物理数学 III (小竹)　授業促進のためのノート [ver.2.0.6]

全部板書したいところであるが，時間が不足する事と，説明を聞いてもらうために，板書の一部を配布する．$\boxed{\text{板書}}$ と書いた部分では板書するので書き写す様に．このノートを見れば話の順序が分かるので予習に役立ててもらいたい．十分な予習と徹底的な復習をする事．このノートは重要な事柄をまとめたものではない．ミスプリを見つけたら連絡して下さい．
以前のもの (ver.1) よりも内容を減らしたので，より詳しく知りたければ ver.1 を見よ．

準教科書 (←これに沿って進む訳ではない)
・「物理のための応用数学」
小野寺 嘉孝 著，裳華房 (1988 年)
・理工系の数学入門コース 6「フーリエ解析」
大石 進一 著，岩波書店 (1989 年)
参考書
・「物理数学」
佐々木 隆 著，培風館 (1996 年)
・理工系の基礎数学 6「フーリエ解析」
福田礼次郎 著，岩波書店 (1997 年)
・「詳解物理応用数学演習」
後藤憲一・山本邦夫・神吉健 共編，共立出版 (1979 年)
を挙げておくが，数多くの本が出版されているので，本屋や図書館で分かり易そうな本を見つけたらそれを使えばよい。

第 1 部：特殊関数

特殊関数：量子力学，境界値問題等において様々な関数が必要となる．
心構え：基本的な概念を理解し，どの様な関数があるのかを知っておく事！ 個々の関数の細かい性質は覚えきれないし，覚える必要もない．その様な関数を使う必要が生じた時に，参考書・公式集を見れば良いのである．(どの本のどの辺りを見れば良いかがさっと思い出せる位に勉強してもらいたい．また，覚える必要がないとは書いたが，Hermite の多項式についてはある程度覚える様に．)　本によって関数の定義が異なる事があるので，注意する事．

§ 1　直交関数系と直交多項式

§ 1.1　n 次元数ベクトル

◎ $\mathbb{C}^n \ni \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$，$a_i \in \mathbb{C}$．$\mathbb{R}^n$ も同様．
○ 和とスカラー倍：$\boxed{\text{板書 1}}$　8 つの性質 ☆$_1$, ☆$_2$
○ 内積：$\boxed{\text{板書 2}}$　4 つの性質 ☆$_3$．ノルム：$||\boldsymbol{a}|| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$
◎ 線型写像：$T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$　線型性 ☆$_4$
基底を 1 つ決めると
$T \leftrightarrow A = (a_{ij}) = (\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ ：$m \times n$ 行列 $\boxed{\text{板書 3}}$
○ 行列の演算：和，スカラー倍，積，ダガー $\boxed{\text{板書 4}}$
◎ 基底 $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i=1,\ldots,n}$
${}^\forall \boldsymbol{a} \in \mathbb{C}^n$, ${}^{\exists_1} a_1, \ldots, a_n$, s.t. $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{e}_n$.
○ 完全性：$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$ として，$\sum_i \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i^\dagger = \mathrm{id}$.
○ 自然基底：$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\ldots$, $\boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.
$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}$：正規直交基底
$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{e}_i$　ここで $a_i = (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{a})$
$\boxed{\text{板書 5}}$
○ 部分空間 $W \subset \mathbb{C}^n$ への正射影 P ($P^2 = P, P^\dagger = P$)：W の正規直交基底 $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m$，$(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) = \delta_{ij}$ $\boxed{\text{板書 6}}$
○ Gram-Schmidt の正規直交化法：
一次独立な $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m \in \mathbb{C}^n$ に対して，$L[\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_j] = L[\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_j]$ ($j = 1, \ldots, m$) となる様に，正規直交系 $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ を作る手順．$\boxed{\text{板書 7}}$

§ 1.2　ベクトル空間 (線型空間)

◎ 抽象化
和 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ とスカラー倍 $k\boldsymbol{a}$：8 つの公理 (☆$_1$ ☆$_2$).
内積 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$：4 つの公理 (☆$_3$).
注：内積の入れ方は一意的ではない．
○ $V = C([a, b]) = \{$ 区間 $[a, b]$ 上の連続関数 $\}$ $\boxed{\text{板書 8}}$
○ ブラケット記号 $\boxed{\text{板書 9}}$

§ 1.3　直交関数系

◎ 関数空間 $V = \{$ 区間 $[a, b]$ 上の○○関数 $\}$ (○○は色々な条件)
○ 重み w の内積 ($w \geq 0$) $\boxed{\text{板書 10}}$
$||f|| < \infty$ となる関数を $L_2(w)$ 関数という ($w = 1$ の時，L_2 関数).
○ $\{\varphi_n(x)\}_{n=0,1,2,\ldots}$ が正規直交系 $\Leftrightarrow$ $(\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{nm}$.
○ 完全性
$\{\varphi_n\}$ が重み 1 の内積に関して正規直交 '基底' (つまり ${}^\forall f(x) = \sum_n c_n \varphi_n(x)$, $c_n = (\varphi_n, f)$) $\boxed{\text{板書 11}}$

§ 1.4　直交多項式

◎ Thm. (Weierstrass の近似定理) 区間 $[a, b]$ の任意の連続関数 $f(x)$ はこの区間内で多項式によって一様に近似できる．つまり，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$a \leq x \leq b$ なる全ての x に対して，$|f(x) - p(x)| < \varepsilon$ となる多項式 $p(x)$ が存在する．
関数列 $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ は完備であり，Garm-Schmidt の方法で正規直交化すれば正規直交系が得られる．
○ 直交多項式：$\{P_n(x)\}_{n=0,1,2,\ldots}$　($P_n(x)$ は x の n 次式) $\boxed{\text{板書 12}}$
以下の例では P_n は実とする．
また，$P_0(x) = 1$, $P_{-1}(x) = 0$ とする．
○ 色々な性質
・3 項関係式 $\boxed{\text{板書 13}}$ 逆に，多項式 $\{P_n(x)\}_{n=0,1,2,\ldots}$ がこの 3 項関係式を満たすならば，$\{P_n(x)\}$ はある内積に関する直交多項式になる．
・Rodrigues の公式：多項式を微分で表す．
・微分方程式
・母関数：$P_n(x)$ を個別に扱うのではなく，まとめて取

