物理数学 II (小竹)　授業促進のためのノート [ver.2.1.4.2]

全部板書したいところであるが，時間が不足する事と，説明を聞いてもらうために，板書の一部を配布する．$\boxed{\text{板書}}$ と書いた部分では板書するので書き写す様に．このノートを見れば話の順序が分かるので予習に役立ててもらいたい．十分な予習と徹底的な復習をする事．このノートは重要な事柄をまとめたものではない．ミスプリを見つけたら連絡して下さい．
以前のもの (ver.1) よりも内容を減らしたので，より詳しく知りたければ ver.1 を見よ．

準教科書 (←これに沿って進む訳ではない)
・理工系の数学入門コース 5「複素関数」
　表 実 著，岩波書店 (1988 年)(→新装版)
・理工系の数学入門コース 4「常微分方程式」
　矢嶋 信男 著，岩波書店 (1989 年)(→新装版)
参考書
・現代数学への入門「複素関数入門」
　神保 道夫 著，岩波書店 (2003 年)
・理工系の基礎数学 3「常微分方程式」
　稲見 武夫 著，岩波書店 (1998 年)
・「詳解物理応用数学演習」
　後藤憲一・山本邦夫・神吉健 共編, 共立出版 (1979 年)

を挙げておくが，数多くの本が出版されているので，本屋や図書館で分かり易そうな本を見つけたらそれを使えばよい。

第 1 部：複素関数

変数を複素数に拡張する
⇒ ・見通しが良くなる．例：三角関数と指数関数．
　・留数定理を用いて色々な積分が計算できる．
　・解析接続，などなど．

§ 1　複素数と複素関数

◎ 色々な数
● 自然数 $\mathbb{N}$, 整数 $\mathbb{Z}$, 有理数 $\mathbb{Q}$. 実数 $\mathbb{R}$, 複素数 $\mathbb{C}$.
◎ 複素数 $z \in \mathbb{C}$
$z = x + iy$. $x, y \in \mathbb{R}$. $i = \sqrt{-1}$ つまり $i^2 = -1$
実部 $\mathrm{Re}\, z = x$，虚部 $\mathrm{Im}\, z = y$
共役複素数 $\bar{z} = x - iy \ (= z^*)$
絶対値 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $|z|^2 = z\bar{z}$
○ 四則演算 $\boxed{\text{板書 1}}$
○ 複素平面 (Gauss 平面) $\boxed{\text{板書 2}}$
・$\cos\theta + i \sin\theta$ の性質 $\boxed{\text{板書 3}}$
・和と積 $\boxed{\text{板書 4}}$
○ de Moivre の定理 $\boxed{\text{板書 5}}$
○ (w の方程式) $w^n = z$ の解：z の n 乗根 $\boxed{\text{板書 6}}$
◎ 複素関数
○ 数列の極限
Def. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \alpha \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} |z_n - \alpha| = 0$.
つまり，$z_n = x_n + iy_n$, $\alpha = a + ib$ とおくと，
$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \alpha \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.
Thm. Cauchy 列 $\{z_n\}$ は収束する．
ここで $\{z_n\}$ が Cauchy 列とは，$\forall\varepsilon > 0$, $\exists N > 0$, s.t. $n, m > N \Rightarrow |z_n - z_m| < \varepsilon$.　注：$N = N(\varepsilon)$.
○ 複素関数 $\boxed{\text{板書 7}}$
・極限値 Def. $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$, s.t. $0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon$.　注：$\delta = \delta(\varepsilon, z_0)$.
・連続 Def. $f(z)$ が $z = z_0$ で連続 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$
　Def. $f(z)$ が $D \subset \mathbb{C}$ で連続 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall z \in D$ で連続
◎ § 1 で覚える事 $\boxed{\text{板書 8}}$

§ 2　正則関数

◎ 微分
○ Def. $w = f(z)$ の $z = z_0$ での微分係数：$\boxed{\text{板書 1}}$
● この値が有限確定値の時，$f(z)$ は $z = z_0$ で微分可能という．その値を $f'(z_0) = \frac{df(z)}{dz}\Big|_{z=z_0} = \frac{dw}{dz}\Big|_{z=z_0}$ と書く．
・$f(z_0 + h) = f(z_0) + hA + hB(h)$ と表せる．
　A：h に依らない定数，$B(h)$：$\lim\limits_{h\to 0} B(h) = 0$.
　$A = f'(z_0)$ である．
● z_0 の近傍で微分可能の時，$f(z)$ は $z = z_0$ で正則という．z_0 を $f(z)$ の正則点といい，正則でない点を特異点という．
・正則は微分可能よりもきつい条件！
● $D \subset \mathbb{C}$ の各点で正則の時，$f(z)$ は D で正則という．
○ 例
● $w = z^2$ $\boxed{\text{板書 2}}$
● $w = \frac{1}{z}$ $\boxed{\text{板書 3}}$
● $w = \bar{z}$ $\boxed{\text{板書 4}}$
● $w = z|z|^2$ $\boxed{\text{板書 5}}$
○ 極限や微分について実関数の時と同様の性質がある．
◎ Cauchy-Riemann の関係式
$z = x + iy$, $f(z) = u + iv$
$u = u(x, y) = \mathrm{Re}\, f(z)$, $v = v(x, y) = \mathrm{Im}\, f(z)$
○ Thm. $w = f(z)$ が $D \subset \mathbb{C}$ で正則 ⇔ $\boxed{\text{板書 6}}$
∵ $\boxed{\text{板書 7}}$
注：$\boxed{\text{板書 8}}$
・以後 $f(z)$ と書いたら正則関数とする．
○ Prop. (1) 線型性 $(f(z) + g(z))' = f'(z) + g'(z)$
　$(cf(z))' = cf'(z)$
(2) 積の微分 $(f(z)g(z))' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$
(3) 合成関数の微分 $(f(g(z)))' = f'(g(z))g'(z)$
・逆関数　$w = w(z)$：1 対 1 とする．
　$z = z(w)$ も正則で，$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{\frac{dw}{dz}}$.
◎ 正則関数の例
(1) 多項式 $\boxed{\text{板書 9}}$
(2) 有理式 $\boxed{\text{板書 10}}$
$F(z) = 0$ なる z を $F(z)$ の零点という．

(3) 指数関数 $\boxed{\text{板書 11}}$

(4) 三角関数 $\boxed{\text{板書 12}}$

$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$, $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$, $\sec z = \frac{1}{\cos z}$, $\mathrm{cosec} z = \frac{1}{\sin z}$ (分母の零点を除く)

(5) 双曲線関数 $\cosh z \overset{\text{def}}{=} \frac{e^z+e^{-z}}{2} = \cos iz$, $\sinh z \overset{\text{def}}{=} \frac{e^z-e^{-z}}{2} = -i\sin iz$, $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$, $(\cosh z)' = \sinh z$, $(\sinh z)' = \cosh z$, $\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}$, 等.

