次ページ以降のノートは，以前の授業で用いていた配布ノートである。4 年生になっても困らない様に，色々な刺激を与える様に，と考えて授業を行って来たが (その様に学生に刺激を与えるのが大学の授業だと私は思う)，それが実りあるものになるためには皆さんの勉強が大前提となる。例えば，1 つの問題に対して (刺激を与えるために) 複数の解き方を紹介する事がしばしばあるが，どの解き方が基礎的で今すぐに修得しなければならないのか，どの解き方が発展的で将来理解すればよいのか，という区別がつく位には勉強してもらわなければならないのである。ところがその様な勉強をしない人が増えて，基礎的な内容も発展的な内容もひとまとめにして分からない，分からない，分からない，… 。発展的な内容に目を取られ，それが分からない事により基礎的な内容まで分からないと思い込んで，勉強をしない，更に分からない，更に勉強をしない，全く分からない，という悪循環。

「4 年生になっても困らない」ではなく,「今困らない」を優先する授業を行わなければならない時代が来た様に感じる。そこで今後のこの授業では，その様な学生に対応するために，内容を基礎的なものに絞る事にする。内容を限る事で逆に説明の論理が飛んでしまう事もあるが，致し方ない。試験に関しては，以前の授業においても試験問題は基礎的内容に限っていたので，以前と殆ど変わりは無い。

内容を基礎的なものに限る事でやる気のある学生の意欲を削ぐ事になってはいけないので，また,「今困らない」が「4 年生になったら困るかも知れない」授業なので，進んで学びたい学生のために次ページ以降のノートを付ける。参考にしてもらいたい。空欄となっている板書については，知りたければ尋ねて下さい (黙っていても与えられるという受身的態度から，自ら求めるという積極的態度へ！)。また，それらにミスプリ等を見つけたら知らせて下さい。

2007 年 9 月末

物理数学 III (小竹)　 授業促進のためのノート

全部板書したいところであるが，時間が不足する事と，説明を聞いてもらうために，板書の一部を配布する． $\boxed{\text{板書}}$ と書いた部分では板書するので書き写す様に．このノートを見れば話の順序が分かるので予習に役立ててもらいたい．十分な予習と徹底的な復習をする事．このノートは重要な事柄をまとめたものではない．ミスプリを見つけたら連絡して下さい．

教科書
・「物理のための応用数学」
　小野寺 嘉孝 著，裳華房 (1988 年)
・理工系の数学入門コース 6「フーリエ解析」
　大石 進一 著，岩波書店 (1989 年)
参考書
・「物理数学」
　佐々木 隆 著，培風館 (1996 年)
・「詳解物理応用数学演習」
　後藤憲一・山本邦夫・神吉健 共編，共立出版 (1979 年)
・理工系の基礎数学 6「フーリエ解析」
　福田礼次郎 著，岩波書店 (1997 年)

第 1 部：特殊関数

特殊関数：量子力学，境界値問題等において様々な関数が必要となる．
心構え：基本的な概念を理解し，どの様な関数があるのかを知っておく事！ 個々の関数の細かい性質は覚えきれないし，覚える必要もない．その様な関数を使う必要が生じた時に，参考書・公式集を見れば良いのである．(どの本のどの辺りを見れば良いかがさっと思い出せる位に勉強してもらいたい．また，覚える必要がないとは書いたが，Hermite の多項式についてはある程度覚える様に．)　本によって関数の定義が異なる事があるので，注意する事．

§ 1　直交関数系と直交多項式

§ 1.1　n 次元数ベクトル

◎ $\mathbb{C}^n \ni \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$，$a_i \in \mathbb{C}$． $\mathbb{R}^n$ も同様．
∘ 和とスカラー倍： $\boxed{\text{板書 1}}$ 8 つの性質
☆$_1$：(1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$, (2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$,
　(3) $^\exists \boldsymbol{0}, {}^\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$, (4) $^\forall \boldsymbol{a}, {}^\exists \boldsymbol{a}'$ s.t. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{0}$
　($\boldsymbol{a}'=-\boldsymbol{a}$ と書く)．
☆$_2$：(1) $k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$, (2) $(k+l)\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{a}$,
　(3) $(kl)\boldsymbol{a}=k(l\boldsymbol{a})$, (4) $1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$
∘ 内積： $\boxed{\text{板書 2}}$ 4 つの性質
☆$_3$：(1) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\overline{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}$, (2) $(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b})$,
　(3) $(\boldsymbol{c},k\boldsymbol{a})=k(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})$, (4) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})\geq 0$ (等号は $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$)
ノルム：$||\boldsymbol{a}||=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})$
∘ 自然基底：$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \ldots, \boldsymbol{e}_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$.
$(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j)=\delta_{ij}$：正規直交基底
$\boldsymbol{a}=\sum_{i=1}^n a_i\boldsymbol{e}_i$　ここで $a_i=(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{a})$
$=\sum_{i=1}^n \boldsymbol{e}_i a_i=(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$
• $\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$ と $(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$ について：今の場合同じになっているが，前者は数ベクトルで後者は“本当の”ベクトル．“本当の”ベクトルと言っている意味は基底の選び方に依らないという意味で，別の基底 $\{\boldsymbol{e}'_i\}$ を取ると $\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n)\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=(\boldsymbol{e}'_1,\cdots,\boldsymbol{e}'_n)\begin{pmatrix}a'_1\\\vdots\\a'_n\end{pmatrix}$ となり，成分は変わるがベクトル $\boldsymbol{a}$ は変わらない．
◎ 線型写像：$T:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^m$　線型性
☆$_4$：(1) $T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=T(\boldsymbol{x})+T(\boldsymbol{y})$, (2) $T(k\boldsymbol{x})=kT(\boldsymbol{x})$.
(1)(2)⇔(3) $T(k\boldsymbol{x}+l\boldsymbol{y})=kT(\boldsymbol{x})+lT(\boldsymbol{y})$
基底を 1 つ決めると
$T\leftrightarrow A=(a_{ij})=(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n)$：$m\times n$ 行列 $\boxed{\text{板書 3}}$
∘ 行列の演算：和，スカラー倍，積，ダガー $\boxed{\text{板書 4}}$
◎
∘ 完全性： $\boxed{\text{板書 5}}$
∘ 部分空間 $W\subset\mathbb{C}^n$ への正射影 P ($P^2=P, P^\dagger=P$)：W の正規直交基底 $\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_m$, $(\boldsymbol{u}_i,\boldsymbol{u}_j)=\delta_{ij}$ $\boxed{\text{板書 6}}$
∘ Gram-Schmidt の正規直交化法：
一次独立な $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_m\in\mathbb{C}^n$ に対して，$L[\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_j]=L[\boldsymbol{u}_1,\cdots,\boldsymbol{u}_j]$ $(j=1,\ldots,m)$ となる様に，正規直交系 $\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_m$ を作る手順． $\boxed{\text{板書 7}}$

§ 1.2　ベクトル空間 (線型空間)

◎ 係数体 $K=\mathbb{C},\mathbb{R}$
∘ K 上の (抽象的) ベクトル空間 V：
$V\ni\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\ldots$：ベクトル，$K\ni k,l,\ldots$：スカラー
和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\in V$ とスカラー倍 $k\boldsymbol{a}\in V$ $(k\in K)$ が定義され ($\boldsymbol{a}k$ とも書こう)，☆$_1$ ☆$_2$ を満たす．
∘ 計量ベクトル空間：内積 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\in K$ が定義され，☆$_3$ を満たす．注：内積の入れ方は一意的ではない．
∘ 線型写像：(V,W：K 上のベクトル空間)
$T:V\to W$ が定義され，☆$_4$ を満たす．
∘ 基底 $\{\boldsymbol{e}_i\}$：$V\ni{}^\forall\boldsymbol{a}=\sum_i\boldsymbol{e}_ia_i$ と一通りに書かれる．
i が有限個 (n 個) の場合と無限個の場合がある．前者では $V\cong\mathbb{C}^n$．基底を 1 つ決めると，ベクトル ↔ 数ベクトル，線型写像 ↔ 行列．
∘ 様々な概念等は $\mathbb{C}^n$ と同様．(但し無限次元の場合には注意を要するものもある．)
∘ ブラケット記号 (← Dirac による) $\boxed{\text{板書 8}}$
• 部分空間 $W\subset\mathbb{C}^n$ への正射影 P ($P^2=P, P^\dagger=P$)：W の正規直交基底 $|u_1\rangle,\ldots,|u_m\rangle$ $\boxed{\text{板書 9}}$
• 完全性：V の正規直交基底：$|e_1\rangle,|e_2\rangle,\ldots$ $\boxed{\text{板書 10}}$

