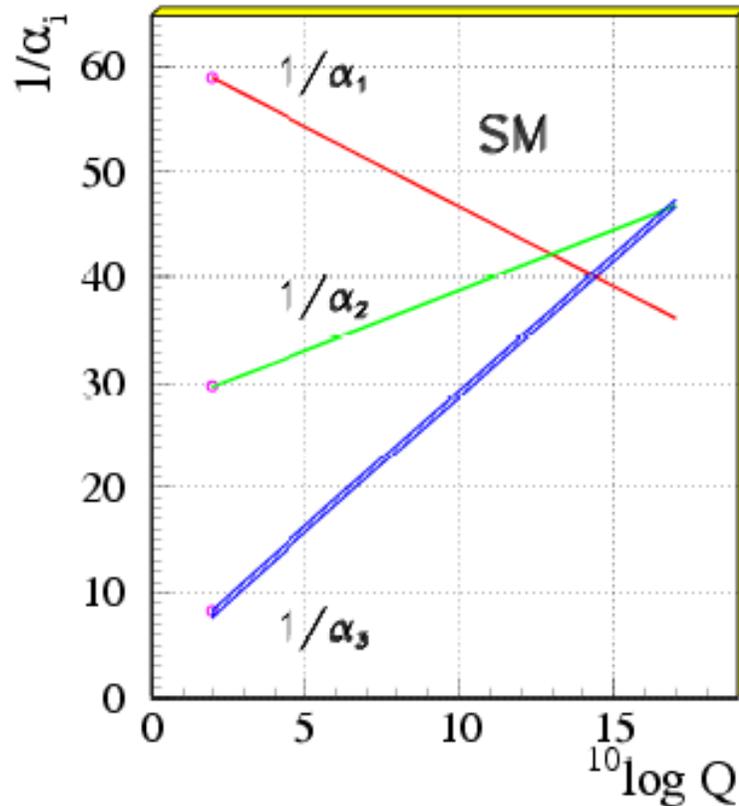
**問題点 1** (課題) ゲージ対称性の破れの機構は何か? **Higgs機構か?**

$$G_{GUT} \rightarrow \dots \rightarrow SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$$

**問題点 2** 比(電弱スケール/大統一スケール)の起源および量子補正の下での安定性

$$\frac{M_{Weak}}{M_{GUT}}$$

# (かつては)挨拶代わりにの1枚！



PDGのHPより

「大砂漠の存在」を仮定している。

The MSSM  $\rightarrow M_{GUT} = 2.1 \times 10^{16} \text{ GeV}$

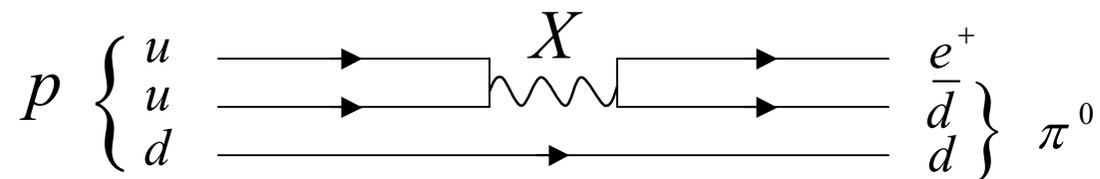
## 特徴 2. 物質の(部分的な)統一

$$SO(10) \supset SU(5) \times U(1) \quad 16 = \bar{5} + 10 + 1 \quad \text{1世代が1つの表現に収まる!}$$

## 制約 2: 湯川結合定数の(部分的な)統一

## 問題点 3 クォークやレプトンの質量の階層性、世代間の混合の起源

## 問題点 4-1 陽子崩壊



$$\tau(p \rightarrow e^+ \pi^0) \Big|_{\text{exp}} \geq O(10^{33}) \text{ 年}$$

$$\Rightarrow M_X \geq O(10^{16}) \text{ GeV}$$

# 特徴 3. カラーを持つヒッグス粒子

$$(H_C, \bar{H}_C)$$

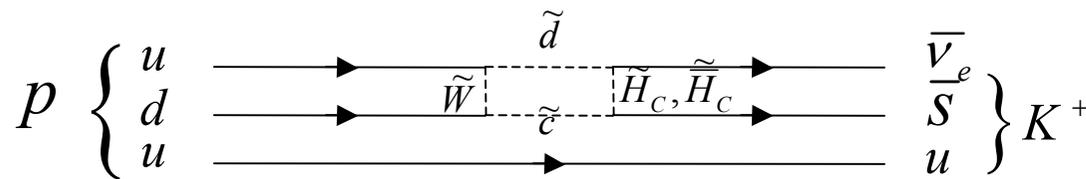
$$SU(5) \supset SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$$

$$5_H = H_C : (3, 1)_{-2} + H_W : (1, 2)_3$$

$$\bar{5}_H = \bar{H}_C : (\bar{3}, 1)_2 + \bar{H}_W : (1, 2)_{-3}$$

## 問題点 4-2 陽子崩壊

$$(\tilde{H}_C, \tilde{\bar{H}}_C)$$

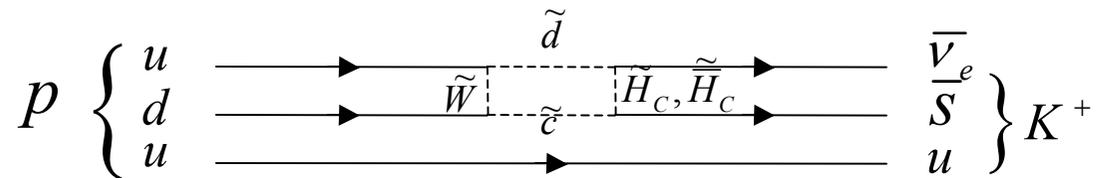
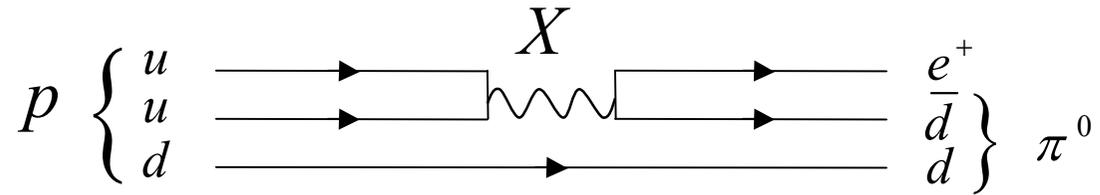


Colored  
Higgsinos

$$\tau(p \rightarrow K^+ \bar{\nu}_e) \Big|_{\text{exp}} \geq O(10^{33}) \text{ 年}$$

$$\Rightarrow M_{H_C} > O(10^{16}) \text{ GeV}$$

# 陽子崩壊について



## 解決するための常套手段

- 質量を重くする。
- 相互作用を弱くする（禁止する）。

## 問題点 5 3重項・2重項の質量分離

$$W \supset \bar{H}(f_H \langle 0 | \Sigma | 0 \rangle + \mu_H)H$$

$$\langle 0 | \Sigma | 0 \rangle = \text{diag}(2, 2, 2, -3, -3) \cdot V_\Sigma$$

$$= (2f_H V_\Sigma + \mu_H) \bar{H}_C H_C + (-3f_H V_\Sigma + \mu_H) \bar{H}_W H_W$$

$$M_{H_C} = 2f_H V_\Sigma + \mu_H > O(10^{16}) \text{ GeV} \quad \leftarrow \text{陽子崩壊}$$

$$M_{H_W} = -3f_H V_\Sigma + \mu_H < O(10^3) \text{ GeV} \quad \leftarrow \text{電弱対称性の破れ}$$