(6) 逆関数

(6-1) 対数関数 $\boxed{\text{板書 13}}$

(6-2) 逆三角関数 $\boxed{\text{板書 14}}$

$\sqrt{\cdots}$ は 2 つの分枝のどちらかを表す.

$\sin^{-1} z = -i\log(iz+\sqrt{1-z^2})$, $(\sin^{-1} z)' = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$, $(\tan^{-1} z)' = \frac{1}{2i}\log\frac{1+iz}{1-iz}$, $(\tan^{-1} z)' = \frac{1}{1+z^2}$, 等.

(6-3) 逆双曲線関数

$\cosh^{-1} z = \log(z+\sqrt{z^2-1})$, $(\cosh^{-1} z)' = \frac{1}{\sqrt{z^2-1}}$, $\sinh^{-1} z = \log(z+\sqrt{z^2+1})$, $(\sinh^{-1} z)' = \frac{1}{\sqrt{z^2+1}}$, $(\tanh^{-1} z)' = \frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z}$, $(\tanh^{-1} z)' = \frac{1}{1-z^2}$, 等.

・これらを初等関数という.

◎ 等角写像

Thm. $w = f(z)$: $z = z_0$ で正則, $f'(z_0) \neq 0 \Rightarrow z$ 平面の z_0 に十分近い近傍と w 平面の $w_0 = f(z_0)$ に十分近い近傍は 1 対 1 $\boxed{\text{板書 15}}$

○ 一次分数変換　$w = \frac{az+b}{cz+d}$ $(a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad-bc \neq 0)$.

(i) 一次分数変換は, $w = z+b$, $w = az$, $w = \frac{1}{z}$ の合成で得られる. (ii) 一次分数変換によって, 円は円に移される (直線も円に含める).

◎ 領域 $D \subset \mathbb{C}$ が単連結 : ループを連続変形で 1 点に縮められる. $\boxed{\text{板書 16}}$

◎ 無限遠点 $\boxed{\text{板書 17}}$

複素球面 (Riemann 球面) $\xi^2+\eta^2+(\zeta-\frac{1}{2})^2 = (\frac{1}{2})^2$ と複素平面 (Gauss 平面) との対応 : 立体射影 $\frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} = \frac{\zeta-1}{-1}$

$\therefore (\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{1+z\bar{z}}(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}, z\bar{z})$.

逆に $(x, y) = \frac{1}{1-\zeta}(\xi, \eta)$ (但し $\xi^2+\eta^2+\zeta^2 = \zeta$).

N に対応する仮想的な点を無限遠点 $z = \infty$ という.

◎ 多価関数と分岐点, Riemann 面

○ $z = w^n$ の逆関数 $w = \sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}}$

$z = re^{i\theta}$, $w_k = \sqrt[n]{r}e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2\pi}{n}k)}$.

$w = w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$: n 価関数

● $n = 2$ $\boxed{\text{板書 18}}$

・z で 2 回まわる (4π) と w で元に戻る (2π).

・$z = 0$ は 1 位の分岐点という. ($w = z^{\frac{1}{n}}$ の時, $z = 0$ は $n-1$ 位の分岐点という.)

・z と w は 1 対 2

→ 1 対 1 にするために z 平面を 2 枚用意する : D_0, D_1

・負の実軸に沿って切れ目 (切断線, カット) を入れて張り合わせる. (負の実軸でなくても 0 と ∞ をつなげば何でもよい.) $\boxed{\text{板書 19}}$

○ 対数関数 $\boxed{\text{板書 20}}$

○ 一般の巾関数 z^a $(a \in \mathbb{C})$

$z^a = e^{a\log z}$ なので (一般に) 多価.

○ 一般の指数関数 a^z $(a \in \mathbb{C})$

$a^z = e^{z\log a}$ なので (一般に) 多価 ($\arg a$ を指定すれば一価). $e^z = \exp z$ と $(e)^z$ は (一般には) 異なる.

◎ § 2 で覚える事 $\boxed{\text{板書 21}}$

§ 3　級数

◎ 無限級数 (の和) $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ $(z_n \in \mathbb{C})$

$S_n = \sum_{k=0}^{n} z_k$, $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ の時, $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = S$.

Def. $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ が収束する時, $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ は絶対収束するという.

Thm. $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ が絶対収束 $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ は収束し, 項の順番を変えても和は同じ.

Thm. $\sum_{n=0}^{\infty} z'_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} z''_n$ が絶対収束 (和をそれぞれ S', S'' とする) $\Rightarrow z_n = \sum_{k=0}^{n} z'_k z''_{n-k}$ とおくと, $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ も絶対収束し (和を S とする), $S = S'S''$.

◎ 関数項級数

Def. $\{f_n(z)\}$ が $D \subset \mathbb{C}$ で $f(z)$ に一様収束 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon) > 0$, s.t. $n > N \Rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$.

注 : $N = N(\varepsilon)$ は z に依らない!

cf. 各点収束 : 各 z に対して $f_n(z)$ が $f(z)$ に収束.

$N = N(\varepsilon, z)$ は z に依ってよい.

注 : 一様収束は各点収束よりきつい条件.

$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} f_k(z)$, $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ に対しても, 絶対収束・一様収束等が同様に定義される.

Thm. $\{f_n(z)\}$: D で連続で, $f(z)$ に一様収束 $\Rightarrow f(z)$ は連続

Thm. $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ $(A_n \geq 0)$ が収束し, D で $|f_n(z)| \leq A_n$ $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ は D で一様絶対収束.