り扱うと便利な事がある.
・漸化式
◎ § 1 で覚える事 $\boxed{板書\ 14}$

§ 2 Hermite の多項式

◎ どこで役立つ？ → $\boxed{板書\ 1}$
◎ $\{\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \ldots\} = \{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ を内積 $(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \overline{f(x)} g(x) dx$ に関して正規直交化 $\boxed{板書\ 2}$
$\boldsymbol{u}_n = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x)$ とおくと，$H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$, $H_3(x) = 8x^3 - 12x$, ...
$(H_n, H_m) = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nm}$: Hermite の多項式
◎ 母関数 $\boxed{板書\ 3}$ を出発点にしよう.
∘ 級数表示 $\boxed{板書\ 4}$
∘ Rodrigues の公式 $\boxed{板書\ 5}$
∘ 漸化式
　・3 項関係式 $\boxed{板書\ 6}$
　・微分の漸化式 $\boxed{板書\ 7}$
∘ 微分方程式 $\boxed{板書\ 8}$
∘ 直交性 $\boxed{板書\ 9}$
∘ 偶奇性 $\boxed{板書\ 10}$
◎ 直交性 (別の観点から) $\boxed{板書\ 11}$
◎ 生成・消滅演算子 : n を上げ下げ $\boxed{板書\ 12}$
◎ 調和振動子の量子力学 → §7 が終わってから
◎ § 2 で覚える事 $\boxed{板書\ 13}$

§ 3 Legendre の多項式と球面調和関数

◎ どこで役立つ？ → $\boxed{板書\ 1}$

§ 3.1 Legendre の多項式

◎ $\{\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \ldots\} = \{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ を内積 $(f,g) = \int_{-1}^{1} \overline{f(x)} g(x) dx$ に関して正規直交化 $\boxed{板書\ 2}$
$\boldsymbol{u}_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x)$ とおくと，$P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$, $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$, ...
$(P_n, P_m) = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}$: Legendre の多項式
◎ 母関数 $\boxed{板書\ 3}$ を出発点にしよう.
∘ 級数表示 $\boxed{板書\ 4}$
∘ Rodrigues の公式 $\boxed{板書\ 5}$
∘ 漸化式
・3 項関係式 $(n \geq 0)$ $\boxed{板書\ 6}$
・微分の漸化式 $(n \geq 0)$ $\boxed{板書\ 7}$
∘ 微分方程式 (Legendre の微分方程式) $\boxed{板書\ 8}$
∘ 直交性 $\boxed{板書\ 9}$
∘ 偶奇性 $\boxed{板書\ 10}$
◎ 応用 : 点電荷の作る電位 $\boxed{板書\ 11}$

§ 3.2 球面調和関数

◎ Legendre の陪関数 $\boxed{板書\ 12}$
∘ 微分方程式
$\left((1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx} + l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right) P_l^m(x) = 0$
∘ 母関数 $(m \geq 0)$
$\frac{(2m-1)!!\,(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\,t^m}{(1-2xt+t^2)^{\frac{1}{2}+m}} = \sum_{l=m}^{\infty} P_l^m(x) t^l \ (|t| \leq 1)$
∘ 直交性
$\int_{-1}^{1} P_l^m(x) P_{l'}^m(x) dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll'}$
◎ 球面調和関数 $\boxed{板書\ 13}$
$Y_{l,-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{lm}(\theta, \varphi)^*$
$Y_{lm}(\pi - \theta, \varphi + \pi) = (-1)^l Y_{lm}(\theta, \varphi)$
∘ 直交性
$\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi Y_{lm}(\theta, \varphi)^* Y_{l'm'}(\theta, \varphi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$
◎ 軌道角運動量 $\boxed{板書\ 14}$
◎ § 3 で覚える事 $\boxed{板書\ 15}$

§ 4 Laguerre の多項式

◎ どこで役立つ？ → $\boxed{板書\ 1}$
◎ $\{\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \ldots\} = \{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ を内積 $(f,g) = \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} \overline{f(x)} g(x) dx$ $(\alpha > -1)$ に関して正規直交化 $\boxed{板書\ 2}$
$\boldsymbol{u}_n = (-1)^n \sqrt{\frac{n!}{\Gamma(\alpha+n+1)}} L_n^{(\alpha)}(x)$ とおくと，$L_0^{(\alpha)}(x) = 1$, $L_1^{(\alpha)}(x) = -x + \alpha + 1$, $L_2^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{2}x^2 - (\alpha+2)x + \frac{1}{2}(\alpha+1)(\alpha+2)$, ...
$(L_n^{(\alpha)}, L_m^{(\alpha)}) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!} \delta_{nm}$: Laguerre の多項式
◎ 母関数
$G(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) t^n = \frac{e^{\frac{xt}{t-1}}}{(1-t)^{\alpha+1}} \ (|t| < 1)$
注 : 準教科書とは定義が異なる.
∘ 級数表示
$L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n+\alpha}{n-r} \frac{x^r}{r!} = \frac{(-1)^n}{n!} x^n + \cdots$
∘ Rodrigues の公式
$L_n^{(\alpha)} = x^{-\alpha} e^x \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^{\alpha+n} e^{-x}\right)$
∘ 漸化式
・3 項関係式 $(n \geq 0)$
$(n+1) L_{n+1}^{(\alpha)}(x) + \big(x - (2n+\alpha+1)\big) L_n^{(\alpha)}(x)$
　$+ (n+\alpha) L_{n-1}^{(\alpha)}(x) = 0.$
・微分の漸化式 $(n \geq 0)$
　$(x\frac{d}{dx} + \alpha + n + 1 - x) L_n^{(\alpha)}(x) = (n+1) L_{n+1}^{(\alpha)}(x)$,
　$(x\frac{d}{dx} - n) L_n^{(\alpha)}(x) = -(n+\alpha) L_{n-1}^{(\alpha)}(x)$.
　$(x\frac{d}{dx} + \alpha - x) L_n^{(\alpha)}(x) = (n+1) L_{n+1}^{(\alpha-1)}(x)$,
　$\frac{d}{dx} L_n^{(\alpha)}(x) = -L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)$.
∘ 微分方程式
$\left(x\frac{d^2}{dx^2} + (\alpha + 1 - x)\frac{d}{dx} + n\right) L_n^{(\alpha)}(x) = 0$
∘ 直交性
$\int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} L_n^{(\alpha)}(x) L_m^{(\alpha)}(x) dx = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!} \delta_{nm}$
◎ 水素型原子の量子力学 → §7 が終わってから
◎ § 4 で覚える事 $\boxed{板書\ 3}$