§ 1.3　直交関数系

◎ 関数空間 ($K=\mathbb{C},\mathbb{R}$)
$V=\{$ 区間 $[a,b]$ 上の複素数値 (実数値) 関数 $\}$ (更にど

んな関数かを指定：連続，微分可能，区分的に連続，区分的に滑らか，等々．）は，和：$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ とスカラー倍：$(kf)(x)=kf(x)$ により無限次元ベクトル空間．$\boxed{\text{板書 11}}$
∘ 内積：重み w の内積 ($w \geq 0$．0 になるのは有限個の点のみ) $\boxed{\text{板書 12}}$
$||f|| < \infty$ となる関数を $L_2(w)$ 関数という ($w=1$ の時，L_2 関数)．$\{\varphi_n(x)\}_{n=0,1,2,\ldots}$ は，$(\varphi_n,\varphi_m)=0$ $(n \neq m)$ の時直交系，$(\varphi_n,\varphi_m)=\delta_{nm}$ の時正規直交系という．
∘ Def. 正規直交系 $\{\varphi_n(x)\}$ が $L_2(w)$ 関数に関して完備 ⇔ 任意の $L_2(w)$ 関数 $f(x)$ に対して $\lim_{N\to\infty}\int_a^b w(x)\left|f(x)-\sum_{n=0}^{N} c_n\varphi_n(x)\right|dx=0$, $c_n=(\varphi_n,f)$．(特に任意の区分的に連続な関数に対してこの式が成立する時，単に完備という．)
Thm. $\{\varphi_n\}$ が完備 ⇔ $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2=||f||^2$ (Parseval の等式)
Thm. $\{\varphi_n\}$ が任意の連続関数に対して完備 ⇒ $\{\varphi_n\}$ は任意の区分的に連続な関数に対しても完備
$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ が全ての $x \in [a,b]$ に対して一様収束するならば，$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ であり，$f(x)$ は $\{\varphi_n\}$ によって展開されるといい，$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ を $f(x)$ の展開という．収束が一様でない場合は $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ と書く．
∘ 完全性
$\{\varphi_n\}$ が内積 $(f,g)=\int dx\overline{f(x)}g(x)$ $(w=1)$ に関して正規直交基底，つまり $^\forall f(x)=\sum_n c_n\varphi_n(x)$, $c_n=(\varphi_n,f)$．
$\boxed{\text{板書 13}}$
ここで $\delta(x)$ は Dirac のデルタ関数 (関数ではなく超関数)．(第 2 部 § 4 で詳しくやるので，ここの議論はそこが終わってから見直してみよ．) $\boxed{\text{板書 14}}$

§ 1.4 直交多項式

◎ Thm. (Weierstrass の近似定理) 区間 $[a,b]$ の任意の連続関数 $f(x)$ はこの区間内で多項式によって一様に近似できる．つまり，任意の $\varepsilon>0$ に対して，$a \leq x \leq b$ なる全ての x に対して，$|f(x)-p(x)|<\varepsilon$ となる多項式 $p(x)$ が存在する．
関数列 $\{1,x,x^2,x^3,\ldots\}$ は完備である．Garm-Schmidt の方法で正規直交化すれば正規直交系．
∘ 直交多項式：$P_n(x)$ (x の n 次式) $\boxed{\text{板書 15}}$
以下の例では P_n は実とする．
また，$P_0(x)=1$, $P_{-1}(x)=0$ とする．
• モニック多項式：最高次の係数が 1.
$P_n(x)=c_nP_n^{\mathrm{monic}}(x)=c_n(x^n+\cdots)$．
$P_0^{\mathrm{monic}}(x)=1$, $P_{-1}^{\mathrm{monic}}(x)=0$ とする．
∘ 3 項関係式
Thm. $\boxed{\text{板書 16}}$
但し a_n $(n \geq 0)$, b_n $(n \geq 1,\ b_n>0)$ は実数．具体的には $a_n=\frac{(xP_n(x),P_n(x))}{(P_n(x),P_n(x))}$, $b_n=\frac{c_{n-1}^2}{c_n^2}\frac{(P_n(x),P_n(x))}{(P_{n-1}(x),P_{n-1}(x))}$, $h_n=(1,1)c_n^2\prod_{j=1}^n b_j$．言い換えると，$\frac{c_n}{c_{n+1}}P_{n+1}(x)-(x-a_n)P_n(x)+b_n\frac{c_n}{c_{n-1}}P_{n-1}(x)=0$ $(n \geq 0)$． $\boxed{\text{板書 17}}$
Thm.(Favard) 逆に，多項式 $\{P_n(x)\}$ が上の 3 項関係式を満たすならば (つまり実数 a_n $(n \geq 0)$, b_n $(n \geq 1,\ b_n>0)$, c_n $(n \geq 0,\ c_n \neq 0)$ が与えられたならば)，$\{P_n(x)\}$ はある (正定値) 内積 $(\cdot,\cdot)$ に関する直交多項式になる． $\boxed{\text{板書 18}}$
∘ Rodrigues の公式：多項式を微分で書く．
例：$[a,b]$ での重み $w(x)=(x-a)^\alpha(b-x)^\beta$ $(\alpha,\beta>-1)$ に関する直交多項式
$P_n(x)=\frac{A_n}{w(x)}\frac{d^n}{dx^n}\big(w(x)(x-a)^n(b-x)^n\big)$ (A_n：定数)．
∘ 微分方程式
上の例では，$\frac{d}{dx}\big((x-a)(b-x)w(x)\frac{dP_n(x)}{dx}\big)+\lambda_n w(x)P_n(x)=0$, $\lambda_n=n(n+1+\alpha+\beta)$：Sturm-Liouville 型微分方程式．書き直すと，$(x-a)(b-x)\frac{d^2P_n(x)}{dx^2}+\big(-(\alpha+\beta+2)x+a(1+\beta)+b(1+\alpha)\big)\frac{dP_n(x)}{dx}+\lambda_nP_n(x)=0$．
∘ 母関数：$P_n(x)$ を個別に扱うのではなく，まとめて取り扱うと便利な事がある．
$G(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n$, $G(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\frac{t^n}{n!}$, 一般に $G(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)g_nt^n$．
∘ 漸化式
$\{P_n\}$ のみ → 3 項関係式．$\{P_n\}$ と $\{P_n'\}$ の関係式など．
◎ § 1 で覚える事 $\boxed{\text{板書 19}}$

§ 2 Hermite の多項式

◎ どこで役立つ？ → $\boxed{\text{板書 1}}$
◎ $\{\boldsymbol{a}_0,\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\ldots\}=\{1,x,x^2,x^3,\ldots\}$ を内積 $(f,g)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\overline{f(x)}g(x)dx$ に関して正規直交化 $\boxed{\text{板書 2}}$
$\boldsymbol{u}_n=\frac{1}{\sqrt{2^nn!\sqrt{\pi}}}H_n(x)$ とおくと，$H_0(x)=1$, $H_1(x)=2x$, $H_2(x)=4x^2-2$, $H_3(x)=8x^3-12x$, ….
$(H_n,H_m)=2^nn!\sqrt{\pi}\delta_{nm}$：Hermite の多項式
◎ 母関数 $\boxed{\text{板書 3}}$
◎ 級数表示 $\boxed{\text{板書 4}}$
◎ Rodrigues の公式 $\boxed{\text{板書 5}}$
◎ 漸化式
- ∘ 3 項関係式 $\boxed{\text{板書 6}}$
- ∘ 微分の漸化式 $\boxed{\text{板書 7}}$

◎ 微分方程式 $\boxed{\text{板書 8}}$
◎ 直交性 $\boxed{\text{板書 9}}$
◎ 偶奇性 $\boxed{\text{板書 10}}$
◎ 多項式を一意的に決める条件
母関数，級数表示，Rodrigues の公式，3 項関係式，微分方程式＋多項式解＋規格化，直交性＋規格化 (位相)．
◎ 証明 (or 説明)：色々な証明を与えよう．
結果を知らなくても導けるものもあれば，結果を知らないと証明し難いものもある．結果を知った上で「結果 ⇒ 仮定」の証明の逆をたどる以外の上手い証明が思い付かない (少なくとも私には) ものについては，「逆にたどれ」と記した．
∘ 母関数 ⇒ 級数表示 ∵ $\boxed{\text{板書 11}}$
∘ 母関数 ⇒ Rodrigues の公式 ∵ $\boxed{\text{板書 12}}$
∘ 母関数 ⇒ 3 項関係式 ∵ $\boxed{\text{板書 13}}$

○ 母関数 ⇒ 微分の漸化式 ∵ 板書 14
○ 母関数 ⇒ 微分方程式 ∵ 板書 15
○ 母関数 ⇒ 直交性 ∵ 板書 16
○ 母関数 ⇒ 偶奇性 ∵ 板書 17
○ 級数表示 ⇒ 母関数 ∵逆をたどれ.
○ 級数表示 ⇒ 3 項関係式 ∵ 板書 18
○ 級数表示 ⇒ 微分の漸化式 ∵ 板書 19
○ 級数表示 ⇒ 微分方程式 ∵ 板書 20
○ 級数表示 ⇒ 偶奇性 ∵ 板書 21
○ Rodrigues の公式 ⇒ 母関数 ∵ 板書 22
○ Rodrigues の公式 ⇒ 級数表示 ∵ 板書 23
○ Rodrigues の公式 ⇒ 3 項関係式 ∵ 板書 24
○ Rodrigues の公式 ⇒ 微分の漸化式 ∵ 板書 25
○ Rodrigues の公式 ⇒ 微分方程式 ∵ 板書 26
○ Rodrigues の公式 ⇒ 直交性 ∵ 板書 27
○ Rodrigues の公式 ⇒ 偶奇性 ∵ 板書 28
○ 3 項関係式 ⇒ 母関数 ∵ 板書 29
○ 3 項関係式 ⇒ 級数表示 ∵逆をたどれ.
○ 3 項関係式 ⇒ 偶奇性 ∵ 板書 30
○ 微分方程式 ⇒ 母関数 板書 31
○ 微分方程式 ⇒ 級数表示 ∵ 板書 32
○ 微分方程式 ⇒ 直交性 ($\propto \delta_{nm}$ のみ) ∵ 板書 33
○ 微分方程式 ⇒ 偶奇性 板書 34
○ 直交性 ⇒ 母関数 ∵逆をたどれ.
○ 例えば，級数表示を直交性の式に入れると，
$n+m$ が偶数の場合に，
$\displaystyle\sum_{r=0}^{[\frac{n}{2}]}\sum_{s=0}^{[\frac{m}{2}]}(-1)^{r+s}\frac{n!\,m!\,(n+m-2r-2s)!}{r!\,s!\,(n-2r)!\,(m-2s)!\,(\frac{n+m}{2}-r-s)!}$
$=2^n n!\,\delta_{nm}$ という恒等式が得られる.
◎ 積分表示 板書 35
◎ 完全性 板書 36
◎ 生成・消滅演算子：n を上げ下げ
$\phi_n(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x)$ 板書 37
◎ 調和振動子の量子力学 板書 38
◎ § 2 で覚える事 板書 39