◎ 巾級数

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$: a を中心とする巾級数.

原点中心なら $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$.

Thm. (Cauchy-Hadamard の公式) $\boxed{\text{板書 1}}$

注 : ここで, 上極限 $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup x_n$ は, 実数列 x_n の最大の集積値で必ず存在する. $0, \infty$ も含める. $\boxed{\text{板書 2}}$

注 : r を収束半径という. 収束円 $(|z| = r)$ 上ではどうなるか分からない. $\boxed{\text{板書 3}}$

Thm. (ratio test) $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ が存在すれば (∞ も含める. その値を r とおく), 収束半径は r.

○ 例 (1) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n$ $\boxed{\text{板書 4}}$

(2) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{2n}$ $\boxed{\text{板書 5}}$

(3) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ $\boxed{\text{板書 6}}$

(4) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$ $\boxed{\text{板書 7}}$

(5) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$ $\boxed{\text{板書 8}}$

(6) $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$ $\boxed{\text{板書 9}}$

○ Thm. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径 r

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} na_n z^{n-1}$ の収束半径は r (項別微分)

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n z^{n+1}$ の収束半径は r (項別積分)

Thm. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は収束円内で正則で，項別微分・項別積分可能.

注：$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ は収束円内で何回でも微分可能！ $\boxed{\text{板書 10}}$

◎ 指数関数，三角関数，対数関数の定義 $\boxed{\text{板書 11}}$

その性質 $\boxed{\text{板書 12}}$

○ 二項定理 $(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$ $(|z| < 1)$.

$\binom{\alpha}{n} \overset{\text{def}}{=} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ (取り敢えず $\alpha \in \mathbb{R}$ とする)

◎ § 3 で覚える事 $\boxed{\text{板書 13}}$

§ 4　複素積分

◎ 複素積分

Def. $\boxed{\text{板書 1}}$ $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$ が，$n \to \infty$, $\Delta z_k \to 0$ に対して，ζ_k に依らずに $S_n \to S$ の時，$\int_C f(z)dz = S$．つまり，$\boxed{\text{板書 2}}$

○ 例 $\int_C \frac{dz}{z}$ $\boxed{\text{板書 3}}$

○ Thm. C 上で，$F(z)$ は正則で，$f(z) = F'(z)$ が連続 (実は自動的に OK) $\Rightarrow$ $\boxed{\text{板書 4}}$

Cor. 上の定理の条件下で，$\int_C f(z)dz$ は端点 a, b で決まり，道に依らない.

Cor. 上の定理の条件下で，$\oint_C f(z)dz = 0$.

Thm. (1) $\int_C \big(f(z)+g(z)\big)dz = \int_C f(z)dz + \int_C g(z)dz$, $\int_C kf(z)dz = k\int_C f(z)dz$

(2) $\int_C f'(z)g(z)dz = \big[f(z)g(z)\big]_a^b - \int_C f(z)g'(z)dz$

(3) $\int_C f(z)dz = \int_K f(\varphi(\zeta))\varphi'(\zeta)d\zeta$ $\boxed{\text{板書 5}}$

○ Thm.[Cauchy の積分定理] D：単連結，C：D 内の閉曲線，$f(z)$：D で正則 $\Rightarrow$ $\boxed{\text{板書 6}}$

Cor. $\boxed{\text{板書 7}}$

○ Thm.[Cauchy の積分表示] D：単連結，$f(z)$：D で正則，$a \in D$，C：D 内の a を含む閉曲線 $\Rightarrow$ $\boxed{\text{板書 8}}$

Cor. $f(a) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} f(a + re^{i\theta})$ (円周上の平均値)．正則関数の実部・虚部は極大・極小を持たない.

Cor. 正則関数の絶対値は極大値を持たない.

Cor. 正則関数の絶対値は零以外の極小値を持たない.

Cor. 閉じた領域で正則な関数の絶対値は周上で最大値を取る (最大値の原理).

Thm.[Goursat] 上の定理と同じ仮定で $\boxed{\text{板書 9}}$

よって何回でも微分可能！

Thm.[Morera] (Cauchy の逆) D：単連結，$f(z)$：D で連続，C：D 内の閉曲線，$\oint_C f(z)dz = 0$ $(\forall C)$

$\Rightarrow f(z)$：D で正則

○ Thm.[Liouville] $f(z)$：∞ を除いて正則，有界

$\Rightarrow f(z) =$ 定数

Thm.[Gauss] 複素数係数の n 次式 $= 0$ は複素数の範囲で n 個の解を持つ.

◎ Taylor 展開

$f(z)$：D で正則．$a \in D$ $\boxed{\text{板書 10}}$

◎ Laurent 展開

$f(z)$：D で正則. $\boxed{\text{板書 11}}$

○ $n \geq 0$ の部分：正則部．$n < 0$ の部分：主要部．負の最高巾が $(z-a)^{-k}$ の時，$z = a$ を k 位の極 (pole).

$k = \infty$ の時，真性特異点．例：$e^{\frac{1}{z}}$ の $z = 0$.

a は孤立特異点としている.

・集積特異点．例：$\mathrm{cosec}\frac{1}{z}$ の $z = 0$．$z = \frac{1}{n\pi}$ $(n \in \mathbb{Z})$ は 1 位の極．$z = 0$ のまわりに無数．これも真性特異点.

◎ § 4 で覚える事 $\boxed{\text{板書 12}}$

§ 5　留数解析

◎ 特異点

$f(z)$ が $z = a$ で正則でない時，$z = a$ を特異点という.

$0 < |z-a| < r$ $(r > 0)$ で正則なら孤立特異点という.

その時 $\boxed{\text{板書 1}}$ Laurent 展開

(i) $\lim_{z\to a} f(z) = \alpha$ (有限) の場合．[主要部無し]

$f(a) = \alpha$ と定義すれば $z = a$ は特異点ではない.