§ 5 他の直交多項式

§ 5.1 Jacobi の多項式

◎ $\{\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \ldots\} = \{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$ を内積 $(f,g) = \int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} \overline{f(x)} g(x) dx$ $(\alpha, \beta > -1)$ に関して正規直交化→ Jacobi の多項式 $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$.
2 階の微分方程式を満たす.
Legendre の多項式 $P_n(x) = P_n^{(0,0)}(x)$.

§ 5.2 Sturm-Liouville 型微分方程式

◎ $f = f(x)$. $p(x), q(x)$: 実関数. $w(x) \geq 0$
$\boxed{板書\ 1}$
λ が特別な値 (→ 固有値) の時のみ解がある.

板書 2

§ 5.3　Askey スキーム

◎ 直交多項式 Hermite, Laguerre, Jacobi は超幾何関数 ${}_rF_s$ と関係している．

$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\,{}_2F_1\Bigl(\begin{smallmatrix}-n,\,n+\alpha+\beta+1\\ \alpha+1\end{smallmatrix}\Bigm|\frac{1-x}{2}\Bigr)$

$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\,{}_1F_1\Bigl(\begin{smallmatrix}-n\\ \alpha+1\end{smallmatrix}\Bigm|x\Bigr)$

$H_n(x) = (2x)^n\,{}_2F_0\Bigl(\begin{smallmatrix}-\frac{n}{2},\,-\frac{n-1}{2}\\ -\end{smallmatrix}\Bigm|-\frac{1}{x^2}\Bigr)$

◎ 超幾何直交多項式の Askey スキーム：様々な直交多項式が超幾何関数の観点から分類される．

§ 5.4　新しいタイプの直交多項式

$\{P_n(x)\}$ が 0 次式からではなく，ℓ 次式 ($\ell \in \mathbb{Z}_{>0}$) から始まる直交多項式が，量子力学模型の研究から最近見い出された。完全系をなし，2 階の微分方程式を満たす。

- 例外直交多項式 ($\ell = 1$: 2008 年，ℓ 一般 : 2009 年) : $\{P_{\ell,n}(x)\}_{n=0,1,\dots}$ は $\ell + n$ 次式。
- 多添字直交多項式 (2011 年) : $\{P_{\mathcal{D},n}(x)\}_{n=0,1,\dots}$ ($\mathcal{D} = \{d_1,\dots,d_M\}$) は $\ell + n$ 次式 (ℓ は $\mathcal{D}$ で定まる)。

◎ § 5 で覚える事 板書 3

§ 6　超幾何関数

◎ 超幾何微分方程式 (Gauss の微分方程式)

(物理数学 II 第 2 部 §6 でやった話)

$y = y(x)$ (x は複素数でよい)

板書 1　a, b, c : 定数

確定特異点 : $x = 0, 1, \infty$

○ $x = 0$ における解 ($c \notin \mathbb{Z}$ の時)　板書 2

○ $x = 1$ における解 : $x = 1 - \xi$ とおくと，超幾何で書ける．

○ $x = \infty$ における解 : $x = \frac{1}{\xi}$ とおくと，超幾何で書ける．

○ $F(a, b\,; c\,; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!}$ で色々な関数が表せる

$(1 + x)^n = F(-n, c\,; c\,; -x)$,

$\log(1 + x) = xF(1, 1\,; 2\,; -x)$

$\sin^{-1} x = xF(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\,; \frac{3}{2}\,; x^2)$,

$\tan^{-1} x = xF(\frac{1}{2}, 1\,; \frac{3}{2}\,; -x^2)$

$\exp x = \lim_{a\to\infty} F(a, 1\,; 1\,; \frac{x}{a})$ など

◎ 合流型超幾何微分方程式

$xy'' + (c - x)y' - ay = 0$

確定特異点は $x = 0$，不確定特異点は $x = \infty$.

◎ § 6 で覚える事 板書 3

§ 7　Bessel 関数

◎ どこで役立つ？ → 板書 1

◎ 整数次の Bessel 関数

○ 母関数　$G(t, x) = e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n$

○ 級数表示　板書 2 収束半径 ∞

$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ となるので $J_n(x)$ と $J_{-n}(x)$ は一次従属．

◎ 一般の次数の Bessel 関数

上の級数表示は $n \in \mathbb{Z}$ でなくても意味がある．そこで ν 一般で 板書 3　収束半径 ∞

$\nu \notin \mathbb{Z}$ では $J_\nu(x)$ と $J_{-\nu}(x)$ は一次独立

○ 漸化式

$\frac{2\nu}{x} J_\nu(x) = J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x)$

$(\frac{d}{dx} - \frac{\nu}{x}) J_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x)$

$(\frac{d}{dx} + \frac{\nu}{x}) J_\nu(x) = J_{\nu-1}(x)$

○ 微分方程式 (Bessel の微分方程式)　板書 4

◎ $y'' + \frac{1}{x}y' + (1 - \frac{\nu^2}{x^2})y = 0$

板書 5

- Neumann 関数 $N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\pi\nu - J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu}$
- Hankel 関数 $H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x)$
  $H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x)$
- $\nu \notin \mathbb{Z}$ の時 $y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x)$
  ν 任意で $y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 N_\nu(x)$
  $y(x) = c_1 H_\nu^{(1)}(x) + c_2 H_\nu^{(2)}(x)$