パラメータの間に微調整が必要！

如何にして自然に電弱スケールを導くか？

# 目標

大統一理論の**特徴**（力の統一、物質の統一など）を活かし、**制約**（ゲージ結合定数の統一など）をクリアーし、**問題点**を含まない大統一理論を構築する。

# 大統一理論の問題点

1. ゲージ対称性の破れの機構は何か？
2. 比(電弱スケール/大統一スケール)の起源および量子補正の下での安定性
3. クォークやレプトンの質量の階層性、世代間の混合の起源
4. 陽子崩壊
5. 3重項・2重項の質量分離

☆ Higgs sectorの拡張

☆ 時空構造の拡張



余剰空間として軌道体

# (補足) 従来の理論の問題点の解決のために余剰次元を導入する試み

- **重力の統一** → Kaluza-Klein理論
- **自然さの問題**  
「電弱スケールの起源と安定性」  
→ Hatanaka, Inami, Limの提案(高次元時空上のゲージ対称性)、ADD模型、RS模型
- **対称性の破れの機構**  
→ Hosotani機構、Scherk-Schwarz機構

## 2. 軌道体(Orbifold)

Orbifold={多様体/離散群；固定点の存在}

固定点：離散的な変換  $y \rightarrow y' = k(y)$   
の下で自分自身に移る点  $y_{fp}$

$$k(y_{fp}) = y_{fp} \quad k \neq I$$

Cf. Heterotic Stringで 6-dim Orbifold が登場!

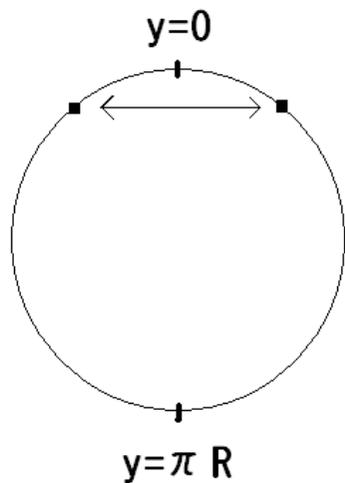
L.Dixon, J.Harvey, C.Vafa & E.Witten, *Nucl. Phys.* B261 (1985) 651, B274 (1986) 285.

# Orbifold $S^1/Z_2$

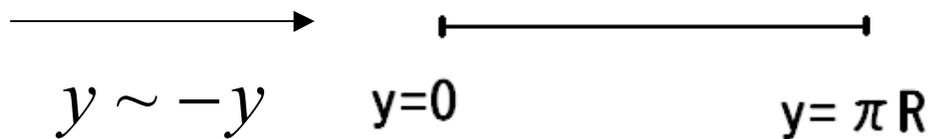
$S^1/Z_2$  : 線分 (長さ  $\pi R$ )

$$y \sim y + 2\pi R$$

$$y \sim -y$$



$$y \sim -y \sim -y + 2\pi R$$



固定点  $y_{fp} = 0, \pi R$

$$(\because) \quad 0 \rightarrow 0, \quad \pi R \rightarrow -\pi R \sim -\pi R + 2\pi R = \pi R$$

$S^1 / Z_2$  の再構成

$R^1 / (Z_2 \times Z'_2)$

$$y \sim -y$$

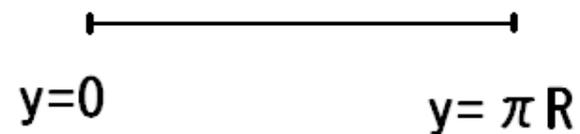
$y=0$ での反転の下での同一視

$$y \sim 2\pi R - y$$

$y = \pi R$ での反転の下での同一視

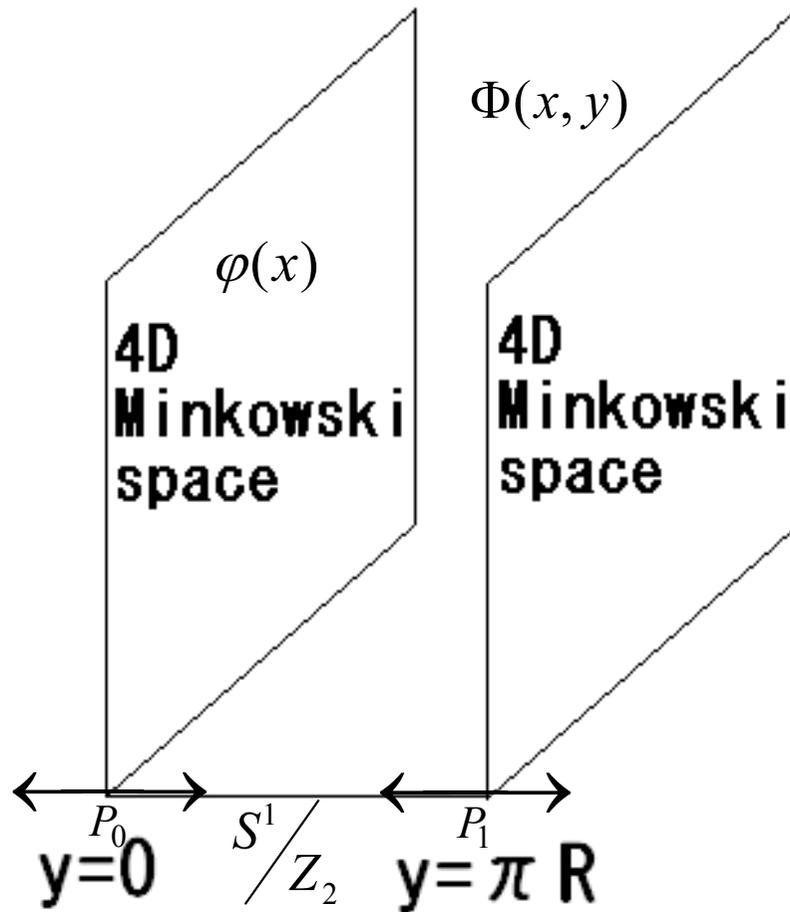
数直線

$$\xrightarrow{y \sim -y}$$
$$y \sim 2\pi R - y$$



$S^1$  の性質  $y \sim y + 2\pi R$  は内蔵されている。

# 固定点を特別視→ブレイン世界



$$x^\mu (= x) \quad x^5 = y$$

$$(\mu = 0, 1, 2, 3)$$

バルク場  $\Phi(x, y)$

ブレイン場  $\varphi(x)$

$$\begin{cases} P_0 : y \rightarrow -y \\ P_1 : y \rightarrow 2\pi R - y \\ (U : y \rightarrow y + 2\pi R) \end{cases}$$

$$U = P_1 P_0$$

Cf. P.Horava & E.Witten "Heterotic and Type I string dynamics from eleven dimension" *Nucl. Phys. B*460 (1996), 506 (hep-th/9510209)