例：$\boxed{\text{板書 2}}$

(ii) ある $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して，$\lim_{z\to a}(z-a)^{k-1}f(z) = \infty$, $\lim_{z\to a}(z-a)^k f(z) = \alpha$ (0 でない有限値) の場合．[主要部有限]　　$z = a$ は k 位の極

(iii) (i)(ii) 以外の場合．[主要部無限]

$z = a$ は真性特異点．例：$e^{\frac{1}{z}}$ の $z = 0$.

○ $f(z)$ の $z = \infty$ の状態は，$z = \frac{1}{\zeta}$, $g(\zeta) = f(\frac{1}{\zeta})$ として，$g(\zeta)$ の $\zeta = 0$ の状態とする.

○ D で，極以外は正則である関数を有理型関数という.

◎ 留数

Def. $f(z)$：$0 < |z-a| < R$ で正則．$z = a$ における $f(z)$ の留数：$\boxed{\text{板書 3}}$

Def. $f(z)$：$R < |z| < \infty$ で正則．$z = \infty$ における $f(z)$ の留数：$\boxed{\text{板書 4}}$

例 $\oint_C \frac{dz}{2\pi i}(z-a)^n$ $(n \in \mathbb{Z})$ $\boxed{\text{板書 5}}$

○ Thm. $z = a$：正則点 $\boxed{\text{板書 6}}$

$z = a$：孤立特異点 $\boxed{\text{板書 7}}$

$z = \infty$：孤立特異点，正則点 $\boxed{\text{板書 8}}$

Cor. $z = a$：k 位の極 $(k \geq 1)$

$\Rightarrow \mathrm{Res}_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a} \frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\big((z-a)^k f(z)\big)$

$z = \infty$：k 位の極 $(k \geq 1)$，正則 $(k = 0)$

$\Rightarrow \mathrm{Res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} z^{k+2} f^{(k+1)}(z)$

$\boxed{\text{板書 9}}$

○ 例：$f(z) = \frac{z^3+5}{z(z-1)^3}$ $\boxed{\text{板書 10}}$

◎ 留数定理

Thm.[留数定理] D：単連結，$f(z)$：孤立特異点 a_i を除いて D で正則 $\Rightarrow$ $\boxed{\text{板書 11}}$

○ 例：$I = \oint_C \frac{dz}{2\pi i}\frac{z^3+5}{z(z-1)^3}$ $\boxed{\text{板書 12}}$

○ Thm.　$f(z)$ は $z = a_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, b_j $(j = 1, \ldots, m)$ を除いて全平面で正則 $\Rightarrow$ $\oint_C \frac{dz}{2\pi i} f(z) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}_{z=a_i} f(z) = -\sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}_{z=b_j} f(z) - \mathrm{Res}_{z=\infty} f(z)$.

$\boxed{\text{板書 13}}$

・例：上の例 $\boxed{\text{板書 14}}$

◎ 実積分への応用

○ Thm. $\boxed{\text{板書 15}}$

Prop. $\boxed{\text{板書 16}}$

Def. Cauchy の主値 $\boxed{\text{板書 17}}$

例 $\boxed{\text{板書 18}}$

○ 実積分への応用例

実関数の範囲内で計算できるものもあるが (原始関数が求まる，何らかの工夫)，ここでは複素関数を用いて計算する．

- 例 1 : $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}$ $(a \in \mathbb{C}, |a| \neq 0,1)$ $\boxed{\text{板書 19}}$
- 例 2 : $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$ $\boxed{\text{板書 20}}$
- 例 3 : $I = \int_0^{\infty} \frac{\cos bx}{x^2+a^2} dx$ $(a, b > 0)$ $\boxed{\text{板書 21}}$
- 例 4 : $I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ $\boxed{\text{板書 22}}$
- 例 5 : Gauss 積分 $\boxed{\text{板書 23}}$

◎ § 5 で覚える事 $\boxed{\text{板書 24}}$

§ 6　各種の表示

多項式　和　　　　　　　⇝ 級数展開

　　　　零点 → 因数分解 ⇝ 無限乗積展開

$\frac{\text{多項式}}{\text{多項式}}$　極　　→ 部分分数 ⇝ 部分分数展開

◎ 級数展開

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$: Taylor 展開

$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$: Laurent 展開

例 : $\exp z$, $\cos z$, $\sin z$, $\log(1+z)$ $\boxed{\text{板書 1}}$

$\tan z$ の展開は？

○ Bernoulli 数 B_n を $\frac{t}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}$ $(|t| < 2\pi)$ と定義する．

注 : 色々な流儀の定義があるので注意．

・$B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $\cdots$.
　$B_{2n+1} = 0$ $(n > 0)$

○ 例

- $z \cot z$ $\boxed{\text{板書 2}}$

$\because$ $\cot\frac{z}{2} = \frac{\cos\frac{z}{2}}{\sin\frac{z}{2}} = i\,\frac{e^{iz}+1}{e^{iz}-1} = i\left(\frac{2}{e^{iz}-1}+1\right)$, $\frac{z}{2}\cot\frac{z}{2} = \frac{iz}{e^{iz}-1} + i\,\frac{z}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{(iz)^n}{n!} + i\,\frac{z}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!}$ □

- $\tan z$ $\boxed{\text{板書 3}}$ $\because$ $\tan z = \cot z - 2\cot 2z$

◎ 部分分数展開

○ 例 $\boxed{\text{板書 4}}$

◎ 無限乗積展開

Def. $\mathbb{C} \ni \alpha_n \neq 0$, $p_n = \prod_{k=0}^{n} \alpha_k = \alpha_0 \alpha_1 \cdots \alpha_n$

　無限積 $p = \prod_{n=0}^{\infty} \alpha_n \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} p_n = p$

Thm. $\prod_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ が収束 $\Leftrightarrow {}^\forall\varepsilon > 0, {}^\exists N > 0$, s.t.
　$n > m \geq N \Rightarrow |\alpha_{m+1}\alpha_{m+2}\cdots\alpha_n - 1| < \varepsilon$

Cor. $\prod_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ が収束 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 1$. $\alpha_n = 1 + a_n$ と書くと，$\prod_{n=0}^{\infty}(1+a_n)$ 収束 $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Thm. $\prod_{n=0}^{\infty}(1+|a_n|)$ 収束 $\Rightarrow \prod_{n=0}^{\infty}(1+a_n)$ 収束．
　この時 $\prod_{n=0}^{\infty}(1+a_n)$ は絶対収束するという．