これらを円柱関数という．

◎ 波動方程式　板書 6

◎ 仲間達 : 変形 Bessel 関数，球 Bessel 関数

◎ § 7 で覚える事 板書 7

第 2 部 : Fourier 解析

Fourier 解析 : 様々な計算に対する必需品

§ 1　Fourier 級数

◎ $\{1, \cos nx, \sin nx\ (n = 1, 2, \dots)\}$ は，$[-\pi, \pi]$ において内積 $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} g(x) dx$ に関して，直交関数系．

板書 1

◎ $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx\ (n = 1, 2, \dots)\}$ は正規直交系．　板書 2

◎ 実はこれらは完全系である！(“基底” である！)

Thm. $f(x)$ が $[-\pi, \pi]$ で区分的に滑らかならば 板書 3 : Fourier 級数．$-\pi < x < \pi$ で $f(x)$ の不連続点 x_r ($r = 1, \dots, n-1$) を除いた区間で $f(x)$ に一様に収束する．端点では $\frac{1}{2}(f(-\pi+0) + f(\pi-0))$ に，不連続点 x_r では $\frac{1}{2}(f(x_r - 0) + f(x_r + 0))$ に収束する．

この Fourier 級数は $-\infty < x < \infty$ に対して周期 2π の周期関数を与えている．

◎ 例・$f(x) = |x|$ ($-\pi \le x \le \pi$) 板書 4

・$f(x) = x$ ($-\pi \le x \le \pi$) 板書 5

◎ $\int_{-\pi}^{\pi}$(奇関数)$dx = 0$

$[-\pi, \pi]$ で $f(x)$ が偶関数 ⇒ $b_n = 0$

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$　: Fourier 余弦展開

$[-\pi, \pi]$ で $f(x)$ が奇関数 ⇒ $a_n = 0$

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$　: Fourier 正弦展開

○ $[0, \pi]$ で定義された $f(x)$ を $[-\pi, \pi]$ に拡張．　板書 6

○ 例 : $f(x) = x^2$ ($0 \le x \le \pi$)　板書 7

◎ 周期 $2L$ の関数を扱いたければ，$[a, a + 2L]$ で，

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos\frac{n\pi}{L}x + b_n \sin\frac{n\pi}{L}x)$

$a_n = \frac{1}{L}\int_a^{a+2L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx$ ($n \ge 0$)

$b_n = \frac{1}{L}\int_a^{a+2L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$ ($n \ge 1$)

◎ 項別微分と項別積分

○ 項別微分 : $f(x)$ が周期 2π の周期関数として連続で，$f'(x)$ が区分的に連続なら OK.

- 例 : $f(x) = x^2$ ($-\pi \le x \le \pi$)　板書 8
  ダメな例 : $f(x) = x$ ($-\pi \le x \le \pi$)　板書 9

○ 項別積分：$f(x)$ が区分的に連続なら OK ($f(x)$ の Fourier 級数が収束していなくてもよい).
● 例：$f(x)=x\ (-\pi\le x\le\pi)$ $\boxed{\text{板書 10}}$
◎ 指数関数型の Fourier 級数
$e^{\pm inx}=\cos nx\pm i\sin nx$
$\{1,\cos nx,\sin nx\ (n=1,2,\ldots)\}$ の代わりに $\{e^{inx}\ (n\in\mathbb{Z})\}$. $\boxed{\text{板書 11}}$
○ 例：$f(x)=x\ (-\pi\le x\le\pi)$ $\boxed{\text{板書 12}}$
○ 周期 2π の周期関数 f と g のたたみ込み $f*g$ $\boxed{\text{板書 13}}$
◎ Parseval の等式 (f 実としておく)

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)^2dx=\pi\Big(\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\Big)=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2.$$

例 $\boxed{\text{板書 14}}$
◎ § 1 で覚える事 $\boxed{\text{板書 15}}$

§ 2 Fourier 変換

周期関数 $\to$ Fourier 級数．非周期関数 $\to$ どうする？
周期 $2L$ の周期関数 $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{i\frac{n\pi}{L}x}$
$c_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}f(x)e^{-i\frac{n\pi}{L}x}dx$ $\boxed{\text{板書 1}}$
◎ もう少し真面目に
任意の有限区間で区分的に滑らかで，$(-\infty,\infty)$ で絶対積分可能 ($\int_{-\infty}^{\infty}dx|f(x)|<\infty$) な関数 $f(x)$ に対して，
$\boxed{\text{板書 2}}$
◎ $\boxed{\text{板書 3}}$
◎ 例・$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2d} & (|x|\le d)\\ 0 & (|x|>d)\end{cases}$ $(d>0)$ $\boxed{\text{板書 4}}$
・$f(x)=e^{-a|x|}$ $(a>0)$ $\boxed{\text{板書 5}}$
・$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ $(\sigma>0)$ $\boxed{\text{板書 6}}$
◎ $\tilde{f}(k)=\int_{-\infty}^{\infty}dx\,e^{-ikx}f(x)$
$f(x)$ が偶関数の時．$\tilde{f}(k)$ も偶関数．
　$F_c(k)=\int_0^{\infty}dx\cos kx\,f(x)$: Fourier 余弦変換
　$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}dk\cos kx\,F_c(k)$
$f(x)$ が奇関数の時．$\tilde{f}(k)$ も奇関数．
　$F_s(k)=\int_0^{\infty}dx\sin kx\,f(x)$: Fourier 正弦変換
　$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}dk\sin kx\,F_s(k)$
◎ Fourier 変換の性質　$\mathscr{F}[f](k)=\tilde{f}(k)$

	$f(x)$	$\tilde{f}(k)=\int_{-\infty}^{\infty}dx\,e^{-ikx}f(x)$
(1)	$af(x)+bg(x)$	$a\tilde{f}(k)+b\tilde{g}(k)$ 線型性 (重ね合わせの原理)
(2)	$f(x+a)$	$e^{ika}\tilde{f}(k)$
(3)	$f(ax)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}\tilde{f}(\frac{k}{a})$
(4)	$e^{iax}f(x)$	$\tilde{f}(k-a)$
(5)	$\overline{f(x)}$	$\overline{\tilde{f}(-k)}$
(6)	$\tilde{f}(x)$	$2\pi f(-k)$
(7)	$x^nf(x)$	$i^n\tilde{f}^{(n)}(k)$
(8)	$f^{(n)}(x)$	$(ik)^n\tilde{f}(k)$
(9)	$(f*g)(x)$	$\tilde{f}(k)\tilde{g}(k)$