$M^{10} \times S^1/Z_2$  上のM理論  $\leftrightarrow$   $E_8 \times E_8$  Heterotic string

# バルク場 $\Phi(x, y)$ の変換性 $(y \sim -y \sim 2\pi R - y)$

$$\begin{cases} \Phi(x, -y) = T_{\Phi}[P_0]\Phi(x, y) \\ \Phi(x, 2\pi R - y) = T_{\Phi}[P_1]\Phi(x, y) \end{cases}$$

$$T_{\Phi}[P_0]^2 = T_{\Phi}[P_1]^2 = I$$

**要請：ラグランジアン密度の一価性**

**→  $T_{\Phi}[P_a]$ ：ラグランジアン密度の  
有する不変性に関する表現行列**

各成分は $Z_2$ パリティの固有状態（固有値をそれぞれ  $P_0, P_1 = +1$  or  $-1$ ）とする。  $+1 \Rightarrow +, -1 \Rightarrow -$

$$\phi^{(P_0 P_1)}(x, y) \rightarrow \phi^{(P_0 P_1)}(x, -y) = P_0 \phi^{(P_0 P_1)}(x, y)$$

$$\phi^{(P_0 P_1)}(x, y) \rightarrow \phi^{(P_0 P_1)}(x, 2\pi R - y) = P_1 \phi^{(P_0 P_1)}(x, y)$$

簡単のため、時空は平坦とする。  $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2$

zero mode

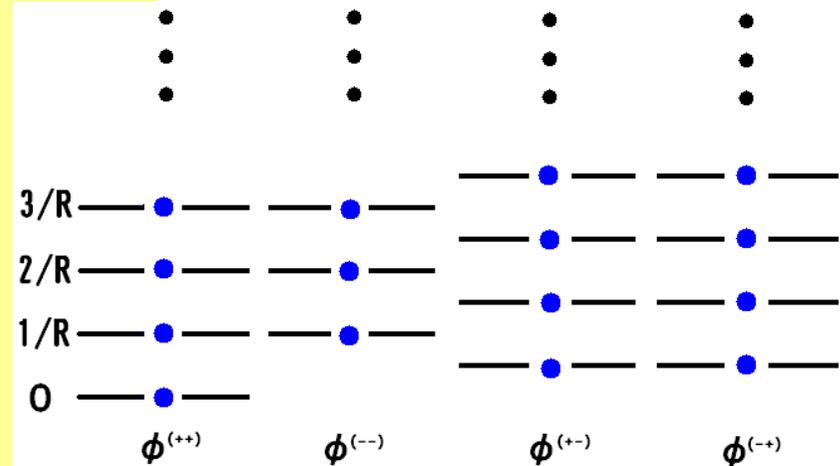
$$\phi^{(++)}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi R}} \phi_0^{(++)}(x) + \sqrt{\frac{2}{\pi R}} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n^{(++)}(x) \cos \frac{ny}{R}$$

$$\phi^{(--)}(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi R}} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n^{(--)}(x) \sin \frac{ny}{R}$$

$$\phi^{(+-)}(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi R}} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n^{(+-)}(x) \cos \frac{(2n-1)y}{2R}$$

$$\phi^{(-+)}(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi R}} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n^{(-+)}(x) \sin \frac{(2n-1)y}{2R}$$

Zero modeのみが  
我々の世界に存在



4次元場の質量スペクトラム

多重項  $\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} \phi_1(x, y) \\ \phi_2(x, y) \\ \vdots \\ \phi_N(x, y) \end{pmatrix}$  に対して、

$$\Phi(x, -y) = T[P_0]\Phi(x, y) \quad T[P_a]: N \times N \text{ matrix}$$

$$\Phi(x, 2\pi R - y) = T[P_1]\Phi(x, y)$$

$$T[P_0]^2 = T[P_1]^2 = I$$

多重項の各成分が共通の $Z_2$ パリティを有しない場合、時空のコンパクト化に際して、対称性の破れが起こりうる。(Orbifold Breaking)

多重項の各成分が共通の $Z_2$ パリティを有しない場合、時空のコンパクト化に際して、対称性の破れが起こりうる。(Orbifold Breaking)

## 予想

Orbifold Breaking

Orbifold GUT  $\rightarrow$  The MSSM

Zero modesとして

$$A_M^\alpha(x, y) \Rightarrow G_\mu^a(x), W_\mu^i(x), B_\mu(x)$$

$$H^I(x, y) \Rightarrow H_W(x), \bar{H}_W(x) \quad \text{3重項} \cdot \text{2重項の分離}$$

...

& ブレイン場

# 3. Orbifold GUTの過去

## 多種多様な模型の存在

時空構造の多様性、  
ゲージ群の多様性、  
物質場に関する多様性

$M^4 \times S^1 / Z_2$  上の  $SU(5)$  SUSY GUT に絞る。

平坦な時空、ワープした時空

# 誕生前夜(平坦な時空： $M^4 \times S^1/Z_2$ )

E. A. Mirabelli & M. E. Peskin “Transmission of Supersymmetry breaking from a four-dimensional boundary” *Phys. Rev. D* **58** (1998), 065002 (hep-th/9712214)

$M^4 \times S^1/Z_2$ 上の場の理論,  $N=2$  SUSY  $\rightarrow$   $N=1$  SUSY

A. Pomarol & M. Quiros “The standard model from extra dimensions” *Phys. Lett. B* **438** (1998), 255 (hep-ph/9806263)

$N=2$  SUSY Standard Model (SM)  $\rightarrow$   $N=1$  SUSY SM

Y. K. “Gauge Symmetry Reduction from the Extra Space  $S^1/Z_2$ ” *Prog. Theor. Phys.* **103** (2000), 613 (hep-ph/9902423)

ゲージ対称性の破れ、 $SU(5)$  GUT  $\rightarrow$  The SM

R. Barbieri, L. J. Hall & Y. Nomura “Constrained standard model from a compact extra dimension” *Phys. Rev. D* **63** (2001), 105007 (hep-ph/0011311)

$N=2$  SUSY Standard Model (SM)  $\rightarrow$  The SM

Y. K. “Triplet-Doublet Splitting, Proton Stability and an Extra Dimension” *Prog. Theor. Phys.* **105** (2001), 999 (hep-ph/0012125)