§ 3　Legendre の多項式と球面調和関数

◎ どこで役立つ？ → 板書 1

§ 3.1　Legendre の多項式

◎ $\{\boldsymbol{a}_0,\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\ldots\}=\{1,x,x^2,x^3,\ldots\}$ を内積 $(f,g)=\int_{-1}^{1}\overline{f(x)}g(x)dx$ に関して正規直交化 板書 2
$\boldsymbol{u}_n=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(x)$ とおくと，$P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$, $P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$, $P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$, ….
$(P_n,P_m)=\frac{2}{2n+1}\,\delta_{nm}$：Legendre の多項式
◎ 母関数
$G(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n=\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}$ ($|t|<1$)
教科書に従いこれを出発点にする.
◎ 級数表示
$P_n(x)=\sum_{r=0}^{[\frac{n}{2}]}\frac{(-1)^r(2n-2r)!}{2^n r!\,(n-r)!\,(n-2r)!}x^{n-2r}$
$=\frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}x^n+\cdots$ ∵[p.78]
$P_n(-x)=(-1)^nP_n(x)$
◎ Rodrigues の公式
$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ ∵[p.81]
◎ 漸化式
○ 3 項関係式 ($n\geq 0$)
$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0$
つまり，$a_n=0$, $b_n=\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}$, $c_n=\frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}$
∵[p.82]
○ 微分の漸化式 ($n\geq 0$)
$\bigl((1-x^2)\frac{d}{dx}-(n+1)x\bigr)P_n(x)=-(n+1)P_{n+1}(x)$
$\bigl((1-x^2)\frac{d}{dx}+nx\bigr)P_n(x)=nP_{n-1}(x)$ ∵[p.82]
◎ 微分方程式 (Legendre の微分方程式)
$\bigl((1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}-2x\frac{d}{dx}+n(n+1)\bigr)P_n(x)=0$ ∵[p.82]
◎ 直交性
$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=\frac{2}{2n+1}\,\delta_{nm}$ ∵[p.83]
◎ 完全性
$\{P_n\}$：$(f,g)=\int_{-1}^{1}\overline{f(x)}g(x)dx$ に関する完全直交系.
$[-1,1]$ 上の任意の関数 f は $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nP_n(x)$, $c_n=\frac{2n+1}{2}(P_n,f)$
◎ 応用：点電荷の作る電位 板書 3

§ 3.2　球面調和関数

◎ Legendre の陪関数 板書 4
○ 微分方程式
$\bigl((1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}-2x\frac{d}{dx}+l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\bigr)P_l^m(x)=0$
○ 母関数 ($m\geq 0$)
$\frac{(2m-1)!!\,(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\,t^m}{(1-2xt+t^2)^{\frac{1}{2}+m}}=\sum_{l=m}^{\infty}P_l^m(x)t^l$ ($|t|\leq 1$)
○ 直交性
$\int_{-1}^{1}P_l^m(x)P_{l'}^m(x)dx=\frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\,\delta_{ll'}$
◎ 球面調和関数 板書 5
$Y_{l,-m}(\theta,\varphi)=(-1)^mY_{lm}(\theta,\varphi)^*$
$Y_{lm}(\pi-\theta,\varphi+\pi)=(-1)^lY_{lm}(\theta,\varphi)$
○ 直交性
$\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi Y_{lm}(\theta,\varphi)^*Y_{l'm'}(\theta,\varphi)=\delta_{ll'}\delta_{mm'}$
◎ 軌道角運動量 板書 6
◎ § 3 で覚える事 板書 7

§ 4　Laguerre の多項式

◎ どこで役立つ？ → 板書 1
◎ $\{\boldsymbol{a}_0,\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\ldots\}=\{1,x,x^2,x^3,\ldots\}$ を内積 $(f,g)=\int_0^{\infty}x^{\alpha}e^{-x}\overline{f(x)}g(x)dx$ ($\alpha>-1$) に関して正規直交化 板書 2
$\boldsymbol{u}_n=(-1)^n\sqrt{\frac{n!}{\Gamma(\alpha+n+1)}}L_n^{(\alpha)}(x)$ とおくと，$L_0^{(\alpha)}(x)=1$, $L_1^{(\alpha)}(x)=-x+\alpha+1$, $L_2^{(\alpha)}(x)=\frac{1}{2}x^2-(\alpha+2)x+\frac{1}{2}(\alpha+1)(\alpha+2)$, ….
$(L_n^{(\alpha)},L_m^{(\alpha)})=\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!}\,\delta_{nm}$：Laguerre の多項式
◎ 母関数
$G(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}L_n^{(\alpha)}(x)t^n=\frac{e^{\frac{xt}{t-1}}}{(1-t)^{\alpha+1}}$ ($|t|<1$)
注：$L_n^{(\alpha)}(x)$ を Sonine の多項式と呼ぶ事もある．$L_n(x)\stackrel{\mathrm{def}}{=}L_n^{(0)}(x)$ を Laguerre の多項式と呼んで，$L_n^{(\alpha)}(x)$ を Laguerre の陪多項式と呼ぶ事もある．教科書とは定義が異なる．$L_n^{(m)}(x)=(-1)^m\frac{d^m}{dx^m}L_{n+m}(x)$ ($m=$

$0, 1, 2, \ldots)$ である．

◎ 級数表示

$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum\limits_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n+\alpha}{n-r}\frac{x^r}{r!} = \frac{(-1)^n}{n!}x^n + \cdots$

◎ Rodrigues の公式

$L_n^{(\alpha)} = x^{-\alpha}e^x\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\big(x^{\alpha+n}e^{-x}\big)$

◎ 漸化式

∘ 3 項関係式 $(n \geq 0)$

$(n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x) + \big(x - (2n+\alpha+1)\big)L_n^{(\alpha)}(x)$
$\quad +(n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x) = 0.$

つまり，$a_n = 2n+1+\alpha$, $b_n = n(n+\alpha)$, $c_n = \frac{(-1)^n}{n!}$.

∘ 微分の漸化式 $(n \geq 0)$

• $(x\frac{d}{dx} + \alpha + n + 1 - x)L_n^{(\alpha)}(x) = (n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x)$,
$(x\frac{d}{dx} - n)L_n^{(\alpha)}(x) = -(n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x)$.

• $(x\frac{d}{dx} + \alpha - x)L_n^{(\alpha)}(x) = (n+1)L_{n+1}^{(\alpha-1)}(x)$,
$\frac{d}{dx}L_n^{(\alpha)}(x) = -L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)$.

◎ 微分方程式

$\big(x\frac{d^2}{dx^2} + (\alpha+1-x)\frac{d}{dx} + n\big)L_n^{(\alpha)}(x) = 0$

◎ 直交性

$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x}L_n^{(\alpha)}(x)L_m^{(\alpha)}(x)dx = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!}\delta_{nm}$

◎ 完全性

$\{L_n^{(\alpha)}(x)\}$：完全直交系.

◎ 水素型原子の量子力学 $\boxed{\text{板書 3}}$

◎ § 4 で覚える事 $\boxed{\text{板書 4}}$

§ 5　他の直交多項式

§ 5.1　Jacobi の多項式

◎ $\{\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \ldots\} = \{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ を内積 $(f, g) = \int_{-1}^{1}(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\overline{f(x)}g(x)dx$ $(\alpha, \beta > -1)$ に関して正規直交化 $\boxed{\text{板書 1}}$

$\boldsymbol{u}_n = \sqrt{\frac{\alpha+\beta+2n+1}{2^{\alpha+\beta+1}}\frac{n!\,\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ とおくと，$P_0^{(\alpha,\beta)}(x) = 1$, $P_1^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2}((\alpha+\beta+2)x+\alpha-\beta)$, $\ldots$.