Thm. $\prod_{n=0}^{\infty}(1+|a_n|)$ 収束 $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ 収束

Thm. $0 \leq |a_n| < 1$ の時，
　$\prod_{n=0}^{\infty}(1-|a_n|)$ 収束 $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ 収束

Thm. 絶対収束する無限積は掛ける順番を変えても値は変わらない．

一様収束なども同様に定義される．

Thm. $f_n(z) : D$ で正則．$f(z) = \prod_{n=0}^{\infty} f_n(z) : D$ で広義一様収束 $\Rightarrow f(z) : D$ で正則．

○ 例 $\boxed{\text{板書 5}}$

◎ 積分表示

Thm. $f(z, w) : z \in D$, $w \in C$ で連続．w を固定した時，z について正則．$\Rightarrow$ $\boxed{\text{板書 6}}$

注 : C が ∞ まで延びている場合や，C の端点で f が有界でない場合でも，積分が z について一様収束していれば OK.

○ 例

- 対数関数 $\boxed{\text{板書 7}}$
- ガンマ関数 $\Gamma(z)$ $\boxed{\text{板書 8}}$

$\because$ $\int_1^{\infty}$ 部分 : $R > 1$. $0 < \mathrm{Re}\, z \leq R$ で $|e^{-t}t^{z-1}| \leq e^{-t}t^{R-1}$. $\int_1^{\infty} e^{-t}t^{R-1}dt$ 収束．$\therefore$ 一様収束．

$\int_0^1$ 部分 : $\varepsilon > 0$. $\varepsilon \leq \mathrm{Re}\, z$ で $|e^{-t}t^{z-1}| \leq e^{-t}t^{\varepsilon-1}$. $\int_0^1 e^{-t}t^{\varepsilon-1}dt$ 収束．$\therefore$ 一様収束． □

・$\Gamma'(z) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}\log t dt$
　$\Gamma^{(n)}(z) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}(\log t)^n dt$.

・$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ $\because$ $\boxed{\text{板書 9}}$

・$\Gamma(1) = 1$ $\because$ $\boxed{\text{板書 10}}$

・$\Gamma(n+1) = n!$ $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$

◎ 漸近展開 : $z \sim \infty$ の様子

Def. $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{z^k}$. 形式的に $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ (収束しなくてもよい). $\arg z$ のある範囲に対して $\lim_{|z|\to\infty} z^n\bigl(f(z) - S_n(z)\bigr) = 0$ の時，その $\arg z$ の範囲で $f(z) \sim S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$.

注 : $f(z)$ が漸近展開を持てば一意的．異なる関数が同じ漸近展開を持つ事がある．

注 : $f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$, $g(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{z^n} \Rightarrow f(z) + g(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n+b_n}{z^n}$, $f(z)g(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}$, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

注 : 項別微分・項別積分は必ずしもできない．

○ 例

- ガンマ関数

・$\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x}\, x^x e^{-x}\left(1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} - \frac{139}{51840x^3} + \cdots\right)$

特に $\boxed{\text{板書 11}}$

特に $x = n \in \mathbb{Z}_{>0}$ の時，$\boxed{\text{板書 12}}$ Stirling の公式

○ 鞍点法

鞍点 : $f'(z) = 0$ となる点

例 : $f(z) = z^2$ $\boxed{\text{板書 13}}$

・$I(z) = \int_C e^{-zf(\zeta)}d\zeta$ の $z \to \infty$ の様子

$\mathrm{Re}\, zf(\zeta)$ が極小になる様に $f(\zeta)$ の鞍点 ζ_0 を通る様に変形できるとする． $\boxed{\text{板書 14}}$

$|z| \to \infty$ では $\zeta = \zeta_0$ の近くがきく． $\boxed{\text{板書 15}}$

- 例 : ガンマ関数 $\boxed{\text{板書 16}}$

◎ § 6 で覚える事 $\boxed{\text{板書 17}}$

§ 7　解析接続

◎ 解析接続

Thm.[一致の定理] $f(z), g(z)$：D で正則．$^{\exists}b_n \in D$ s.t. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \in D$, $f(b_n) = g(b_n)$ $(^{\forall}n) \Rightarrow D$ で $f(z) = g(z)$

Cor.　$f(z), g(z)$：D で正則．$D \supset D'$ or $D \supset C$ で $f(z) = g(z) \Rightarrow D$ で $f(z) = g(z)$

Def. D で正則な $f(z)$ を，$D \subset D'$ でも正則になる様に定義域を拡げる事を解析接続という．

目一杯定義域を拡大した時，その領域を存在領域，その境界を自然境界という．

注：可能ならば一意的．関数関係は不変．存在領域が単連結ならば一価

◎ 解析接続の方法

巾級数，積分表示，鏡像原理，関数等式，など

(1) 巾級数 (一般的だが実用的ではない) $\boxed{\text{板書 1}}$

直接接続という．各巾級数を関数要素という．

Thm. 収束円上には必ず特異点がある．　$\boxed{\text{板書 2}}$ $\square$

(2) 積分表示　例 $\log z = \int_{1\,C}^{z} \frac{dt}{t}$

(3) 鏡像原理

(4) 関数等式

例：ガンマ関数 $\boxed{\text{板書 3}}$

$\therefore z \neq 0, -1, -2, \cdots$ で定義された．

・$z = 0, -1, -2, \cdots$ は 1 位の極で，$\mathrm{Res}_{z=-n}\Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}$．　$\boxed{\text{板書 4}}$ $\square$

◎ ガンマ関数の各種表示

○ 積分表示

・ $\boxed{\text{板書 5}}$

・Hankel の積分表示：$\Gamma(z) = \frac{e^{-i\pi z}}{2i \sin \pi z} \int_C e^{-\zeta}\zeta^{z-1} d\zeta$
　$(z \notin \mathbb{Z})$ $\boxed{\text{板書 6}}$

○ 無限乗積表示　$\mathrm{Re}\, z > 0$

・[Gauss] $\Gamma(z) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!\, n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$

・[Euler] $\Gamma(z) = \frac{1}{z} \prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^z \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1}$