誕生

SUSY  $SU(5)$  GUT  $\rightarrow$  The MSSM

大統一理論の**特徴**を活かし、**制約**を  
クリアーし、**問題点**のない現実的な  
統一理論の構築を目指す。

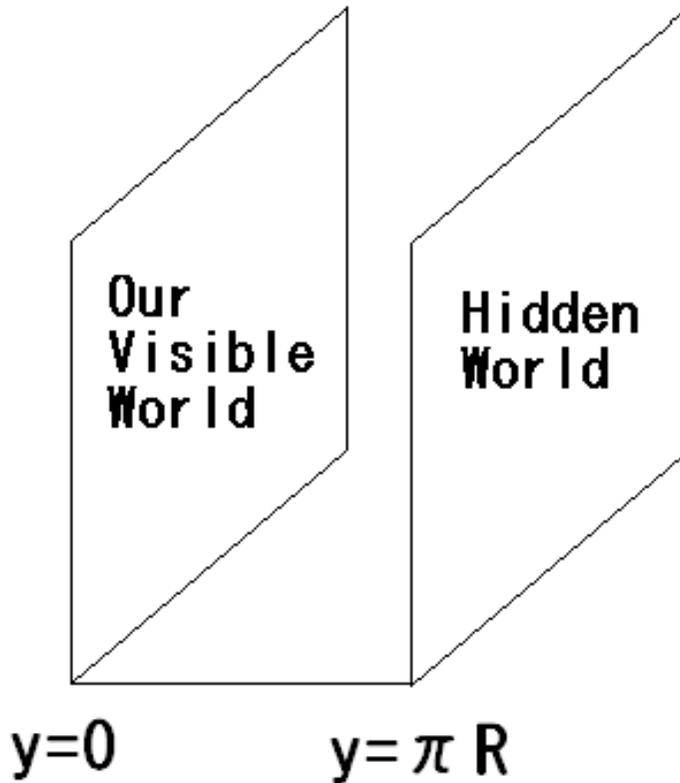
## 注目する問題点

**ゲージ対称性の破れの機構は何か？**

**3重項・2重項の質量分離の問題**

**陽子崩壊の問題**

# バルク場



$SU(5)$  Gauge supermultiplet

$(A_M, \lambda_1, \lambda_2, \sigma)$  in 5D

$\Rightarrow (A_\mu, \lambda_1) \& (\Sigma \equiv \sigma + iA_y, \lambda_2)$  in 4D

Vector & Chiral supermultiplet

2 Higgs Hypermultiplets  
with fundamental rep.

$$M^4 \times S^1 / Z_2$$

$$(H, H^{c*}; \tilde{H}, \tilde{H}^{c*}) \Rightarrow 5_H : (H, \tilde{H}) + \bar{5}_{H^c} : (H^c, \tilde{H}^c)$$

$$(\bar{H}, \bar{H}^{c*}, \tilde{\bar{H}}, \tilde{\bar{H}}^{c*}) \Rightarrow \bar{5}_H : (\bar{H}, \tilde{\bar{H}}) + 5_{H^c} : (\bar{H}^c, \tilde{\bar{H}}^c)$$

4 Chiral supermultiplets

# $Z_2$ パリティ (BCs) の指定

$$P_0 = \text{diag}(+1, +1, +1, +1, +1), \quad P_1 = \text{diag}(-1, -1, -1, +1, +1)$$

$$\begin{cases} A_\mu^\alpha(x, -y) T^\alpha = P_0 A_\mu^\alpha(x, y) T^\alpha P_0^{-1} = A_\mu^\alpha(x, y) T^\alpha, \\ A_y^\alpha(x, -y) T^\alpha = -P_0 A_y^\alpha(x, y) T^\alpha P_0^{-1} = -A_y^\alpha(x, y) T^\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_\mu^\alpha(x, 2\pi R - y) T^\alpha = P_1 A_\mu^\alpha(x, y) T^\alpha P_1^{-1}, \\ A_y^\alpha(x, 2\pi R - y) T^\alpha = -P_1 A_y^\alpha(x, y) T^\alpha P_1^{-1} \end{cases} \quad \begin{cases} T^a : \text{SM generators}, \\ T^{\hat{a}} : SU(5) / G_{SM} \text{ generators} \end{cases}$$

$$\underline{A_\mu^{a(++)}(x, y)}, \underline{A_\mu^{\hat{a}(+-)}(x, y)}, A_y^{a(--)}(x, y), A_y^{\hat{a}(-+)}(x, y)$$

$$\underline{\lambda_1^{a(++)}(x, y)}, \underline{\lambda_1^{\hat{a}(+-)}(x, y)}, \lambda_2^{a(--)}(x, y), \lambda_2^{\hat{a}(-+)}(x, y)$$

$$\sigma^{a(--)}(x, y), \sigma^{\hat{a}(-+)}(x, y)$$

ゼロモードは  $N=1$  SM gauge supermultiplets

ゲージ対称性  $SU(5) \rightarrow SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  の破れ

# Higgs multiplets に対して

$$P_0 = \text{diag}(+1,+1,+1,+1,+1), \quad P_1 = \text{diag}(-1,-1,-1,+1,+1)$$

$$\begin{cases} H(x,-y) = P_0 H(x,y) = H(x,y), \\ H^c(x,y) = -P_0 H^c(x,y) = -H^c(x,y) \end{cases} \quad (\because) \quad i\tilde{H}^c \partial_y \tilde{H}$$

$$\begin{cases} H(x,2\pi R - y) = P_1 H(x,y), \\ H^c(x,2\pi R - y) = -P_1 H^c(x,y) \end{cases} \quad H(x,y) = \begin{pmatrix} H_C(x,y) \\ H_W(x,y) \end{pmatrix}$$

$$H_C^{(+)}(x,y), \underline{H_W^{(++)}}(x,y), H_C^{c(-)}(x,y), H_W^{c(-)}(x,y), \\ \bar{H}_C^{(+)}(x,y), \underline{\bar{H}_W^{(++)}}(x,y), \bar{H}_C^{c(-)}(x,y), \bar{H}_W^{c(-)}(x,y),$$

ゼロモードはWeak Higgs supermultiplets

3重項・2重項の質量分離の実現

# 3重項・2重項の質量分離に関する補足

## 1. ブレイン上の相互作用による $\mu$ 問題

$$\int d^2\theta \delta(y) \mu H \bar{H} + \text{h.c.} \rightarrow U(1)_R \text{ で禁止}$$

Ref. L. J. Hall & Y. Nomura, *Phys. Rev. D* 64 (2001) 055003 (hep-ph/0103125)

## 2. Hosotani機構による補正は？

$\exp\left(ig_U \oint A_5 dy\right)$  による質量の補正については、

ゼロモードが欠如している場合は変化しない。

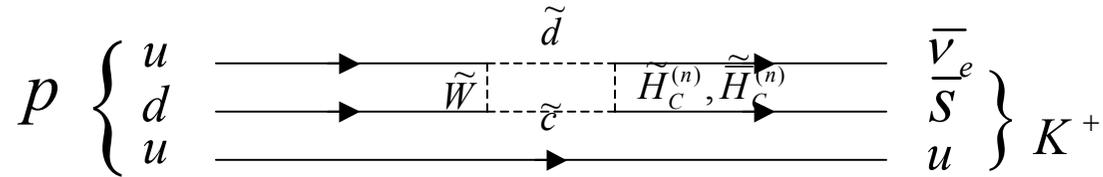
## 3. $O(100)$ GeVの質量生成機構は？

Scherk-Schwarz機構

Higgs 機構  $\int d^2\theta \delta(y) \xi \langle X \rangle H \bar{H} + \text{h.c.}$

# 陽子崩壊について

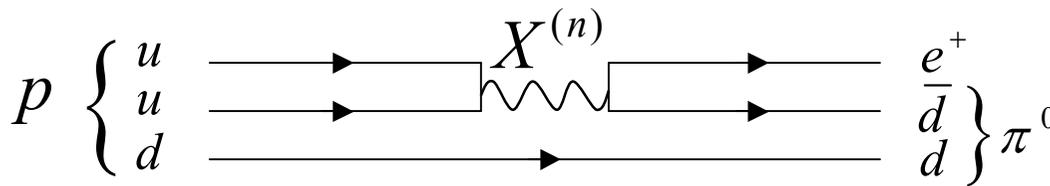
その1



→  $U(1)_R$  で  $\tilde{H}^{(n)} \tilde{\bar{H}}^{(n)}$  結合を禁止!