$(P_n^{(\alpha,\beta)}, P_m^{(\alpha,\beta)}) = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{\alpha+\beta+2n+1}\frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}\delta_{nm}$

：Jacobi の多項式

◎ 母関数 $(R = \sqrt{1-2xt+t^2})$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)t^n = \frac{2^{\alpha+\beta}}{R(1+R-t)^\alpha(1+R+t)^\beta}$

◎ 級数表示

$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum\limits_{r=0}^{n}\binom{\alpha+n}{n-r}\binom{\alpha+\beta+n+r}{r}2^{-r}(x-1)^r$
$\quad = 2^{-n}\binom{\alpha+\beta+2n}{n}x^n + \cdots$

◎ Rodrigues の公式

$P_n^{(\alpha,\beta)} = (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{(-1)^n}{2^n n!}$
$\quad \frac{d^n}{dx^n}\big((1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\big)$

$P_n^{(\alpha,\beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(x)$

◎ 漸化式

∘ 3 項関係式 $(n \geq 0)$

$2(n+1)(\alpha+\beta+n+1)(\alpha+\beta+2n)P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) - (\alpha+\beta+2n+1)\big((\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+2)x+\alpha^2-\beta^2\big)P_n^{(\alpha,\beta)}(x) + 2(\alpha+n)(\beta+n)(\alpha+\beta+2n+2)P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x) = 0$

つまり，$a_n = \frac{\beta^2-\alpha^2}{d_{2n}d_{2n+2}}$, $b_n = 4n(n+\alpha)(n+\beta)\times\frac{d_n}{d_{2n-1}d_{2n}^2d_{2n+1}}$, $c_n = 2^{-n}\binom{\alpha+\beta+2n}{n}$, $d_m = \alpha+\beta+m$.

◎ 微分方程式

$\big((1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} + \big(\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x\big)\frac{d}{dx}$
$\quad +n(n+\alpha+\beta+1)\big)P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = 0$

◎ 直交性

$\int_{-1}^{1}(1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(x)P_m^{(\alpha,\beta)}(x)dx$
$\quad = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{\alpha+\beta+2n+1}\frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}\delta_{nm}$

◎ 完全性

$\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}$ 完全直交系

◎ 特別な場合

∘ Gegenbauer の多項式

$C_n^{(\alpha+\frac{1}{2})}(x) = \binom{2\alpha+n}{n}\binom{\alpha+n}{n}^{-1}P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$

∘ 第 1 種の Chebyshev の多項式

$T_n(x) = \binom{n-\frac{1}{2}}{n}^{-1}P_n^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(x)$

∘ 第 2 種の Chebyshev の多項式

$U_n(x) = (n+1)\binom{n+\frac{1}{2}}{n}^{-1}P_n^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(x)$

∘ Legendre の多項式 $P_n(x) = P_n^{(0,0)}(x)$

§ 5.2　Sturm-Liouville 型微分方程式

◎ $f = f(x)$.　$p(x), q(x)$：実関数.　$w(x) \geq 0$

$\boxed{\text{板書 2}}$　(cf. 変分法 [p.40])

λ が特別な値 ($\rightarrow$ 固有値) の時のみ解がある．

$\boxed{\text{板書 3}}$

§ 5.3　Askey スキーム

◎ 直交多項式 Hermite, Laguerre, Jacobi (及び Gegenbauere,Chebyshev, Legendre) (これらを古典直交多項式という) は超幾何関数 ${}_rF_s$ と関係している．

$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!}{}_2F_1\left(\begin{smallmatrix}-n, n+\alpha+\beta+1\\ \alpha+1\end{smallmatrix}\,\middle|\,\frac{1-x}{2}\right)$

$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!}{}_1F_1\left(\begin{smallmatrix}-n\\ \alpha+1\end{smallmatrix}\,\middle|\,x\right)$

$H_n(x) = (2x)^n{}_2F_0\left(\begin{smallmatrix}-\frac{n}{2}, -\frac{n-1}{2}\\ -\end{smallmatrix}\,\middle|\,-\frac{1}{x^2}\right)$

◎ 超幾何直交多項式の Askey スキーム $\boxed{\text{板書 4}}$

◎ 極限

∘ Jacobi $\rightarrow$ Laguerre

$\lim\limits_{\beta\to\infty}P_n^{(\alpha,\beta)}(1-\frac{2x}{\beta}) = L_n^{(\alpha)}(x)$

∘ Laguerre $\rightarrow$ Hermite

$\lim\limits_{\alpha\to\infty}(\frac{2}{\alpha})^{\frac{n}{2}}L_n^{(\alpha)}(\sqrt{2\alpha}x+\alpha) = \frac{(-1)^n}{n!}H_n(x)$

∘ Jacobi $\rightarrow$ Hermite

$\lim\limits_{\alpha\to\infty}\alpha^{-\frac{n}{2}}P_n^{(\alpha,\alpha)}(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}) = \frac{1}{2^n n!}H_n(x)$

◎ § 5 で覚える事 $\boxed{\text{板書 5}}$

§ 6　超幾何関数

◎ 超幾何微分方程式 (Gauss の微分方程式)

(物理数学 II 第 2 部 §6 でやった話)

$y = y(x)$ (x は複素数でよい)

$\boxed{\text{板書 1}}$　a, b, c：定数

確定特異点：$x = 0, 1, \infty$

∘ $x = 0$ における解 ($c \notin \mathbb{Z}$ の時)　$\boxed{\text{板書 2}}$

∘ $x = 1$ における解

$x = 1-\xi$ とおくと，$\xi = 1-x$, $\frac{d}{dx} = \frac{d\xi}{dx}\frac{d}{d\xi} = -\frac{d}{d\xi}$ より

$\xi(1-\xi)\frac{d^2y}{d\xi^2} + (a+b+1-c-(1+a+b)\xi)\frac{dy}{d\xi} - aby = 0.$

これは $a' = a$, $b' = b$, $c' = a+b+1-c$ の超幾何微分方程式.

$a+b-c \notin \mathbb{Z}$ の時，一般解は $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$,

$y_1(x) = F(a, b\,; a+b+1-c\,; 1-x)$,

$y_2(x) = (1-x)^{c-a-b}F(c-a, c-b\,; c-a-b+1\,; 1-x)$.

∘ $x = \infty$ における解

$x = \frac{1}{\xi}$ とおくと，$\xi = \frac{1}{x}$, $\frac{d}{dx} = \frac{d\xi}{dx}\frac{d}{d\xi} = -\xi^2\frac{d}{d\xi}$ より

$\xi^2(1-\xi)\frac{d^2y}{d\xi^2}+(a+b-1+(2-c)\xi)\frac{dy}{d\xi}-aby=0.$
$\xi=0$ での指数は $-\lambda(\lambda-1)+(a+b-1)\lambda-ab=0$ より $\lambda=a,b.$ $y=\xi^a u(\xi)$ とおくと，方程式は $\xi(1-\xi)\frac{d^2u}{d\xi^2}+(a-b+1-(2a-c+2)\xi)\frac{du}{d\xi}-a(a-c+1)u=0.$
これは $a'=a,\ b'=a-c+1,\ c'=a-b+1$ の超幾何微分方程式.
$a-b\notin\mathbb{Z}$ の時，一般解は $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$,
$y_1(x)=x^{-a}F(a,a-c+1\,;a-b+1\,;\frac{1}{x})$,
$y_2(x)=x^{-b}F(b,b-c+1\,;b-a+1\,;\frac{1}{x})$.
○ $F(a,b\,;c\,;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{x^n}{n!}$ で色々な関数が表せる
$(1+x)^n=F(-n,c\,;c\,;-x)$,
$\log(1+x)=xF(1,1\,;2\,;-x)$
$\sin^{-1}x=xF(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\,;\frac{3}{2}\,;x^2)$,
$\tan^{-1}x=xF(\frac{1}{2},1\,;\frac{3}{2}\,;-x^2)$
$\exp x=\lim_{a\to\infty}F(a,1\,;1\,;\frac{x}{a})$ など
◎ 合流型超幾何微分方程式
超幾何微分方程式 (確定特異点は $x=0,1,\infty$) で $x=\frac{t}{b}$ とおくと，$\frac{t}{b}(1-\frac{t}{b})b^2\frac{d^2y}{dt^2}+(c-(1+a+b)\frac{t}{b})b\frac{dy}{dt}-aby=0$ となる (確定特異点は $t=0,b,\infty$). これを b で割ってから $b\to\infty$ の極限を取り，t を改めて x と書くと，
$xy''+(c-x)y'-ay=0$：合流型超幾何微分方程式.
確定特異点は $x=0$，不確定特異点は $x=\infty$.
○ $x=0$ における解 ($c\notin\mathbb{Z}_{\leq 0}$ の時) 板書 3
一般解は $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$,
$y_1(x)=F(a\,;c\,;x),\ y_2(x)=x^{1-c}F(a-c+1\,;2-c\,;x)$.
◎ 一般化
○ 超幾何級数
${}_rF_s\left(\begin{smallmatrix}a_1,\cdots,a_r\\ b_1,\cdots,b_s\end{smallmatrix}\,\middle|\,x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1,\cdots,a_r)_n}{(b_1,\cdots,b_s)_n}\frac{x^n}{n!}$
$(a_1,\cdots,a_r)_n=(a_1)_n\cdots(a_r)_n$
• 色々な関数が ${}_rF_s$ で表される：
$(1-x)^{-a}={}_1F_0\left(\begin{smallmatrix}a\\ -\end{smallmatrix}\,\middle|\,x\right)\quad(|x|<1)$
$\exp x={}_0F_0\left(\begin{smallmatrix}-\\ -\end{smallmatrix}\,\middle|\,x\right)$
$\sin x=x\,{}_0F_1\left(\begin{smallmatrix}-\\ \frac{3}{2}\end{smallmatrix}\,\middle|\,-\frac{x^2}{4}\right)$
$\cos x={}_0F_1\left(\begin{smallmatrix}-\\ \frac{1}{2}\end{smallmatrix}\,\middle|\,-\frac{x^2}{4}\right)$
$J_\nu(x)=\frac{(\frac{1}{2}x)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}{}_0F_1\left(\begin{smallmatrix}-\\ \nu+1\end{smallmatrix}\,\middle|\,-\frac{x^2}{4}\right)$ (§ 7 参照)
○ q-超幾何級数
$0<q<1$ とする (が，より一般に複素数も可)
${}_r\phi_s\left(\begin{smallmatrix}a_1,\cdots,a_r\\ b_1,\cdots,b_s\end{smallmatrix}\,\middle|\,q\,;x\right)$
$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1,\cdots,a_r\,;q)_n}{(b_1,\cdots,b_s\,;q)_n}(-1)^{(1+s-r)n}q^{(1+s-r)\binom{n}{2}}\frac{x^n}{(q\,;q)_n}$
$(a_1,\cdots,a_r\,;q)_n=(a_1\,;q)_n\cdots(a_r\,;q)_n$
$(a\,;q)_n=\prod_{k=0}^{n-1}(1-aq^k)=(1-a)(1-aq)\cdots(1-aq^{n-1})$
• 極限
$\lim_{q\nearrow 1}{}_r\phi_s\left(\begin{smallmatrix}q^{a_1},\cdots,q^{a_r}\\ q^{b_1},\cdots,q^{b_s}\end{smallmatrix}\,\middle|\,q\,;(q-1)^{1+s-r}x\right)$
$={}_rF_s\left(\begin{smallmatrix}a_1,\cdots,a_r\\ b_1,\cdots,b_s\end{smallmatrix}\,\middle|\,x\right)$
◎ § 6 で覚える事 板書 4