・[Weierstrass] $\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$

よって $\Gamma(z)$ は零点を持たない．γ は Euler の定数，$\gamma \overset{\mathrm{def}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n\right) = 0.5772156\cdots$．

● これらを用いると

・$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$

◎ ベータ関数　$B(x, y)$ $\boxed{\text{板書 7}}$

・$t = 1 - u$ と変数変換すると，$B(x, y) = B(y, x)$

・$t = \sin^2\theta$ と変数変換すると，
　$B(x, y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}\theta \cos^{2y-1}\theta\, d\theta$

・Γ 関数との関係 $\boxed{\text{板書 8}}$

○ $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ で解析接続

○ 色々な積分が Γ, B を用いて表される．

◎ Riemann のゼータ関数

○ $\boxed{\text{板書 9}}$

・無限乗積 $\zeta(z) = \prod\limits_{p:\ \text{素数}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^z}}$ $(\mathrm{Re}\, z > 1)$

・$^{\forall}z \neq 1$ に解析接続される．例 $\boxed{\text{板書 10}}$

◎ § 7 で覚える事 $\boxed{\text{板書 11}}$

第 2 部：常微分方程式

常微分方程式を解けるようになろう！

§ 1　常微分方程式の基礎概念

◎ 自然現象の規則性 $\Rightarrow$ 方程式として表される

例 $\boxed{\text{板書 1}}$

・ある量 x を与えた時に別のある量 y はどの様に定まるか？

いっぺんに求める事は難しいが，x を少し変化させた時に y がどの様に変化するかは分かる事がある．つまり，x を微小量 Δx だけ変化させた時の y の変化量 $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$ が分かる場合がある．

この場合，$\Delta x \to 0$ とすると微分方程式が得られる．

○ 例

● 放射性物質の崩壊過程：放射性物質は単位時間当たりある確率 λ で崩壊する．時刻 t での原子の数を $N(t)$ 個とすると，短い時間 Δt の間に $N\lambda\Delta t$ 個の原子が崩壊する．$\boxed{\text{板書 2}}$

● 力 $\vec{F}$ を短い時間 Δt の間加えると運動量 $\vec{p}$ が変化する．$\boxed{\text{板書 3}}$

● xy 平面上の原点中心の円が満たす式 $\boxed{\text{板書 4}}$

● 弦の振動 $\boxed{\text{板書 5}}$：偏微分方程式 (独立変数が 2 個以上) $\leftrightarrow$ 常微分方程式 (独立変数が 1 個)

◎ 解いてみる

● $y = y(x)$, $\frac{dy}{dx} = ay$ (a：定数) $\boxed{\text{板書 6}}$

解は無数にある．一般解という．$y = y(x)$ を xy 平面に書いたものを解曲線という．

● 放射性物質の数

$t = 0$ で $N(0) = N_0$ とする (初期条件) $\boxed{\text{板書 7}}$

● $y' = \sqrt{y}$ $\boxed{\text{板書 8}}$

(i) の解はこの形をしていない．特異解という．

◎ 用語

○ 微分方程式：未知関数 (従属変数) とその導関数を含む方程式

・常微分方程式：独立変数が 1 つで，その変数による導関数を含む方程式

・偏微分方程式：独立変数が複数個あり，それらの変数に関する偏微分を含む方程式

・未知関数が 1 つの時，単独常微分方程式という．
　$y = y(x)$, $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$, $\cdots$, $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}$,
　$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$

・未知関数が複数個ある時，連立常微分方程式という．
　$y_j = y_j(x)$ $(j = 1, \ldots, \ell)$,
　$F_i(x, \{y_j\}, \{y'_j\}, \ldots, \{y_j^{(n)}\}) = 0$ $(i = 1, \ldots, \ell')$
　通常は $\ell' = \ell$ で，以下ではそう仮定する．

○ 型

$F(x, y, y', \cdots) = 0$

・F に含まれる導関数の最高階数 n を微分方程式の階数という．$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$ (で $y^{(n)}$ が確かに入っている)

・F が $y, y', \cdots, y^{(n)}$ について多項式の時，$y^{(n)}$ の次数 p を微分方程式の次数という．

例：$y''^3 + 2y'^4 + y^6 + 4 = 0$ は 2 階 3 次

・F が $y, y', \cdots, y^{(n)}$ の全てについて 1 次の時，微分方程式は線型，そうでない場合は非線型という．

・$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$ が $y^{(n)}$ について解く事ができて $y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$ と表される時，微分方程式は正規形，そうでない場合は非正規形という．
例：${y'}^2=y$．$y'=\pm\sqrt{y}$ と書き直すと，2 つの正規形を合わせたものに等しくなる．
・連立常微分方程式は $F_i(x,\{y_j\},\{y'_j\})=0$ $(i=1,\ldots,\ell)$ の時 1 階と呼ばれ，更に $y'_i=f_i(x,\{y_j\})$ と表される時は正規形であるという．
○ 解
・$F(x,y,y')=0$ の解 $y=\varphi(x)$ とは：
$\varphi(x)$ が定義されているある区間を I とする (解の定義区間という)．F が定義されているある領域内の点 $(x,\varphi(x),\varphi'(x))$ に対して，$F(x,\varphi(x),\varphi'(x))=0$ が $x\in I$ について恒等的に成立する事．
・解の初期条件
$y'_i=f_i(x,\{y_j\})$ $(i=1,\ldots,\ell)$ の解は ℓ 個の任意定数を含む．(大抵の場合，) y_i の初期値 $y_i(x_0)=y_{i0}$ を与えれば (初期条件という)，ℓ 個の定数が決まり，解が一意的に求まる．
$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$ に対しては，初期条件として $y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y'_0,\cdots, y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$ を与えれば良い．
・一般解：(有限個の) 任意定数を含む解
・特殊解 (解解)：任意定数の値を定めて得られる解
・特異解：任意定数にどんな値を取らせても一般解から得られない解
例 $y'=\sqrt{y}$ $\boxed{\text{板書 9}}$
◎ 解の存在と一意性
次の微分方程式と初期条件
$(*)$：$y'_i=f_i(x,\{y_j\})$ $(i=1,\ldots,\ell)$
$(**)$：$x=x_0$ で $(y_1,\cdots,y_\ell)=(y_{10},\cdots,y_{\ell 0})$
を考える．
・解はあるのか？：存在
・解は 1 つだけか？：一意性
・どうやって求めるか？：解法 → §2 以降
○ 定理がある：Cauchy-Lipschitz の存在及び一意性定理
「Lipschitz 条件など ⇒ 解が存在し，一意的」
注：逆は言えない．
注：物理に現れる問題の多くは，この定理の仮定を満たすので，解の存在と一意性があると思って差し支えない．
○ 解の延長
上の定理は局所的存在定理．解の定義区間を延長して拡げる事ができる．独立変数が複素変数の場合には，解の延長は解析接続を用いればよい (実変数よりも簡単！)．
○ 高階 → 1 階連立
$$\begin{cases} y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}) \\ y(x_0)=y_0,\, y'(x_0)=y'_0,\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)} \end{cases}$$
$\boxed{\text{板書 10}}$ つまり $z'_i=f_i(x,\{z_j\})$ の形
・連立の高階も同様に 1 階連立の形にもっていける．
・よって解の存在・一意性の定理が使える．
◎ § 1 で覚える事 $\boxed{\text{板書 11}}$