Ref. L. J. Hall & Y. Nomura, *Phys. Rev. D*64 (2001) 055003 (hep-ph/0103125)

その2



ゲージ結合定数の一致

→  $M_{X^{(n)}} \approx M_{GUT} = O(10^{15})\text{GeV}$

→  $\tau \sim O(10^{31})\text{年?}$

第1世代の場はバルク場とすると、抑制される。

$$10 \Rightarrow e_R^{c(++)} + u_R^{c(++)} + q_L^{c(+-)}, 10' \Rightarrow e_R^{c(+-)} + u_R^{c(+-)} + q_L^{c(++)}$$

Ref. L. J. Hall & Y. Nomura, *Annals. Phys.* 306 (2003) 132 (hep-ph/0212134)

1. ゲージ対称性の破れの機構は何か？

Orbifold breaking

2. 比(電弱スケール/大統一スケール)の  
起源および量子補正の下での安定性

Supersymmetry

3. クォークやレプトンの質量の階層性、世  
代間の混合の起源      バルク物質場の存在

4. 陽子崩壊       $U(1)_R$  & バルク物質場

5. 3重項・2重項の質量分離

Orbifold breaking

# 歴史(ワープした時空： $M^4 \times S^1 / Z_2$ )

L. Randall & R. Sundrum “Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimensions” *Phys. Rev. Lett.* 83 (1999), 3370 (hep-ph/9905221); “An Alternative to Compactification” *Phys. Rev. Lett.* 83 (1999), 4690 (hep-ph/9906064)

ワープ因子による階層性の生成、  
重力子の局在化

$$ds^2 = e^{-2ky} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2$$

T. Gherghetta & A. Pomarol “Bulk fields and supersymmetry in a slice of AdS” *Nucl. Phys.* B586 (2000), 141 (hep-ph/0003129)

超対称性

A. Pomarol “Grand Unified Theories without the Desert” *Phys. Rev. Lett.* 85 (2000), 4004 (hep-ph/0005293)

TeVスケールにKKモードの存在

ゲージ結合定数の対数的な変化、陽子崩壊の抑制

具体的な模型（対称性の破れ）は提示されていない。

W. D. Goldberger, Y. Nomura & D. R. Smith “Warped Supersymmetric Grand Unification” *Phys. Rev.* D67 (2003), 075021 (hep-ph/0209158)

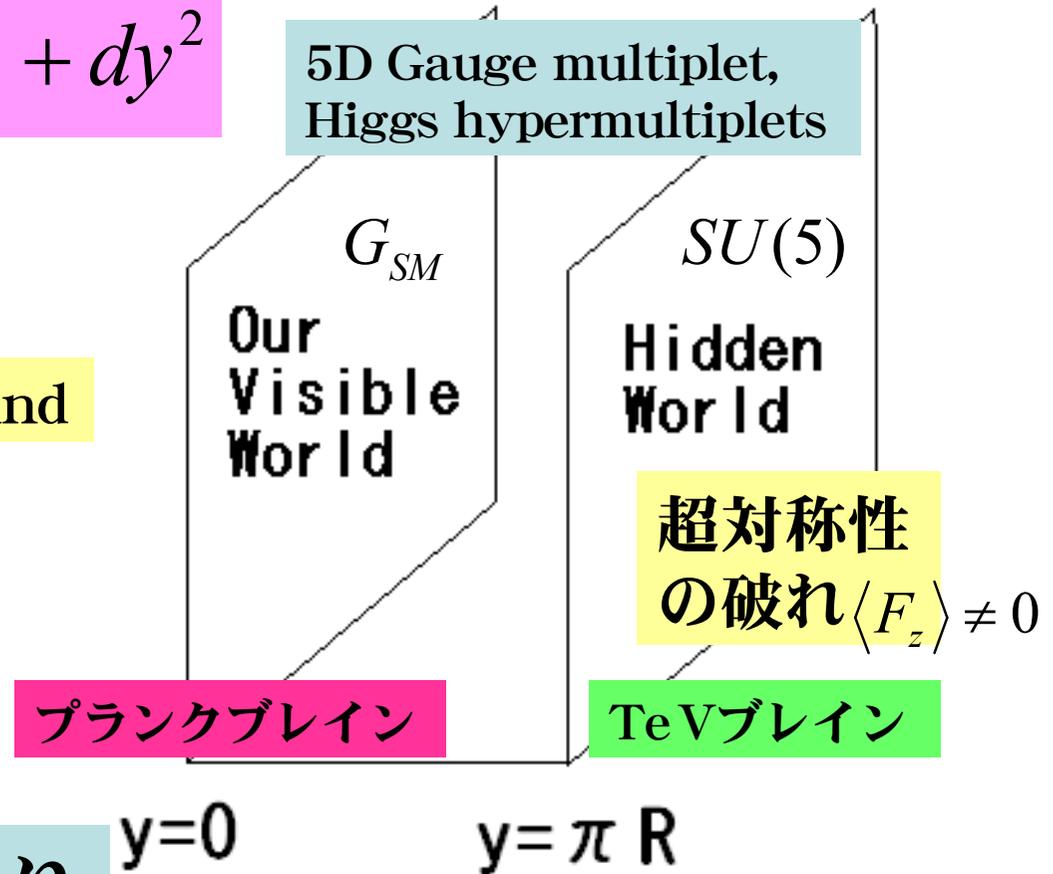
ゲージ群  $SU(5)$  に基づく具体的な模型の構築

$$ds^2 = e^{-2ky} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2$$

$$M_\lambda \sim \alpha / 4\pi \Lambda$$

$$m_{\tilde{f}}^2 \sim \left( \alpha / 4\pi \Lambda \right)^2 \quad \text{Flavor blind}$$

$$\Lambda \sim \pi k e^{-\pi k R} \\ = 10 \sim 100 \text{ TeV}$$



ゲージ結合の統一より

$$P_0 = \text{diag}(-1, -1, -1, +1, +1), \quad P_1 = \text{diag}(+1, +1, +1, +1, +1)$$