§ 7 Bessel 関数

◎ どこで役立つ？ → 板書 1
◎ 整数次の Bessel 関数
○ 母関数 $G(t,x)=e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)t^n$
○ 級数表示 $J_n(x)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s!\,\Gamma(n+s+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}\ (n\in\mathbb{Z})$
☺ 板書 2 収束半径 ∞
• $J_n(-x)=(-1)^nJ_n(x)$
• $J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x)$ ☺ 板書 3
$J_n(x)$ と $J_{-n}(x)$ は一次従属
○ 積分表示 $J_n(x)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\cos(x\sin\theta-n\theta)$
☺ 板書 4
◎ 一般の次数の Bessel 関数
$n\in\mathbb{Z}$ では $J_n(x)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s!\,\Gamma(n+s+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}$
これは $n\in\mathbb{Z}$ でなくても意味がある.
板書 5 収束半径 ∞
$\nu\notin\mathbb{Z}$ では $J_\nu(x)$ と $J_{-\nu}(x)$ は一次独立
○ 漸化式
$\frac{2\nu}{x}J_\nu(x)=J_{\nu+1}(x)+J_{\nu-1}(x)$
$(\frac{d}{dx}-\frac{\nu}{x})J_\nu(x)=-J_{\nu+1}(x)$
$(\frac{d}{dx}+\frac{\nu}{x})J_\nu(x)=J_{\nu-1}(x)$
○ 微分方程式 (Bessel の微分方程式) 板書 6
◎ $y''+\frac{1}{x}y'+(1-\frac{\nu^2}{x^2})y=0$
板書 7
$\nu\notin\mathbb{Z}$ の時 $y(x)=c_1J_\nu(x)+c_2J_{-\nu}(x)$
• Neumann 関数 $N_\nu(x)=\frac{J_\nu(x)\cos\pi\nu-J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu}$
ν 任意で $y(x)=c_1J_\nu(x)+c_2N_\nu(x)$
• Hankel 関数 $H_\nu^{(1)}(x)=J_\nu(x)+iN_\nu(x)$
$H_\nu^{(2)}(x)=J_\nu(x)-iN_\nu(x)$
ν 任意で $y(x)=c_1H_\nu^{(1)}(x)+c_2H_\nu^{(2)}(x)$
○ これらを円柱関数という.
○ 漸近展開
x 大で $J_\nu(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4})$ など
◎ 波動方程式 板書 8
◎ 仲間達
○ 変形 Bessel 関数 $x\to ix$
$y''+\frac{1}{x}y'-(1+\frac{\nu^2}{x^2})y=0$
$I_\nu(x)=e^{-\frac{\pi i}{2}\nu}J_\nu(e^{\frac{\pi i}{2}}x)$ など
○ 球 Bessel 関数
$y''+\frac{2}{x}y'+(1-\frac{n(n+1)}{x^2})y=0$
$j_n(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{n+\frac{1}{2}}(x)$
$n_n(x)=(-1)^{n+1}\sqrt{\frac{\pi}{2x}}J_{-n-\frac{1}{2}}(x)$ など
◎ § 7 で覚える事 板書 9

第 2 部：Fourier 解析

Fourier 解析：様々な計算に対する必需品

§ 1 Fourier 級数

◎ $\{1,\cos nx,\sin nx\ (n=1,2,\ldots)\}$ は，$[-\pi,\pi]$ において内積 $(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi}\overline{f(x)}g(x)dx$ に関して，直交関数系.
板書 1
◎ $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\ (n=1,2,\ldots)\}$ は正規直交系. 板書 2
◎ 実は基底である！
Def. $f(x)$ は $[a,b]$ で区分的に連続 ⇔ 区間 $[a,b]$ を $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ なる有限個の点

$x_1, \ldots, x_{n-1}$ で有限個の小区間に分けた時，各区間内で連続，かつ各区間の端点で有限確定した右または左極限 ($\lim_{x \to x_{i-1}+0} f(x) = f(x_{i-1}+0)$, $\lim_{x \to x_i - 0} f(x) = f(x_i - 0)$ $(i = 1, \cdots, n)$) が存在する．(注：不連続点 x_i での値は何でもよい)

Def. $f(x)$ は $[a, b]$ で区分的に滑らか $\Leftrightarrow$ $f(x)$ と $f'(x)$ が $[a, b]$ で区分的に連続

Def. $[-\pi, \pi]$ 上の積分可能な関数 $f(x)$ に対して，$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ を $f(x)$ の Fourier 級数，$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$ $(n \geq 0)$，$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$ $(n \geq 1)$ を $f(x)$ の Fourier 係数という．

Thm. $f(x)$ が $[-\pi, \pi]$ で区分的に滑らかならば，$f(x)$ の Fourier 級数は，$-\pi < x < \pi$ で $f(x)$ の不連続点 x_r $(r = 1, \ldots, n-1)$ を除いた区間で $f(x)$ に一様に収束する．端点では $\frac{1}{2}(f(-\pi+0) + f(\pi-0))$ に，不連続点では $\frac{1}{2}(f(x_r - 0) + f(x_r + 0))$ に収束する．

板書 3

∘ この Fourier 級数は $-\infty < x < \infty$ に対して周期 2π の周期関数を与えている．$[-\pi, \pi]$ で定義された $f(x)$ も周期 2π の周期関数として定義域を $-\infty < x < \infty$ に拡張しよう．不連続点 x_r では $\frac{1}{2}(f(x_r - 0) + f(x_r + 0))$ と定義しておけば，$-\infty < x < \infty$ において

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$.

◎ 例・$f(x) = |x|$ $(-\pi \leq x \leq \pi)$ 板書 4

・$f(x) = x$ $(-\pi \leq x \leq \pi)$ 板書 5

◎ $\int_{-\pi}^{\pi}(\text{奇関数})dx = 0$

$[-\pi, \pi]$ で $f(x)$ が偶関数 $\Rightarrow$ $b_n = 0$

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ ：Fourier 余弦展開

$[-\pi, \pi]$ で $f(x)$ が奇関数 $\Rightarrow$ $a_n = 0$

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ ：Fourier 正弦展開

∘ $[0, \pi]$ で定義された $f(x)$ を $[-\pi, \pi]$ に拡張． 板書 6

∘ 例：$f(x) = x^2$ $(0 \leq x \leq \pi)$ 板書 7

◎ 周期 $2L$ の関数を扱いたければ，$[a, a+2L]$ で，

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos \frac{n\pi}{L}x + b_n \sin \frac{n\pi}{L}x)$

$a_n = \frac{1}{L}\int_a^{a+2L} f(x) \cos \frac{n\pi}{L}x \, dx$ $(n \geq 0)$

$b_n = \frac{1}{L}\int_a^{a+2L} f(x) \sin \frac{n\pi}{L}x \, dx$ $(n \geq 1)$

◎ Thm. (Riemann-Lebesgue の定理) $f(x)$：$[-\pi, \pi]$ で区分的に連続 $\Rightarrow$ $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = 0$