(7) では $x^nf(x)$ は $(-\infty,\infty)$ で絶対可積分とする．
$\boxed{\text{板書 7}}$
(7)(8) は微分と積分の順序を入れ替えられるという事．
◎ Parseval の等式
$\int_{-\infty}^{\infty}dxf(-x)g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\tilde{f}(k)\tilde{g}(k)$ $\boxed{\text{板書 8}}$
$\int_{-\infty}^{\infty}dx\overline{f(x)}g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}\overline{\tilde{f}(k)}\tilde{g}(k)$
☺上で $f(-x)\to\overline{f(x)}$ □
$\int_{-\infty}^{\infty}dx|f(x)|^2=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}|\tilde{f}(k)|^2$ ☺上で $g=f$ □
○ 例：$f_d(x)=\begin{cases}\frac{1}{2d} & (|x|\le d)\\ 0 & (|x|>d)\end{cases}$ $(d>0)$ $\boxed{\text{板書 9}}$
◎ § 2 で覚える事 $\boxed{\text{板書 10}}$

§ 3 Laplace 変換

◎ Laplace 変換
$f(t)$ が $(0,\infty)$ で定義され，複素数 $s=\sigma+i\tau$ に対して，$F(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)dt\Big(=\lim_{\varepsilon\to+0}\lim_{T\to\infty}\int_{\varepsilon}^{T}e^{-st}f(t)dt\Big)$ が存在する時，$F(s)$ を $f(t)$ の Laplace 変換といい，$\mathscr{L}[f]$ と書く．この積分が $s=s_0$ で収束すれば，$F(s)$ は $\mathrm{Re}\,s>\mathrm{Re}\,s_0$ なる全ての s に対して収束する．
○ 例：$\boxed{\text{板書 1}}$
○ (逆)Laplace 変換について様々な公式がある．
◎ § 3 で覚える事 $\boxed{\text{板書 2}}$

§ 4 デルタ関数

点粒子をどう扱うか．
◎ Dirac のデルタ関数
Kronecker のデルタ：$\delta_{nm}=\begin{cases}1 & (n=m)\\ 0 & (n\ne m)\end{cases}$
$\sum_m\delta_{nm}f_m=f_n$，特に $\sum_m\delta_{nm}=1$.
連続版 $\boxed{\text{板書 1}}$
この式を定義とする．つまり $\delta(x)$ は積分して初めて意味があるものである．Schwartz の超関数 (distribution)．別の定義として佐藤の超関数 (hyperfunction) があり，解析関数の境界値として定義する：$\delta(x)=\frac{1}{2\pi i}\big(\frac{1}{x-i\varepsilon}-\frac{1}{x+i\varepsilon}\big)$.
◎ 超関数
任意の「良い関数」(例えば $|x|\to\infty$ で x の任意の多項式より速く 0 に収束し，何回でも微分できる関数) $\phi(x)$ に対して，$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\phi(x)dx$ が有限となる $f(x)$ を超関数と定義する．2 つの超関数 $f(x)$ と $g(x)$ が等しい $f(x)=g(x)$ とは，任意の「良い関数」$\phi(x)$ に対して $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\phi(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\phi(x)dx$ となる事．
○ 例：階段関数 (Heaviside 関数) $\boxed{\text{板書 2}}$
◎ 超関数の Fourier 変換
超関数に対しても (逆)Fourier 変換が定義される．普通の関数に対する Fourier 変換の性質は，超関数に対する Fourier 変換に対しても成立する．
○ 例：デルタ関数の Fourier 変換 $\boxed{\text{板書 3}}$
◎ デルタ関数の性質 $\boxed{\text{板書 4}}$
◎ 関数の極限としてのデルタ関数
例 $\boxed{\text{板書 5}}$
注：上の (2)(3) は $\delta(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{2\pi}e^{ikx}$ に収束因子をつけて得られる．$\boxed{\text{板書 6}}$
◎ 点電荷の作る電位，電場
$\boxed{\text{板書 7}}$
物理数学 I でやった事：(i) $\vec{r}\ne\vec{0}$ で $\triangle\phi=0$ ($\Rightarrow\vec{r}=\vec{0}$ ではどうなっているか？) (ii) S：閉曲面，$\int_S\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot d\vec{S}=$

$\begin{cases} 0 & (\text{原点 O が } S \text{ の外}) \\ 4\pi & (\text{原点 O が } S \text{ の内}) \end{cases}$. $\boxed{\text{板書 8}}$

◎ § 4 で覚える事 $\boxed{\text{板書 9}}$

§ 5　偏微分方程式

◎ 偏微分方程式：2 つ以上の独立変数の未知関数の偏導関数を含む方程式.

最高階の偏導関数の階数を方程式の階数と言い，未知関数及びその偏導関数について 1 次式の時は線型と言う．独立変数の個数に等しい任意定数を含む解を完全解，任意関数を含む解を一般解，一般解の一つの場合を特殊解と言う．これらに含まれない解があれば特異解と言う．

例 $u = u(x, y)$ ・$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ の一般解 $\boxed{\text{板書 1}}$

・$x\frac{\partial u}{\partial x} - 2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0$ の完全解 (の 1 つ) $\boxed{\text{板書 2}}$

○ 線型　$Lu = 0$ (例 $L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$)

u_1, u_2 が解なら，$c_1 u_1 + c_2 u_2$ も解 (c_1, c_2：定数)[重ね合わせの原理]

◎ 2 階の偏微分方程式

○ 2 変数 $u = u(x, y)$ $\boxed{\text{板書 3}}$

◎ 偏微分方程式の一般論はこの位にして，上に挙げた例 (波動方程式，拡散方程式，Helmholtz 方程式・Laplace 方程式) を順次見て行く．これらの方程式を考える際には，その物理的意味合いから，初期条件や境界条件が課される事になる．波動方程式や拡散方程式では初期条件と境界条件を与える混合問題，Helmholtz 方程式・Laplace 方程式では境界条件を与える境界値問題が通常考えられる.