我々の世界にゼロモード  $(A_\mu^{a(0)}, H_W^{(0)}, \bar{H}_W^{(0)})$  が局在！

TeVブレインにX, Yゲージ場のKKモードが局在！

KKモードの質量は、

$$\Lambda \sim \pi k e^{-\pi k R}$$
$$= 10 \sim 100 \text{ TeV}$$

のオーダー

## ゲージ結合定数の統一？ 陽子崩壊？

X, Yゲージ場のKKモードはTeVブレインに局在しているため、問題はない！

- (::) ゲージ結合定数の繰り込みに関して、ゼロモードの寄与によりMSSMの場合と同じ！
- (::) 物質粒子とX, YのKKモードの波動関数の重なりは $O(\text{TeV}/M_{GUT})$  & Colored Higgsinosの関与に関しては $U(1)_R$ 対称性で抑制！

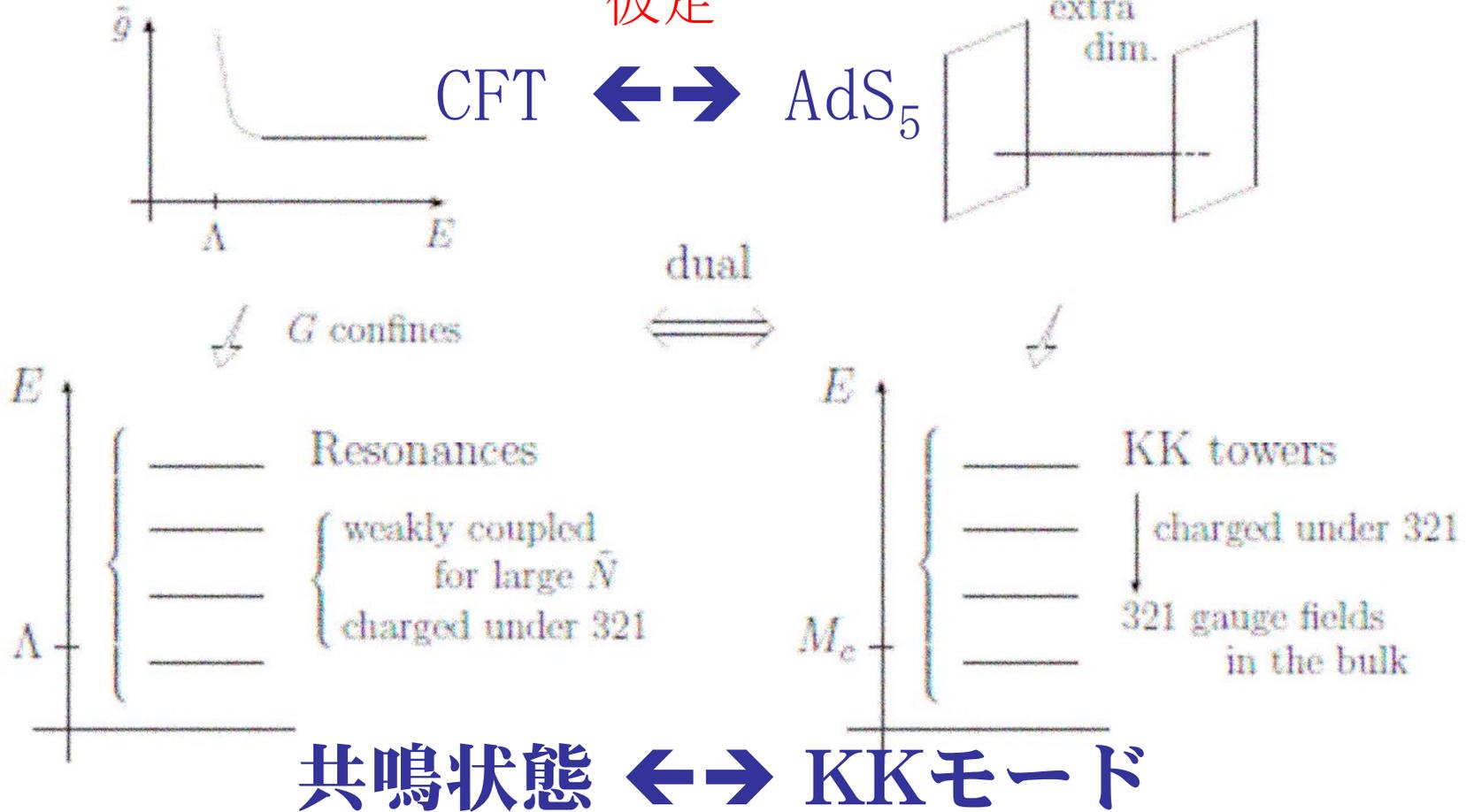
# なぜ、AdS<sub>5</sub>なのか？

Ref. Y. Nomura "Warped Supersymmetric

Unification in Warped Space" hep-ph/0410348

N=1 SUSYの破れ

仮定



ゲージ結合定数の統一の要請から

Global SU(5)  $\leftrightarrow$  Local SU(5)

# Orbifold GUTs の発展について

## Gauge Unification

$$V^\alpha(x, y) \Rightarrow G_\mu^a(x), W_\mu^i(x), B_\mu(x), \tilde{G}^a(x), \tilde{W}^i(x), \tilde{B}(x)$$

## Gauge-Higgs Unification

$$V^\alpha(x, y) \Rightarrow \begin{cases} G_\mu^a(x), W_\mu^i(x), B_\mu(x), \tilde{G}^a(x), \tilde{W}^i(x), \tilde{B}(x) \\ H_W(x), \bar{H}_W(x), \tilde{H}_W(x), \tilde{\bar{H}}_W(x) \end{cases}$$

## Gauge-Matter(Family) Unification

$$V^\alpha(x, y) \Rightarrow \begin{cases} G_\mu^a(x), W_\mu^i(x), B_\mu(x), \tilde{G}^a(x), \tilde{W}^i(x), \tilde{B}(x) \\ q_L(x), \tilde{q}_L(x), \dots \end{cases}$$

# Gauge Unification

## Gauge-Higgs Unification

## Gauge-Matter(Family) Unification

## Gauge-Higgs-Matter Unification

$$V^\alpha(x, y) \Rightarrow \begin{cases} G_\mu^a(x), W_\mu^i(x), B_\mu(x), \tilde{G}^a(x), \tilde{W}^i(x), \tilde{B}(x) \\ H_W(x), \bar{H}_W(x), \tilde{H}_W(x), \tilde{\bar{H}}_W(x), \\ q_L(x), \tilde{q}_L(x), \dots \end{cases}$$

## Family Unification ?

$$M(x, y) \Rightarrow q_L(x), q_L(x), \dots$$

世代の起源の解明  
に向けて → 未来

# 4. Orbifold GUTの未来

- 法則、現象のさらなる統一に向けて

Gauge-Higgs Unification

→ 細谷さんのTalk

世代の起源の解明(Work in progress with 尾田さん)

- 模型の検証に向けて

理論的な取捨選択

→ BCsの同値類、 超弦理論

Ref. N. Haba, Y. Hosotani & Y.K.  
*Prog.Theor.Phys.* 111 (2004), 265

物理量の間模型に特有な関係

(Work in progress with 木南君)