Thm. $f^{(r)}(x)$ $(r = 0, 1, \ldots, p-1)$ が $[-\pi, \pi]$ で連続で，$f^{(r)}(-\pi) = f^{(r)}(\pi)$ $(r = 0, 1, \ldots, p-1)$ を満たし，$f^{(p)}(x)$ が区分的に滑らか $\Rightarrow$ a_n, b_n は $O(\frac{1}{n^{p+1}})$

∘ Thm.(項別微分) $f(x)$ が周期 2π の周期関数として連続で，$f'(x)$ が区分的に連続 $\Rightarrow$ $f(x)$ の Fourier 級数を項別に微分して得られる級数は収束し，$f'(x)$ の Fourier 級数に一致．　(注：周期関数としての $f(x)$ が不連続の場合には，項別微分による級数は収束せず，$f'(x)$ の Fourier 級数に一致しない．)

• 例：$f(x) = x^2$ $(-\pi \leq x \leq \pi)$ 板書 8

注の例：$f(x) = x$ $(-\pi \leq x \leq \pi)$ 板書 9

• 項別微分できる時

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-na_n \sin nx + nb_n \cos nx)$ 板書 10

∘ Thm.(項別積分) 2 乗可積分な関数 $f(x)$ の Fourier 級数 (収束しなくても構わない) は，項別に積分できて，得られた級数は一様に $f(x)$ の積分に収束する．

• 例：$f(x) = x$ $(-\pi \leq x \leq \pi)$ 板書 11

• 項別積分できる時

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

$\int_\alpha^x f(x')dx' = \frac{a_0}{2}(x - \alpha) + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n \frac{1}{n}(\sin nx - \sin n\alpha) + b_n \frac{-1}{n}(\cos nx - \cos n\alpha)\big)$ 板書 12

◎ 指数関数型の Fourier 級数

$e^{\pm inx} = \cos x \pm i \sin nx$

$\{1, \cos nx, \sin nx\ (n = 1, 2, \ldots)\}$ の代わりに $\{e^{inx}\ (n \in \mathbb{Z})\}$. 板書 13

実関数 $f(x)$ に対しては，$a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $c_{-n} = \bar{c}_n$.

∘ $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$

項別微分できる時：$f'(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} inc_n e^{inx}$ 板書 14

項別積分できる時：

$\int_\alpha^x f(x')dx' = c_0(x - \alpha) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{c_n}{in}(e^{inx} - e^{in\alpha})$

板書 15

∘ 例：$f(x) = x$ $(-\pi \leq x \leq \pi)$ 板書 16

∘ 周期 2π の周期関数 f と g のたたみ込み $f*g$ 板書 17

◎ Parseval の等式

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$.

$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \pi\big(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\big) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$.

例 板書 18

◎ もう一つ例 板書 19

◎ § 1 で覚える事 板書 20

§ 2　Fourier 変換

周期関数 → Fourier 級数．非周期関数 → どうする？

周期 $2L$ の周期関数 $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{L}x}$

$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{-i\frac{n\pi}{L}x}$ 板書 1

◎ もう少し真面目に

Thm.(Riemann-Lebesgue の定理) $f(x)$ が $-\infty < x < \infty$ で絶対積分可能 ($\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ が有限値) $\Rightarrow$ $\lim_{\lambda \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \cos \lambda x = \lim_{\lambda \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \sin \lambda x = 0$.

Thm.(Dirichlet の積分定理) 有限区間 $[-a, a]$ で区分的に滑らかな関数 $f(x)$ に対して，$\lim_{\lambda \to \infty} \int_{-a}^{a} dx f(x) \frac{\sin \lambda x}{x} = \frac{\pi}{2}\big(f(+0) + f(-0)\big)$．同じ事だが，

Thm.(Fourier の単積分定理) 任意の有限区間で区分的に滑らかで，$(-\infty, \infty)$ で絶対積分可能な $f(x)$ に対して，$\lim_{\lambda \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \frac{\sin \lambda(x-y)}{x-y} = \frac{\pi}{2}\big(f(y+0) + f(y-0)\big)$.

$\frac{\sin \lambda(x-y)}{x-y} = \int_0^\lambda dk \cos k(x-y)$ を代入し積分の順序を入れ換えて，

Thm.(Fourier の重積分定理) 直前の定理の $f(x)$ に対して，$\int_0^\infty dk\int_{-\infty}^\infty dx f(x)\cos k(x-y)=\frac{\pi}{2}\big(f(y+0)+f(y-0)\big)$．書き直すと
$\int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty dy f(y)e^{ik(x-y)}=\frac{1}{2}\big(f(x+0)+f(x-0)\big)$.
◎ 任意の有限区間で区分的に滑らかで，$(-\infty,\infty)$ で絶対積分可能な関数 $f(x)$ に対して， $\boxed{\text{板書 2}}$
対称的になる様に定義する事も多い：

$$\begin{cases} \mathscr{F}[f](k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty dx\, e^{-ikx}f(x) \\ \mathscr{F}^{-1}[F](k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty dk\, e^{ikx}F(k) \end{cases}$$

$\boxed{\text{板書 3}}$

◎ 例・$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2d} & (|x|\le d)\\ 0 & (|x|>d)\end{cases}$ $(d>0)$ $\boxed{\text{板書 4}}$

・$f(x)=e^{-a|x|}$ $(a>0)$ $\boxed{\text{板書 5}}$

・$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ $(\sigma>0)$ $\boxed{\text{板書 6}}$

◎ $\tilde{f}(k)=\int_{-\infty}^\infty dx\, e^{-ikx}f(x)$
$f(x)$ が偶関数の時．$\tilde{f}(k)$ も偶関数.
$F_c(k)=\int_0^\infty dx\cos kx\, f(x)$：Fourier 余弦変換
$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty dk\cos kx\, F_c(k)$
$f(x)$ が奇関数の時．$\tilde{f}(k)$ も奇関数.
$F_s(k)=\int_0^\infty dx\sin kx\, f(x)$：Fourier 正弦変換
$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty dk\sin kx\, F_s(k)$
◎ Fourier 変換の性質 $\mathscr{F}[f](k)=\tilde{f}(k)$

	$f(x)$	$\tilde{f}(k)=\int_{-\infty}^\infty dx\, e^{-ikx}f(x)$
(1)	$af(x)+bg(x)$	$a\tilde{f}(k)+b\tilde{g}(k)$ 線型性 (重ね合わせの原理)
(2)	$f(x+a)$	$e^{ika}\tilde{f}(k)$
(3)	$f(ax)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}\tilde{f}(\frac{k}{a})$
(4)	$e^{iax}f(x)$	$\tilde{f}(k-a)$
(5)	$\overline{f(x)}$	$\overline{\tilde{f}(-k)}$
(6)	$\tilde{f}(x)$	$2\pi f(-k)$
(7)	$x^nf(x)$	$i^n\tilde{f}^{(n)}(k)$
(8)	$f^{(n)}(x)$	$(ik)^n\tilde{f}(k)$
(9)	$(f*g)(x)$	$\tilde{f}(k)\tilde{g}(k)$

(7) では $x^nf(x)$ は $(-\infty,\infty)$ で絶対可積分とする．
$\boxed{\text{板書 7}}$
(7)(8) は微分と積分の順序を入れ替えられるという事．
$\boxed{\text{板書 8}}$
◎ Parseval の等式
$\int_{-\infty}^\infty dx f(-x)g(x)=\int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{2\pi}\tilde{f}(k)\tilde{g}(k)$ $\boxed{\text{板書 9}}$
$\int_{-\infty}^\infty dx\overline{f(x)}g(x)=\int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{2\pi}\overline{\tilde{f}(k)}\tilde{g}(k)$ $\boxed{\text{板書 10}}$
$\int_{-\infty}^\infty dx|f(x)|^2=\int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{2\pi}|\tilde{f}(k)|^2$ ∵上で $g=f$. □

∘ 例：$f_d(x)=\begin{cases}\frac{1}{2d} & (|x|\le d)\\ 0 & (|x|>d)\end{cases}$ $(d>0)$ $\boxed{\text{板書 11}}$

◎ Poisson の和公式
$|f(x)|$ が $-\infty<x<\infty$ で積分可能，連続，有界変動で，$x\to\pm\infty$ の時単調に 0 に収束するならば，正の定数 α に対して，$\alpha\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{2\pi int}f(\alpha n)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\tilde{f}(\frac{2\pi}{\alpha}(n+t))$.
特に $t=0$ では $\alpha\sum_{n\in\mathbb{Z}}f(\alpha n)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\tilde{f}(\frac{2\pi}{\alpha}n)$.
但し $\tilde{f}(k)=\int_{-\infty}^\infty dxe^{-ikx}f(x)$.
∘ 例：$f(x)=e^{-\frac{1}{2}ax^2}$ (Re $a>0$) $\boxed{\text{板書 12}}$
◎ § 2 で覚える事 $\boxed{\text{板書 13}}$