○ 境界条件として，u の値を与える (Dirichlet 境界条件)，u の (法線方向の) 微分を与える (Neumann 境界条件)，混合型 (一部で D，一部で N).

◎ § 5 で覚える事 $\boxed{\text{板書 4}}$

§ 6　波動方程式

◎ 弦の振動

垂直方向に振動．線密度 ρ_0．張力 T_0 で引っ張る．$\boxed{\text{板書 1}}$

◎ 一次元の場合　$u = u(x, t)$，$\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

○ D'Alembert の解 $\boxed{\text{板書 2}}$

○ 初期値問題 (Cauchy 問題)

初期条件：$t = 0$ で $\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$. $\boxed{\text{板書 3}}$

○ 混合問題

● 例：波の反射．$x \geq 0$ のみとする.

$t = 0$ で $\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$ (初期条件),

$x = 0$ で $u(0, t) = 0$ (Dirichlet 境界条件).

$f(x), g(x)$ は $x \geq 0$ でのみ定義されている. $\boxed{\text{板書 4}}$

$\begin{cases} f(-x) = -f(x) \\ g(-x) = -g(x) \end{cases}$ $(x \geq 0)$ として $f(x), g(x)$ の定義域を $x < 0$ まで拡張すると，この式は OK. $\boxed{\text{板書 5}}$

● 例：上の例で,

$x = 0$ で $u_x(0, t) = 0$ (Neumann 境界条件). $\boxed{\text{板書 6}}$

$\begin{cases} f(-x) = f(x) \\ g(-x) = g(x) \end{cases}$ $(x \geq 0)$ として $f(x), g(x)$ の定義域を $x < 0$ まで拡張すると，この式は OK. $\boxed{\text{板書 7}}$

● 例：両端固定．$0 \leq x \leq L$ のみとする.

$t = 0$ で $\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$ (初期条件),

$x = 0, L$ で $\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{cases}$ (Dirichlet 境界条件).

$f(x), g(x)$ は $0 \leq x \leq L$ でのみ定義されている. $\boxed{\text{板書 8}}$

$f(x), g(x)$ を周期 $2L$ の周期関数として定義域を拡張すると，この式は OK.

◎ Fourier 解析を用いる解法

$u = u(x, t)$, $\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

○ 変数分離法 $\boxed{\text{板書 9}}$

○ $0 \leq x \leq L$ として，境界条件 $\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \end{cases}$ を課す.

$T(t) = 0$ は自明な解なので，以下 $T(t) \neq 0$ とする. $\boxed{\text{板書 10}}$

○ u_n を重ね合わせても解 $\Rightarrow$ $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\omega_n t + B_n \sin\omega_n t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x$, $(\omega_n = c\frac{n\pi}{L})$.

つまり Fourier 級数！初めから次の様にすればよい．$u(x,t)$ $(0 \leq x \leq L)$ を $u(0,t) = u(L,t) = 0$ に注意して Fourier 級数に展開する. $\boxed{\text{板書 11}}$

初期条件 $\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$ を課すと,

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{L}x$, $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\omega_n \sin\frac{n\pi}{L}x$

$\Rightarrow A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$,

$B_n = \frac{2}{L\omega_n}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$.

○ 無限区間 $-\infty < x < \infty$．初期条件 $\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$.

先程の様に，変数分離→特解→重ね合わせ．又は，$u(x,t)$ を x について Fourier 変換して，$\boxed{\text{板書 12}}$

◎ § 6 で覚える事 $\boxed{\text{板書 13}}$

§ 7　拡散方程式

◎ 棒の熱伝導

温度 $u(x,t)$，断面積 S，密度 ρ，比熱 C，熱伝導率 λ. $\boxed{\text{板書 1}}$

◎ 一次元の場合　$u = u(x,t)$, $\dfrac{1}{\kappa}\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

初期条件 $u(x, 0) = f(x)$

○ 有限領域：$0 \leq x \leq 2L$

境界条件：$u(2L, t) = u(0, t)$.　但し，より強い境界条件として，(x の定義域を拡張して) 周期的境界条件 $u(x + 2L, t) = u(x, t)$ を課す事にする.

変数分離 $\boxed{\text{板書 2}}$ これを解くと $\boxed{\text{板書 3}}$

または初めから，$u(x,t)$ $(0 \leq x \leq 2L)$ を x に関して Fourier 級数に展開して (これは周期的境界条件を満たす)，$\boxed{\text{板書 4}}$

初期条件：$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{n\pi}{L}x + B_n \sin\frac{n\pi}{L}x\right)$

$\Rightarrow A_n = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$,

$B_n = \frac{1}{L}\int_0^{2L} f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

○ 無限領域：$-\infty < x < \infty$.

境界条件：$|x| \to \infty$ で $u \to$ 有界.

先程の様に，変数分離→特解→重ね合わせ．又は，$u(x,t)$ を x について Fourier 変換して，板書 5

◎ § 7 で覚える事 板書 6

§ 8　Helmholtz 方程式

◎ $u = u(\vec{x})$
$(\triangle + k^2)u = 0$ Helmholtz 方程式
$k = 0$ の時 $\triangle u = 0$ Laplace 方程式
例 板書 1
◎ 2 次元空間の Laplace 方程式
$u = u(x,y)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
例：長方形領域 $(0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b)$

境界条件 $\begin{cases} u(0,y) = 0 \\ u(a,y) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u(x,b) = 0 \end{cases}$ (Dirichlet 型)

変数分離 板書 2
または初めから，$u(0,y) = u(a,y) = 0$ に注意して，$u(x,y)$ を x に関して Fourier 級数に展開して，板書 3
これが $u(x,0) = f(x)$ を満たすには，
$f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh k_n b \sin \frac{n\pi}{a} x$ (これは Fourier 正弦展開) $\Rightarrow B_n = -\frac{2}{a \sinh k_n b} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi}{a} x\, dx$
◎ 2 次元空間の波動方程式
$u = u(x,y,t)$, $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$
例：長方形の太鼓 $(0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b)$