§ 2　(1 階の) 微分方程式の初等的解法

◎ 色々なタイプの微分方程式
(1) 変数分離形：$y'=f(x)g(y)$
[解法] $\boxed{\text{板書 1}}$
・あとは積分が具体的に求まればよい．
・$g(y)=0$ の根 $y=y_0$ も解 (特殊解または特異解)．
・$\frac{\frac{dy}{dx}}{g(y)}=f(x)$ の代わりに形式的に $\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx$ と書く事が多い．
例 (i) $y'=ay$ $\boxed{\text{板書 2}}$ (ii) $y'=\frac{y}{x}$ $\boxed{\text{板書 3}}$
(iii) $y'=(x+y)^2$ $\boxed{\text{板書 4}}$
(2) 同次形：$y'=f(\frac{y}{x})$
[解法] $\boxed{\text{板書 5}}$
例 (i) $y'=\frac{y}{x}$ $\boxed{\text{板書 6}}$ (ii) $y'=\frac{x^2+y^2}{2xy}$ $\boxed{\text{板書 7}}$
(iii) $y'=\frac{8x-y-4}{x+y-5}$ $\boxed{\text{板書 8}}$
・$X=\lambda x, Y=\lambda y$ としても微分方程式 $y'=f(\frac{y}{x})$ は不変．解曲線は相似な解曲線に移る．
(3) 1 階線型：$y'+p(x)y=f(x)$
$f(x)\equiv 0$ の時は斉次，$f(x)\not\equiv 0$ の時は非斉次という．
[解法] $\boxed{\text{板書 9}}$
例：$y'+2y=5e^{3x}$ $\boxed{\text{板書 10}}$
例：速度に比例する抵抗を受ける物体の落下 $\boxed{\text{板書 11}}$
(4) 完全微分形：$Q(x,y)\frac{dy}{dx}+P(x,y)=0$ で，
$P(x,y)=\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}, Q(x,y)=\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}$ と表される場合
[解法] $\boxed{\text{板書 12}}$
・$Q\frac{dy}{dx}+P=0$ の代わりに $Pdx+Qdy=0$ と書く事が多い．
・2 変数関数 $U(x,y)$ において，x,y を微小量 $\Delta x,\Delta y$ だけ変えた時の U の変化は $\Delta U=U(x+\Delta x,y+\Delta y)-U(x,y)=\frac{\partial U}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial U}{\partial y}\Delta y+$ (高次) である．U の全微分を $dU=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy$ と定義する．
・Thm. $P=\frac{\partial U}{\partial x}, Q=\frac{\partial U}{\partial y} \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$
注：これは物理数学 I でやった「$\vec{a}=-\mathrm{grad}\,\phi \Leftrightarrow \mathrm{rot}\,\vec{a}=\vec{0}$」の特別な場合である．
∵ ⇒： OK. ⇐：U を具体的に 1 つ作ればよい．
$\boxed{\text{板書 13}}$ □
注：$Q=\frac{\partial U}{\partial y}$ から出発すれば $U(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(u,y_0)du+\int_{y_0}^{y}Q(x,v)dv+U(x_0,y_0)$ を得るが，その差は $\boxed{\text{板書 14}}$
注：U に定数を足しても構わない．
・$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ が成立していなくても，$\frac{\partial(MP)}{\partial y}=\frac{\partial(MQ)}{\partial x}$ となる $M=M(x,y)$ (積分因子と言う) が見つかれば，完全微分形になる．
注：積分因子は存在するとしても一通りには決まらない．
・一般に同次形では $M=\frac{1}{xP+yQ}$ に取ればよい．
例 (i) $(4x+3y)dx+(3x+2y)dy=0$ $\boxed{\text{板書 15}}$
(ii) $ydx-xdy=0$ $\boxed{\text{板書 16}}$
(iii) $(2x-y)dx+(2y+x)dy=0$ $\boxed{\text{板書 17}}$
・同次形の場合の様に，M を一般に求められる場合がある．例えば，$(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x})/Q=\varphi(x)$ なら $M=M(x)=e^{\int\varphi(x)dx}$ に取ればよいし，$(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x})/P=\psi(y)$ なら $M=M(y)=e^{-\int\psi(y)dy}$．この他，$M=x^ny^m$ と仮定してやってみるなど．
(5) 高次 (非線型) 方程式
・特殊な置き換えで，変数分離形や線型 (1 階とは限らない) にできる事がある．
・$y'=p$ とおき，p を変数と考えると解き易くなる事がある．
・特異解を持つ事がある．
◎ § 2 で覚える事 $\boxed{\text{板書 18}}$

§ 3　定数係数の線型微分方程式

○ 解の存在と一意性は保証される．
例 ・空気抵抗を受けた強制振動 $\boxed{\text{板書 1}}$
　・RLC 回路 $\boxed{\text{板書 2}}$