§ 3 Laplace 変換

◎ Laplace 変換
$f(t)$ が $(0,\infty)$ で定義され, 複素数 $s=\sigma+i\tau$ に対して, $F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt\Big(=\lim_{\varepsilon\to+0}\lim_{T\to\infty}\int_\varepsilon^T e^{-st}f(t)dt\Big)$ が存在する時，$F(s)$ を $f(t)$ の Laplace 変換といい，$\mathscr{L}[f]$ と書く．この積分が $s=s_0$ で収束すれば，$F(s)$ は $\mathrm{Re}\, s>\mathrm{Re}\, s_0$ なる全ての s に対して収束する．$F(s)$ が $\mathrm{Re}\, s>a$ で存在する様な実数 a の下限を Laplace 変換 $F(s)$ の収束座標という.
Thm.(存在定理) $(0,\infty)$ で定義された関数 $f(x)$ が, 任意の有限区間で区分的に滑らかでかつ指数位の関数 (十分大きな t に対して $|f(t)|<Me^{\alpha t}$ を満たす実定数 M,α が存在するという事) である時，$\mathrm{Re}\, s$ の十分大きな値に対して $\mathscr{L}[f](s)=F(s)$ が存在し，$\lim_{s\to\infty}F(s)=0$ となる.
∘ 例：$\boxed{\text{板書 1}}$
∘ Laplace 変換，逆 Laplace 変換について様々な公式がある．例えば
Thm.(反転公式) $f(t)$ と $f'(t)$ が $(0,\infty)$ で区分的に滑らかで, $\mathscr{L}[f]=F(s)$ が存在する時, $\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{st}F(s)ds=\frac{1}{2}\big(f(t+0)+f(t-0)\big)$ が成立する．積分路は，複素 s 平面で $s=\sigma\in\mathbb{R}$ を通り虚軸に平行な直線で，σ は $F(s)$ の全ての特異点が積分路の左に来る様なもの.
◎ § 3 で覚える事 $\boxed{\text{板書 2}}$

§ 4 デルタ関数

点粒子をどう扱うか.
◎ Dirac のデルタ関数
Kronecker のデルタ：$\delta_{nm}=\begin{cases}1 & (n=m)\\ 0 & (n\ne m)\end{cases}$
$\sum_m\delta_{nm}f_m=f_n$, 特に $\sum_m\delta_{nm}=1$.
連続版 $\boxed{\text{板書 1}}$
この式を定義とする．つまり $\delta(x)$ は積分して初めて意味があるものである．Schwartz の超関数 (distribution)．別の定義として佐藤の超関数 (hyperfunction) があり，解析関数の境界値として定義する：$\delta(x)=\frac{1}{2\pi i}\big(\frac{1}{x-i\varepsilon}-\frac{1}{x+i\varepsilon}\big)$.
◎ 超関数
任意の「良い関数」(例えば $|x|\to\infty$ で x の任意の多項式より速く 0 に収束し，何回でも微分できる関数) $\phi(x)$ に対して，$\int_{-\infty}^\infty f(x)\phi(x)dx$ が有限となる $f(x)$ を超関数と定義する．2 つの超関数 $f(x)$ と $g(x)$ が等しい $f(x)=g(x)$ とは，任意の「良い関数」$\phi(x)$ に対して $\int_{-\infty}^\infty f(x)\phi(x)dx=\int_{-\infty}^\infty g(x)\phi(x)dx$ となる事.
∘ 例：階段関数 (Heaviside 関数) $\boxed{\text{板書 2}}$
◎ 超関数の Fourier 変換
良い関数 $\tilde{\phi}(k)$ に対して $\mathscr{F}[\tilde{\phi}]$ も良い関数になるので，$f(x)$ が $|x|\to\infty$ で多項式程度に発散していても，$\int_{-\infty}^\infty f(x)\mathcal{F}[\tilde{\phi}](x)dx$ は収束する． $\boxed{\text{板書 3}}$
つまり $\int_{-\infty}^\infty dx f(x)\mathscr{F}[\tilde{\phi}](x)=\int_{-\infty}^\infty dk\mathscr{F}[f](k)\tilde{\phi}(k)$ で $f(x)$ の Fourier 変換 $\mathscr{F}[f](k)=\tilde{f}(k)$ が定義される.
同様に，良い関数 $\phi(x)$ に対して $\tilde{f}(k)$ が $|k|\to\infty$ で多項式程度に発散していても，$\int_{-\infty}^\infty\frac{dk}{2\pi}\tilde{f}(x)\mathscr{F}^{-1}[\phi](k)$ は収束する． $\boxed{\text{板書 4}}$

つまり $\int_{-\infty}^{\infty} dk\tilde{f}(k)\mathscr{F}^{-1}[\phi](k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\mathscr{F}^{-1}[\tilde{f}](x)\phi(x)$ で $\tilde{f}(k)$ の Fourier 逆変換 $\mathscr{F}^{-1}[\tilde{f}](x) = f(x)$ が定義される．
普通の関数に対する Fourier 変換の性質は，超関数に対する Fourier 変換に対しても成立する．
∘ 例：デルタ関数の Fourier 変換 $\boxed{\text{板書 5}}$
◎ デルタ関数の性質 $\boxed{\text{板書 6}}$
◎ 関数の極限としてのデルタ関数
正のパラメータ $\varepsilon > 0$. 良い関数 $\phi(x)$ に対して，$\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\varepsilon)\phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)$. $f(x,\varepsilon)$ の極限が超関数 $f(x)$ を定義する．
例 $\boxed{\text{板書 7}}$
注：上の (2)(3) は $\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}e^{ikx}$ に収束因子をつけて得られる． $\boxed{\text{板書 8}}$
◎ 点電荷の作る電位，電場
$\boxed{\text{板書 9}}$
物理数学 I でやった事：(i) $\vec{r} \neq \vec{0}$ で $\triangle\phi = 0$ ($\Rightarrow \vec{r} = \vec{0}$ ではどうなっているか？) (ii) S : 閉曲面，$\int_S \frac{\vec{r}}{r^3}\cdot d\vec{S} = \begin{cases} 0 & (\text{原点 O が } S \text{ の外}) \\ 4\pi & (\text{原点 O が } S \text{ の内}) \end{cases}$. $\boxed{\text{板書 10}}$
◎ § 4 で覚える事 $\boxed{\text{板書 11}}$

§ 5　偏微分方程式

◎ 偏微分方程式：2 つ以上の独立変数の未知関数の偏導関数を含む方程式.
　最高階の偏導関数の階数をその方程式の階数と言う．未知関数及びその偏導関数について 1 次式の時は線型，最高階の偏導関数について 1 次式の時は準線型と言う．
　独立変数の個数に等しい任意定数を含む解を完全解，任意関数を含む解を一般解，一般解の一つの場合を特殊解と言う．これらに含まれない解があれば特異解と言う．
例 $u = u(x,y)$ ・$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = 0$ の一般解 $\boxed{\text{板書 1}}$
・$x\frac{\partial u}{\partial x} - 2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0$ の完全解 (の 1 つ) $\boxed{\text{板書 2}}$
∘ 線型　$Lu = 0$ (例 $L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$)
u_1, u_2 が解なら，$c_1u_1 + c_2u_2$ も解 (c_1, c_2：定数)[重ね合わせの原理]
◎ 2 階の偏微分方程式
∘ 2 変数 $u = u(x,y)$ $\boxed{\text{板書 3}}$
∘ n 変数 $u = u(x_1,\dots,x_n)$
$\sum\limits_{j,k=1}^{n} a_{jk}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_k} + (\text{2 階微分を含まない項}) = 0$. $a_{jk} = a_{kj}$ は $x_1,\dots,x_n$ の実関数．$A = (a_{jk})$ の固有値 (実数である) が，$\begin{cases} \text{正と負がある} & \to & \text{双曲型} \\ \text{0 がある} & \to & \text{放物型} \\ \text{全て同符号} & \to & \text{楕円型} \end{cases}$.
◎ 偏微分方程式の一般論はこの位にして，上に挙げた例 (波動方程式，拡散方程式，Helmholtz 方程式・Laplace 方程式) を順次見て行く．これらの方程式を考える際には，その物理的意味合いから，初期条件や境界条件が課される事になる．波動方程式や拡散方程式では初期条件と境界条件を与える混合問題，Helmholtz 方程式・Laplace 方程式では境界条件を与える境界値問題が通常考えられる．
∘ 境界条件として，u の値を与える (Dirichlet 境界条件)，u の (法線方向の) 微分を与える (Neumann 境界条件)，混合型 (一部で D，一部で N).
◎ § 5 で覚える事 $\boxed{\text{板書 4}}$