境界条件 $\begin{cases} u(0,y,t) = 0 \\ u(a,y,t) = 0 \\ u(x,0,t) = 0 \\ u(x,b,t) = 0 \end{cases}$ (Dirichlet 型)

初期条件 $\begin{cases} u(x,y,0) = f(x,y) \\ u_t(x,y,0) = g(x,y) \end{cases}$

変数分離 板書 4
または初めから，$u(0,y,t) = u(a,y,t) = 0$, $u(x,0,t) = u(x,b,t) = 0$ に注意して，$u(x,y,t)$ を x, y に関して Fourier 級数に展開して，板書 5
初期条件：$f(x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm} \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y$,
$g(x,y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} b_{nm}\omega_{nm} \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y$
(これは Fourier 正弦展開)
$\Rightarrow a_{nm} = \frac{2}{a}\frac{2}{b}\int_0^a dx \int_0^b dy f(x,y) \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y$,
$\quad b_{nm} = \frac{1}{\omega_{nm}}\frac{2}{a}\frac{2}{b}\int_0^a dx \int_0^b dy\, g(x,y) \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y$.
板書 6

◎ § 8 で覚える事 板書 7

§ 9　Green 関数

◎ 2 変数で説明．$u = u(x,y)$
線型偏微分方程式 $Lu(x,y) = f(x,y)$ 及び適当な境界条件．($L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y2}$ など．$f(x,y)$ は既知関数)
$G(x,y;x',y')$: Green 関数
$\begin{cases} LG(x,y;x',y') = -\delta(x-x')\delta(y-y') \\ \text{境界条件} \end{cases}$
境界条件無しのものを演算子 L に対する主要解と言う．
並進不変性があれば，$LG(x,y) = -\delta(x)\delta(y)$ を考えればよい：$G(x,y;x',y') = G(x-x', y-y')$.
○ $Lu = f$ の解は，
$u(x,y) = -\int dx'dy' G(x,y;x',y') f(x',y')$
$\qquad + (Lu = 0 \text{ の解})$. 板書 1
○ $Lu = 0$ 及び境界条件
完全系 $\{\varphi_n\}$ ：$L\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$
$G(x,y;x',y') = -\sum_n \frac{1}{\lambda_n}\varphi_n(x,y)\varphi_n(x',y')^*$ 板書 2
◎ 主要解
○ Helmholtz 方程式：$(\triangle + k^2)G(\vec{x}) = -\delta(\vec{x})$
$k > 0$ 板書 3
$k \to 0$ とすると Laplace 方程式：$\triangle G(\vec{x}) = -\delta(\vec{x})$. 板書 4
○ 拡散方程式：$(\triangle - \frac{1}{\kappa}\frac{\partial}{\partial t})G(\vec{x},t) = -\delta(\vec{x})\delta(t)$
遅延条件：$G(\vec{x},t) = 0\ (t < 0)$ 板書 5
○ 波動方程式：$(\triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})G(\vec{x},t) = -\delta(\vec{x})\delta(t)$
遅延条件：$G(\vec{x},t) = 0\ (t < 0)$ 板書 6
◎ § 9 で覚える事 板書 7

物理数学IIIの宿題 [ver.2.0.2] (授業促進のためのノート [ver.2.0.4] に準拠)

以下の点数のついた問題 (合計 64 点) をレポート課題とする (提出・締切等については授業で述べる)。問題文は (わざと) 手短かに書いてある。ミスプリを見つけたら連絡して下さい。

第1部：特殊関数

§1の宿題

1. (2 点) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ をGram-Schmidtの方法で正規直交化せよ。

2. (2 点) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ をGram-Schmidtの方法で正規直交化せよ。

§2の宿題

1. (2 点) $1, x, x^2, x^3, x^4$ を内積 $(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \overline{f(x)} g(x) dx$ に関して正規直交化せよ。

2. (2 点) 以下を利用して，$H_0(x), H_1(x), \ldots, H_5(x)$ を具体的に書き下せ。
(1) 級数表示 (2) Rodriguesの公式 (3) 3項関係式

3. (2 点) 母関数から以下を導け。
(1) 級数表示 (2) Rodriguesの公式 (3) 3項関係式 (4) 微分の漸化式 (5) 微分方程式
(6) 直交性 (7) 偶奇性

4. 級数表示から以下を導け。
(1) 母関数 (2) Rodriguesの公式 (3) 3項関係式 (4) 微分の漸化式 (5) 微分方程式
(6) 直交性 (7) 偶奇性

5. Rodriguesの公式から以下を導け。
(1) 母関数 (2) 級数表示 (3) 3項関係式 (4) 微分の漸化式 (5) 微分方程式 (6) 直交性
(7) 偶奇性

6. 3項関係式から以下を導け。
(1) 母関数 (2) 級数表示 (3) 偶奇性

7. 微分方程式から以下を導け。
(1) 母関数 (2) 級数表示 (3) 直交性 (4) 偶奇性

§3の宿題

1. (2 点) $1, x, x^2, x^3, x^4$ を内積 $(f, g) = \int_{-1}^{1} \overline{f(x)} g(x) dx$ に関して正規直交化せよ。

2. (2点) 以下を利用して，$P_0(x), P_1(x), \ldots, P_5(x)$ を具体的に書き下せ。
(1) 級数表示 (2) Rodriguesの公式 (3) 3項関係式

3. Legendreの多項式の母関数から以下を導け。
(1) 級数表示 (2) Rodriguesの公式 (3) 3項関係式 (4) 微分の漸化式 (5) 微分方程式
(6) 直交性 (7) 偶奇性

4. Legendreの陪関数 $P_l^m \overset{\text{def}}{=} \dfrac{1}{2^l l!}(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\dfrac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l$ を，$l = 0, 1, \ldots, 4$ $(m = -l, -l+1, \ldots, l)$ に対して具体的に書き下せ。そして $P_l^{-m}(x) = (-1)^m \dfrac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(x)$ を確認せよ。