# 世代の起源の解明

物質に関して、より統一的な理解が  
したい **(のだが)**。

$$SO(10) \supset SU(5) \times U(1) \quad 16_1 (= \bar{5} + 10 + 1), 16_2, 16_3$$

$$SO(16) \supset SO(10) \times SU(4) \quad 128 = (16, 4) + (\bar{16}, \bar{4})$$

**ミラー粒子の存在？**

$$SU(8) \supset SU(5) \times SU(3) \times U(1)$$

$$[8, 3] (= {}_8C_3) = 56 = (10, 3) + (5, \bar{3}) + (\bar{10}, 1) + (1, 1)$$

**量子異常の存在？**

## ☆ 4次元の理論

大きなゲージ群の大きな表現たち  
& Anomaly free

→ 余計な粒子が登場？

高次元に行けばよいのでは？

☆  $M^4 \times S^1 / Z_2$  上の理論

大きなゲージ群の大きな表現(たち)

→ Orbifold breakingにより余計な  
粒子を消去！足りないものはブレイ  
ン場で供給！

# 課題

Orbifold Breaking

ある大きな表現  $\rightarrow$  3世代の物質場

$$\text{Q1. } SU(N) \rightarrow SU(5) \times \cdots,$$

$$[N, k] =_N C_k \rightarrow 3 \times (\bar{5} + 10)?$$

$$\text{Q2. } SU(N) \rightarrow SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \times \cdots,$$

$$[N, k] =_N C_k \rightarrow 3 \times \left( \begin{array}{l} (\bar{3}, 1)_2 + (1, 2)_{-3} \\ + (3, 2)_1 + (\bar{3}, 1)_{-4} + (1, 1)_6 \end{array} \right)?$$

# $Z_2$ Orbifold Breaking

$$P_0 = \text{diag}(\overbrace{+1, \dots, +1}^p, \overbrace{+1, \dots, +1}^q, \overbrace{-1, \dots, -1}^r, \overbrace{-1, \dots, -1}^{s=N-p-q-r}),$$

$$P_1 = \text{diag}(\overbrace{+1, \dots, +1}^p, \overbrace{-1, \dots, -1}^q, \overbrace{+1, \dots, +1}^r, \overbrace{-1, \dots, -1}^{s=N-p-q-r})$$

$$SU(N) \rightarrow SU(p) \times SU(q) \times SU(r) \times SU(s) \times U(1)^n$$

( $SU(1) \Rightarrow U(1)$ ,  $SU(0) \Rightarrow \text{Nothing}$ )

$$[N, k] =_N C_k = \sum_{l_1=0}^k \sum_{l_2=0}^{k-l_1} \sum_{l_3=0}^{k-l_1-l_2} \binom{p}{l_1} \binom{q}{l_2} \binom{r}{l_3} \binom{s}{k-l_1-l_2-l_3}$$

$\binom{p}{l_1}, \binom{q}{l_2}, \binom{r}{l_3}, \binom{s}{l_4}$  の  $Z_2$  パリティは？

# $Z_2$ パリティの指定

$$Z_2 : N = [N,1] \rightarrow \eta_{[N,1]} P_0 N, \quad N = [N,1] \rightarrow \eta'_{[N,1]} P_1 N$$

$$[N,k] =_N C_k = (N \times \cdots \times N)_a$$

$$= \sum_{l_1=0}^k \sum_{l_2=0}^{k-l_1} \sum_{l_3=0}^{k-l_1-l_2} ({}_p C_{l_1}, {}_q C_{l_2}, {}_r C_{l_3}, {}_s C_{k-l_1-l_2-l_3}) \text{ に対して}$$

$$(N \times \cdots \times N)_a \rightarrow \eta_{[N,k]} (P_0 N \times \cdots \times P_0 N)_a,$$

$$(N \times \cdots \times N)_a \rightarrow \eta'_{[N,k]} (P_1 N \times \cdots \times P_1 N)_a$$

$\eta_{[N,k]}, \eta'_{[N,k]}$ : intrinsic  $Z_2$  parity, +1 or -1

$({}_p C_{l_1}, {}_q C_{l_2}, {}_r C_{l_3}, {}_s C_{l_4})$  の  $Z_2$  パリティ

$$\rho_0 = (-1)^{l_1+l_2} (-1)^k \eta_{[N,k]}, \quad \rho_1 = (-1)^{l_1+l_3} (-1)^k \eta'_{[N,k]}$$

# (例 1) $SU(9)$ (SUSY) GUT

$$\begin{cases} P_0 = \text{diag}(+1, +1, +1, +1, +1, -1, -1, -1, -1), \\ P_1 = \text{diag}(+1, +1, +1, +1, +1, +1, +1, +1, -1) \end{cases}$$

$$SU(9) \rightarrow SU(5) \times SU(3) \times U(1)^2$$

$$\begin{aligned} [9,6] &= {}_9C_6 \\ &= \sum_{l=0}^6 \sum_{m=0}^{6-l} ({}_5C_l, {}_3C_m, {}_1C_{6-l-m}) \end{aligned}$$

species	Representations	$P_0$	$P_1$
$1_L$	$({}_5C_{0,3} {}_3C_{m,1} {}_1C_{6-m})$	$\eta_{[9,6]}$	$(-1)^m \eta'_{[9,6]}$
$5_L$	$({}_5C_{1,3} {}_3C_{m,1} {}_1C_{5-m})$	$-\eta_{[9,6]}$	$-(-1)^m \eta'_{[9,6]}$
$10_L$	$({}_5C_{2,3} {}_3C_{m,1} {}_1C_{4-m})$	$\eta_{[9,6]}$	$(-1)^m \eta'_{[9,6]}$
$\overline{10}_L$	$({}_5C_{3,3} {}_3C_{m,1} {}_1C_{3-m})$	$-\eta_{[9,6]}$	$-(-1)^m \eta'_{[9,6]}$
$\overline{5}_L$	$({}_5C_{4,3} {}_3C_{m,1} {}_1C_{2-m})$	$\eta_{[9,6]}$	$(-1)^m \eta'_{[9,6]}$

$(\eta_{[9,6]}, \eta'_{[9,6]}) = (+1, +1)$  のとき

$$\psi(x, y) \Rightarrow \begin{pmatrix} \chi_L(x, y) \\ \xi_R(x, y) \end{pmatrix}$$

$$(\eta_{[9,6]}, \eta'_{[9,6]}) = (-1, -1)$$

$$n_{\overline{5}_L} = \overline{5}_L^{(++)} \text{ の数} + 5_L^{(--)} \text{ の数} - \overline{5}_L^{(--) \text{ の数}} - 5_L^{(++)} \text{ の数}$$

$$= \sum_{m=\text{even}} {}_3C_m \cdot {}_1C_{2-m} + \sum_{m=\text{even}} {}_3C_m \cdot {}_1C_{5-m} = {}_3C_2 \cdot {}_1C_0 = 3$$

$$n_{10_L} = 10_L^{(++)} \text{ の数} + \overline{10}_L^{(--) \text{ の数}} - 10_L^{(--) \text{ の数}} - \overline{10}_L^{(++)} \text{ の数}$$

$$= \sum_{m=\text{even}} {}_3C_m \cdot {}_1C_{4-m} + \sum_{m=\text{even}} {}_3C_m \cdot {}_1C_{3-m} = {}_3C_2 \cdot {}_1C_1 = 3$$

## (例 2) $SU(9)$ (SUSY) GUT

$$\begin{cases} P_0 = \text{diag}(+1, +1, +1, +1, +1, -1, -1, -1, -1), \\ P_1 = \text{diag}(+1, +1, +1, -1, -1, +1, +1, +1, -1) \end{cases}$$

$$SU(9) \rightarrow SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(3) \times U(1) \times U(1)_Y \times U(1)$$

$$[9,6] = {}_9C_6 = \sum_{l_1=0}^6 \sum_{l_2=0}^{6-l_1} \sum_{l_3=0}^{6-l_1-l_2} ({}_3C_{l_1}, {}_2C_{l_2}, {}_3C_{l_3}, {}_1C_{6-l_1-l_2-l_3})$$

表 3: The flavor number of each chiral fermion from  $[9, 6]$ .