§ 6　波動方程式

◎ 弦の振動
垂直方向に振動．線密度 ρ_0．張力 T_0 で引っ張る．$\boxed{\text{板書 1}}$
◎ 一次元の場合　$u = u(x,t)$, $\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
∘ D'Alembert の解 $\boxed{\text{板書 2}}$
∘ 初期値問題 (Cauchy 問題)
初期条件：$t = 0$ で $\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$. $\boxed{\text{板書 3}}$
∘ 混合問題
• 例：波の反射．$x \geq 0$ のみとする．
$t = 0$ で $\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$ (初期条件),
$x = 0$ で $u(0,t) = 0$ (Dirichlet 境界条件).
$f(x), g(x)$ は $x \geq 0$ でのみ定義されている． $\boxed{\text{板書 4}}$
$\begin{cases} f(-x) = -f(x) \\ g(-x) = -g(x) \end{cases}$ $(x \geq 0)$ として $f(x), g(x)$ の定義を $x < 0$ まで拡張すると，この式は OK. $\boxed{\text{板書 5}}$
• 例：上の例で，
$x = 0$ で $u_x(0,t) = 0$ (Neumann 境界条件). $\boxed{\text{板書 6}}$
$\begin{cases} f(-x) = f(x) \\ g(-x) = g(x) \end{cases}$ $(x \geq 0)$ として $f(x), g(x)$ の定義を $x < 0$ まで拡張すると，この式は OK. $\boxed{\text{板書 7}}$
• 例：両端固定．$0 \leq x \leq L$ のみとする．
$t = 0$ で $\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$ (初期条件),
$x = 0, L$ で $\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{cases}$ (Dirichlet 境界条件).
$f(x), g(x)$ は $0 \leq x \leq L$ でのみ定義されている．$\boxed{\text{板書 8}}$
$f(x), g(x)$ を周期 $2L$ の周期関数として定義域を拡張すると，この式は OK.
◎ Fourier 解析を用いる解法
$u = u(x,t)$, $\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
∘ 変数分離法 $\boxed{\text{板書 9}}$
∘ $0 \leq x \leq L$ として，境界条件 $\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{cases}$ を課す．
$T(t) = 0$ は自明な解なので，以下 $T(t) \neq 0$ とする．$\boxed{\text{板書 10}}$
∘ u_n を重ね合わせても解 $\Rightarrow u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\omega_n t + B_n\sin\omega_n t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x$, ($\omega_n = c\frac{n\pi}{L}$).
つまり Fourier 級数！初めから次の様にすればよい．
$u(x,t)$ $(0 \leq x \leq L)$ を $u(0,t) = u(L,t) = 0$ に注意して Fourier 級数に展開する． $\boxed{\text{板書 11}}$
初期条件 $\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$ を課すと，
$f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n\sin\frac{n\pi}{L}x$, $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n\omega_n\sin\frac{n\pi}{L}x$
$\Rightarrow A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$,

$B_n = \frac{2}{L\omega_n}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$.　p.139 参照

∘ 無限区間 $-\infty < x < \infty$．初期条件 $\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$.

(先程と同様に変数分離で特解を求めてそれを重ね合わせてもよい．)

$u(x,t)$ を x について Fourier 変換して，$\boxed{板書\ 12}$

◎ 3 次元の場合　$u = u(\vec{x},t)$, $\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \triangle u$

初期条件 $\begin{cases} u(\vec{x},0) = f(\vec{x}) \\ u_t(\vec{x},0) = g(\vec{x}) \end{cases}$.

∘ 有限領域：$0 \le x,y,z \le L$

境界条件：端 $(x,y,z = 0,L)$ で $u = 0$.　$\boxed{板書\ 13}$

∘ 無限領域

境界条件：遠方 $(|\vec{x}| = \infty)$ で $u = 0$.　$\boxed{板書\ 14}$

◎ こんな解き方もある．$\boxed{板書\ 15}$

◎ § 6 で覚える事 $\boxed{板書\ 16}$

§ 7　拡散方程式

◎ 棒の熱伝導

温度 $u(x,t)$，断面積 S，密度 ρ，比熱 C，熱伝導率 λ. $\boxed{板書\ 1}$

◎ 一次元の場合　$u = u(x,t)$, $\dfrac{1}{\kappa}\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

初期条件 $u(x,0) = f(x)$

∘ 有限領域：$0 \le x \le 2L$

境界条件：$u(2L,t) = u(0,t)$ (周期的境界条件).

変数分離 $\boxed{板書\ 2}$　$X(x+2L) = X(x)$ となる様に定義域を拡げておこう．$\boxed{板書\ 3}$

または初めから，$u(2L,t) = u(0,t)$ に注意して，$u(x,t)$ を x に関して Fourier 級数に展開して，$\boxed{板書\ 4}$

初期条件：$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi}{L}x + B_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right)$

$\Rightarrow A_n = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx$ $(n = 0,1,2,\ldots)$,

$B_n = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$ $(n = 1,2,\ldots)$.

∘ 無限領域：$-\infty < x < \infty$.

境界条件：$|x| \to \infty$ で $u \to$ 有界.

(先程と同様に変数分離で特解を求めてそれを重ね合わせてもよい．)

$u(x,t)$ を x について Fourier 変換して，$\boxed{板書\ 5}$

◎ こんな解き方もある．$\boxed{板書\ 6}$

◎ § 7 で覚える事 $\boxed{板書\ 7}$

§ 8　Helmholtz 方程式

◎ $u = u(\vec{x})$

$(\triangle + k^2)u = 0$ Helmholtz 方程式

$k = 0$ の時 $\triangle u = 0$ Laplace 方程式

例 $\boxed{板書\ 1}$

◎ 2 次元空間の Laplace 方程式

$u = u(x,y)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

例：長方形領域 $(0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b)$

境界条件 $\begin{cases} u(0,y) = 0 \\ u(a,y) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u(x,b) = 0 \end{cases}$ (Dirichlet 型)

変数分離 $\boxed{板書\ 2}$

または初めから，$u(0,y) = u(a,y) = 0$ に注意して，$u(x,y)$ を x に関して Fourier 級数に展開して，$\boxed{板書\ 3}$

これが $u(x,0) = f(x)$ を満たすには,

$f(x) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n\sinh k_n b\sin\frac{n\pi}{a}x$ (これは Fourier 正弦展開) $\Rightarrow B_n = -\frac{2}{a\sinh k_n b}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx$

◎ 2 次元空間の波動方程式

$u = u(x,y,t)$, $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

例：長方形の太鼓 $(0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b)$

境界条件 $\begin{cases} u(0,y,t) = 0 \\ u(a,y,t) = 0 \\ u(x,0,t) = 0 \\ u(x,b,t) = 0 \end{cases}$ (Dirichlet 型)

初期条件 $\begin{cases} u(x,y,0) = f(x,y) \\ u_t(x,y,0) = g(x,y) \end{cases}$

変数分離 $\boxed{板書\ 4}$

または初めから，$u(0,y,t) = u(a,y,t) = 0$, $u(x,0,t) = u(x,b,t) = 0$ に注意して，$u(x,y,t)$ を x,y に関して Fourier 級数に展開して，$\boxed{板書\ 5}$

初期条件：$f(x,y) = \sum\limits_{n,m=1}^{\infty} a_{nm}\sin\frac{n\pi}{a}x\,\sin\frac{m\pi}{b}y$,

$g(x,y) = \sum\limits_{n,m=1}^{\infty} b_{nm}\omega_{nm}\sin\frac{n\pi}{a}x\,\sin\frac{m\pi}{b}y$

(これは Fourier 正弦展開)

$\Rightarrow a_{nm} = \frac{2}{a}\frac{2}{b}\int_0^a dx\int_0^b dy f(x,y)\sin\frac{n\pi}{a}x\,\sin\frac{m\pi}{b}y$,

$b_{nm} = \frac{1}{\omega_{nm}}\frac{2}{a}\frac{2}{b}\int_0^a dx\int_0^b dy\,g(x,y)\sin\frac{n\pi}{a}x\,\sin\frac{m\pi}{b}y$.

$\boxed{板書\ 6}$

◎ § 8 で覚える事 $\boxed{板書\ 7}$

§ 9　Green 関数

◎ 2 変数で説明．$u = u(x,y)$

線型偏微分方程式 $Lu(x,y) = f(x,y)$ 及び適当な境界条件．($L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y2}$ など．$f(x,y)$ は既知関数)

$G(x,y;x',y')$：Green 関数

$\begin{cases} LG(x,y;x',y') = -\delta(x-x')\delta(y-y') \\ \text{境界条件} \end{cases}$

境界条件無しのものを演算子 L に対する主要解と言う．

並進不変性があれば，$LG(x,y) = -\delta(x)\delta(y)$ を考えればよい：$G(x,y;x',y') = G(x-x',y-y')$.

∘ $Lu = f$ の解は,

$u(x,y) = -\int dx'dy' G(x,y;x',y')f(x',y')$

$+ (Lu = 0$ の解).　$\boxed{板書\ 1}$

∘ $Lu = 0$ 及び境界条件

完全系 $\{\varphi_n\}$ ：$L\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$

$G(x,y;x',y') = -\sum\limits_n \frac{1}{\lambda_n}\varphi_n(x,y)\varphi_n(x',y')^*$ $\boxed{板書\ 2}$

◎ 主要解

∘ Helmholtz 方程式：$(\triangle + k^2)G(\vec{x}) = -\delta(\vec{x})$

n 次元．$k > 0$ $\boxed{板書\ 3}$

$k \to 0$ とすると Laplace 方程式：$\triangle G(\vec{x}) = -\delta(\vec{x})$. $\boxed{板書\ 4}$

∘ 拡散方程式：$(\triangle - \frac{1}{\kappa}\frac{\partial}{\partial t})G(\vec{x},t) = -\delta(\vec{x})\delta(t)$

空間 n 次元

遅延条件：$G(\vec{x},t) = 0$ $(t < 0)$ $\boxed{板書\ 5}$

∘ 波動方程式：$(\triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})G(\vec{x},t) = -\delta(\vec{x})\delta(t)$

空間 n 次元

遅延条件：$G(\vec{x}, t) = 0 \ (t < 0)$ $\boxed{\text{板書 6}}$
◎ § 9 で覚える事 $\boxed{\text{板書 7}}$