5. 運動量演算子を $\vec{p} \overset{\text{def}}{=} -i\hbar\vec{\nabla}$，軌道角運動量演算子を $\vec{L} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\vec{r}\times\vec{p} - \vec{p}\times\vec{r}) = \vec{r}\times\vec{p}$ とし，$\vec{\ell} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\hbar}\vec{L}$ とおく。
(1) ℓ_z, $\ell_\pm \overset{\text{def}}{=} \ell_x \pm i\ell_y$, $\vec{\ell}^2$ を空間極座標を用いて表せ。
(2) ℓ_z, $\ell_\pm$, $\vec{\ell}^2$ を $Y_{\ell,m}(\theta,\varphi)$ に掛けるとどうなるかを計算せよ。

§4の宿題

1. (2点) $1, x, x^2, x^3$ を内積 $(f,g) = \int_0^\infty x^\alpha e^{-x}\overline{f(x)}g(x)dx$ $(\alpha > -1)$ に関して正規直交化せよ。

2. 以下を利用して，$L_0^{(\alpha)}(x), L_1^{(\alpha)}(x), \ldots, L_5^{(\alpha)}(x)$ を具体的に書き下せ。
(1) 級数表示 (2) Rodriguesの公式 (3) 3項関係式

3. 母関数から以下を導け。
(1) 級数表示 (2) Rodriguesの公式 (3) 3項関係式 (4) 微分の漸化式 (5) 微分方程式
(6) 直交性

§5の宿題

1. (2点) $1, x, x^2$ を内積 $(f,g) = \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha(1+x)^\beta\overline{f(x)}g(x)dx$ $(\alpha, \beta > -1)$ に関して正規直交化せよ。

2. 以下を利用して，$P_0^{(\alpha,\beta)}(x), P_1^{(\alpha,\beta)}(x), \ldots, P_4^{(\alpha,\beta)}(x)$ を具体的に書き下せ。
(1) 級数表示 (2) Rodriguesの公式 (3) 3項関係式

3. Jacobiの多項式に関して，母関数から以下を導け。
(1) 級数表示 (2) Rodriguesの公式 (3) 3項関係式 (4) 微分の漸化式 (5) 微分方程式
(6) 直交性

§6の宿題

1. (2点) 超幾何微分方程式の $x = 0$ における解を求めよ。但し $c \notin \mathbb{Z}$ とする。

2. 超幾何微分方程式の $x = 1$ における解を求めよ。但し $a + b - c \notin \mathbb{Z}$ とする。

3. 超幾何微分方程式の $x = \infty$ における解を求めよ。但し $a - b \notin \mathbb{Z}$ とする。

§7の宿題

1. (2点) $J_n(x)$ に関して，母関数から級数表示を導け。

第2部：Fourier解析

§1の宿題

1. (2点) $|x|$ $(-\pi \le x \le \pi)$ を Fourier 級数に展開せよ。
2. (2点) $|\sin x|$ $(-\pi \le x \le \pi)$ を Fourier 級数に展開せよ。
3. (2点) x^2 $(0 \le x \le \pi)$ を Fourier 余弦展開せよ。
4. (2点) x^2 $(0 \le x \le \pi)$ を Fourier 正弦展開せよ。
5. (2点) $\cos ax$ $(-\pi \le x \le \pi,\ a \notin \mathbb{Z})$ を Fourier 級数に展開せよ。
6. (2点) x $(-\pi \le x \le \pi)$ を指数関数型の Fourier 級数に展開せよ。

§2の宿題

1. (2点) $e^{-a|x|}$ $(a > 0)$ の Fourier 変換を求めよ。
2. (2点) e^{-ax^2} $(a > 0)$ の Fourier 変換を求めよ。
3. (2点) $\dfrac{2a}{x^2 + a^2}$ $(a > 0)$ の Fourier 変換を求めよ。
4. (2点) $\dfrac{1}{(x^2+4)(x^2+9)}$ の Fourier 変換を求めよ。

§3の宿題

1. (2点) x の Laplace 変換を求めよ。
2. (2点) $\cosh kx$ の Laplace 変換を求めよ。
3. (2点) $e^{-ax}\cos kx$ の Laplace 変換を求めよ。

§4の宿題

1. (2点) $\delta(ax) = \dfrac{1}{|a|}\delta(x)$ $(a \in \mathbb{R}_{\neq 0})$ を示せ。
2. (2点) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x^2 - a^2)dx$ $(a > 0)$ を求めよ。

§5の宿題

1. (2点) $u = u(x, y)$ に対して，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$ の一般解を求めよ。

§6の宿題

1. (2 点) $u = u(x,t)$ $(-\infty < x < \infty)$ に対して，$\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ の一般解を求めよ。

2. (2 点) $u = u(x,t)$ $(-\infty < x < \infty)$ に対して，$\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ を初期条件 $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$ の下で解け。

3. 前問の結果を Fourier 変換を利用して求めよ。

§7 の宿題

1. (2 点) $u = u(x,t)$ $(0 \leq x \leq 2L)$ に対して，$\dfrac{1}{\kappa}\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ を境界条件 $u(2L,t) = u(0,t)$ 及び初期条件 $u(x,0) = f(x)$ の下で解け。

2. $u = u(x,t)$ $(-\infty < x < \infty)$ に対して，$\dfrac{1}{\kappa}\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ を初期条件 $u(x,0) = f(x)$ の下で解け。

3. Fourier 変換を利用して，$e^{a\frac{d^2}{dx^2}}f(x)$ $(a > 0)$ を積分を用いて表せ。

§8 の宿題

1. (2 点) $u = u(x,y)$ $(0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b)$ に対して，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ を境界条件 $u(0,y) = u(a,y) = u(x,b) = 0$, $u(x,0) = f(x)$ の下で解け。

2. (2 点) $u = u(x,y,t)$ $(0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b)$ に対して，$\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ を境界条件 $u(0,y,t) = u(a,y,t) = u(x,0,t) = u(x,b,t) = 0$ 及び初期条件 $u(x,y,0) = f(x,y)$, $u_t(x,y,0) = g(x,y)$ の下で解け。

§9 の宿題

1. 3 次元ベクトル $\vec{x}$ 及び $a > 0$ に対し，$G^{\pm}(\vec{x}) = \displaystyle\lim_{\epsilon\to+0}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}}{\vec{k}^2 - a^2 \mp i\epsilon}$