Representation	$\eta_{[9,6]}$	$\eta'_{[9,6]}$	$n_d$	$n_l$	$n_{\bar{u}}$	$n_{\bar{e}}$	$n_q$	$n_{\bar{\nu}}$
$[9, 6]$	+1	+1	3	3	3	3	2	1
	+1	-1	3	3	2	2	3	3

# 物理量の間の特異な関係

スカラー粒子 (Sfermion, Higgs)の質量に関する和則に注目する。

高エネルギースケール  
における関係式



繰り込み群

TeVスケール  
における和則



高エネルギーの理論



将来の実験値

高エネルギーの理論として、  
 $SU(N)$  Orbifold GUTを想定  
し、関係式を求めよう。

共通に現れる大統一スケールにおける関係式

$$m_{\tilde{u}_R^*}^2 = m_{\tilde{e}_R^*}^2 \quad \text{タイプの関係式}$$

$$(\because) 10 \Rightarrow u_R^{c(++)} + e_R^{c(++)} + q_L^{c(+-)}$$

Cf. 通常の大統一理論

$$m_{\tilde{u}_R^*}^2 = m_{\tilde{e}_R^*}^2 = m_{\tilde{q}_{1L}}^2 \quad \text{タイプの関係式}$$

## (例 2) $SU(9)$ (SUSY) GUT を例にとる。

$$\begin{cases} P_0 = \text{diag}(+1, +1, +1, +1, +1, -1, -1, -1, -1), \\ P_1 = \text{diag}(+1, +1, +1, -1, -1, +1, +1, +1, -1) \end{cases}$$

$$SU(9) \rightarrow SU(3)_C \times SU(2)_L \times SU(3) \times U(1) \times U(1)_Y \times U(1)'$$

$$[9,6] = {}_9C_6 = \sum_{l_1=0}^6 \sum_{l_2=0}^{6-l_1} \sum_{l_3=0}^{6-l_1-l_2} ({}_3C_{l_1}, {}_2C_{l_2}, {}_3C_{l_3}, {}_1C_{6-l_1-l_2-l_3})$$

導かれる Sfermions

Rep.	Species	$U(1)$	$U(1)'$
$(\bar{3}, 1, \bar{3}, 1)$	$\tilde{d}_R^*, \tilde{s}_R^*, \tilde{b}_R^*$	2	6
$(1, 2, 3, 1)$	$\tilde{l}_{1L}, \tilde{l}_{2L}, \tilde{l}_{3L}$	-2	6
$(\bar{3}, 1, 3, 1)$	$\tilde{u}_R^*, \tilde{s}_R^*, \tilde{t}_R^*$	1	3
$(1, 1, 3, 1)$	$\tilde{e}_R^*, \tilde{\mu}_R^*, \tilde{\tau}_R^*$	1	3
$(3, 2, 1, 1)$	$\tilde{q}_{1L}$	-3	3
$(3, 2, 1, 1)$	$\tilde{q}_{2L}$	0	-12

$$M_{\tilde{f}}^2(\mu_W) = m_f^2(\mu_W) + m_{[9,6]}^2 + \sum_I Q_I \langle D_I \rangle + \sum_{i=1}^3 \xi_{\tilde{f}}^i M_i^2(\mu_W) + \dots$$

未知量  $(m_{[9,6]}^2, \langle D_I \rangle)$  を消去することにより和則を導く。

共通の現れるタイプのものを除くモデルに依存した和則の例 (4個のうちの3個)

$$\begin{aligned} M_{\tilde{d}_R}^2 + M_{\tilde{e}_L}^2 &= M_{\tilde{s}_R}^2 + M_{\tilde{\mu}_L}^2 = M_{\tilde{b}_R}^2 + M_{\tilde{\tau}_L}^2 + 2F_b + F_\tau, \\ M_{\tilde{d}_R}^2 + M_{\tilde{u}_R}^2 &= M_{\tilde{s}_R}^2 + M_{\tilde{c}_R}^2 = M_{\tilde{b}_R}^2 + M_{\tilde{t}_R}^2 - m_t^2 + 2F_t + 2F_b, \\ M_{\tilde{e}_L}^2 + M_{\tilde{\mu}_L}^2 + M_{\tilde{\tau}_L}^2 + M_{\tilde{u}_R}^2 + M_{\tilde{c}_R}^2 + M_{\tilde{t}_R}^2 \\ &= 3M_{\tilde{u}_L}^2 + M_{\tilde{d}_R}^2 + M_{\tilde{s}_R}^2 + M_{\tilde{b}_R}^2 - 3\zeta_3 M_3^2 + 60\zeta_1 M_1^2 \\ &\quad - (8M_W^2 - 5M_Z^2) \cos 2\beta + m_t^2 - 2F_t + 2F_b - F_\tau \end{aligned}$$

## 5. まとめ

「ワープ空間上での大きな階層性を保ったままで、大統一および電弱対称性をヒッグス場なしで破る統一的なモデルの構築」に向けて必要な材料として、  
『大統一理論』、『軌道体』、『ワープ空間』を紹介した。

紹介できなかった材料：

『Hosotani機構』 『Gauge-Higgs Unification』 『AdS/CFT対応』 等

# 宿題

「ワープ空間上での大きな階層性を保ったままで、大統一および電弱対称性をヒッグス場なしで破る統一的なモデルの構築」

「世代の起源の解明と余剰次元の証拠探し（ヒント：模型に特有の物理量の間関係）」

以上。

# おまけ: 今年の年賀状に潜む事柄の一部

8月に蛹から成虫になったカブトムシが年賀状を出すころ天に召されました。

「Controlled not gate」

$|a\rangle|b\rangle \rightarrow |a\rangle|b'\rangle$  に対して、 $|a\rangle = |1\rangle$  のとき、 $|b\rangle$  の状態が反転する。

$$|0\rangle|0\rangle \rightarrow |0\rangle|0\rangle$$

$$|0\rangle|1\rangle \rightarrow |0\rangle|1\rangle$$

$$|1\rangle|0\rangle \rightarrow |1\rangle|1\rangle$$

$$|1\rangle|1\rangle \rightarrow |1\rangle|0\rangle$$



猪の体のデザインはCOBEのデータを参考にした。

子供の猪はオセロの配列を見て、Controlled not gateを連想し、Entanglementを頭に描いている。