§ 3.1　2 階斉次

◎ $ay'' + by' + cy = 0$ (a, b, c 定数，$a \neq 0$)
$\to y'' + py' + qy = 0$ (p, q 定数)
これを幾つかの方法で解いてみる．
○ [解法その 1] $y(x) = z(x)e^{-\frac{p}{2}x}$ とおくと，$y' = (z' - \frac{p}{2}z)e^{-\frac{p}{2}x}$, $y'' = (z'' - pz' + \frac{p^2}{4}z)e^{-\frac{p}{2}x}$ となり，$y'' + py' + qy = (z'' + (q - \frac{p^2}{4})z)e^{-\frac{p}{2}x}$ となるので，$z'' + (q - \frac{p^2}{4})z = 0$ を得る．よってあとは $y'' + qy = 0$ の形 (標準型という) のものが解ければよい．$q > 0$, $q = 0$, $q < 0$ で場合分けをして解く．
○ [解法その 2] $y'' + py' + qy = 0$ の勝手な解 y_1, y_2 と定数 c に対して，$\boxed{\text{板書 3}}$
よって $y'' + py' + qy = 0$ の解の空間はベクトル空間になっている．和とスカラー倍は通常の関数の足し算と定数倍である．
・初期条件 $(y(x_0), y'(x_0)) = (1, 0)$ を満たす解を y_1，$(y(x_0), y'(x_0)) = (0, 1)$ を満たす解を y_2 とすると，初期条件 $(y(x_0), y'(x_0)) = (c_1, c_2)$ を満たす解は $\boxed{\text{板書 4}}$
よってこの y_1 と y_2 は基底となっており，解の空間の次元は 2 である．
・この y_1 と y_2 でなくても，一次独立な 2 つの解 y_1 と y_2 (基本解という) に対して，一般解は $\boxed{\text{板書 5}}$
・ここで 2 つの関数 $f_1(x)$ と $f_2(x)$ が一次独立とは，「$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) \equiv 0$ (x の関数として) $\Leftrightarrow c_1 = c_2 = 0$」となる事である．一次独立でない時には一次従属という．$\boxed{\text{板書 6}}$
$W[f_1, f_2] \stackrel{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} = f_1 f_2' - f_1' f_2$ を Wronski 行列式，ロンスキアン (Wronskian) という．
・つまり $y'' + py' + qy = 0$ を解きたければ一次独立な解を 2 つ見つければよい．
$y = e^{\lambda x}$ という形の解を探してみる．(複素数の範囲で！) $\boxed{\text{板書 7}}$
(i) $\frac{p^2}{4} - q < 0$ の時 $\boxed{\text{板書 8}}$　“減衰振動”
(ii) $\frac{p^2}{4} - q > 0$ の時 $\boxed{\text{板書 9}}$　“過減衰”
(iii) $\frac{p^2}{4} - q = 0$ の時 $\lambda = -\frac{p}{2}$
$y = e^{-\frac{p}{2}x}$ という解 1 つしか見つかっていない．もう 1 つ解を見つけたい．$y = xe^{-\frac{p}{2}x}$ を考えてみると
$\boxed{\text{板書 10}}$　“臨界減衰”　$\boxed{\text{板書 11}}$
○ [解法その 3] $\boxed{\text{板書 12}}$
1 階線型を 2 回解けばよい．
○ [解法その 4] 1 階連立に書き直す．→ § 5
○ 例・$y'' - 5y' + 6y = 0$ $\boxed{\text{板書 13}}$
　・$y'' + 4y' + 5y = 0$ $\boxed{\text{板書 14}}$
　・$y'' - 6y' + 9y = 0$ $\boxed{\text{板書 15}}$

§ 3.2　2 階非斉次

◎ $y'' + py' + qy = f(x)$
$y = Y(x)$ という解 (特解) が 1 つ見つかったとする．
$\boxed{\text{板書 16}}$ 斉次方程式である！
その基本解を y_1, y_2 とすると $\boxed{\text{板書 17}}$
よって特解を (1 つ) 見つけられればよい．
特解を幾つかの方法で見つけてみる．
○ [解法その 1] 定数変化法
斉次方程式の一般解 $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ に対して，$y(x) = u_1(x) y_1(x) + u_2(x) y_2(x)$ としてみる．特解を 1 つ見つければよいので，2 つの関数 u_1, u_2 は必要ではなく，その間に条件を 1 つおいて構わない．普通は $u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0$ とおく．
○ [解法その 2]
$f(x)$ に応じて適当な形の解を仮定して探す．
$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ の解を λ_1, λ_2 とする．
(1) $f(x) = $ (x の n 次式) $\boxed{\text{板書 18}}$
(2) $f(x) = Ae^{\alpha x}$ $\boxed{\text{板書 19}}$
(3) $f(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$ $\boxed{\text{板書 20}}$
(4) $f(x) = $ (n 次式) $\times$ (指数，三角関数) $\boxed{\text{板書 21}}$
(5) 上の形の式の和になっている時は，仮定する形も和にする．
○ [解法その 3] $\boxed{\text{板書 22}}$
1 階線型を 2 回解けばよい．
○ [解法その 4] 1 階連立に書き直す．→ § 5
○ 例・$y'' - 4y' + 3y = x$ $\boxed{\text{板書 23}}$
　・$y'' - 4y' + 3y = \cos x$ $\boxed{\text{板書 24}}$
　・$y'' - 4y' + 3y = 3e^{2x} + 4e^x + 2e^{3x}$ $\boxed{\text{板書 25}}$
　・強制振動 $\boxed{\text{板書 26}}$

§ 3.3　高階斉次

◎ $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$
($a_0, \ldots, a_n$：定数，$a_0 \neq 0$)
$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$
($p_1, \ldots, p_n$：定数)
§ 3.1 の方法をそれぞれ拡張してみる．
○ [解法その 1] $y^{(n-1)}$ の項を消せるが，それ以上はどうしようもない．
○ [解法その 2] $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$ の解の空間はベクトル空間になっており，その次元は n である．つまり一次独立な解 $y_1, \cdots, y_n$ に対して，一般解は $\boxed{\text{板書 27}}$
・ここで n 個の関数 $f_1(x), \cdots, f_n(x)$ が一次独立とは「$c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x) \equiv 0$ (x の関数として) $\Leftrightarrow c_1 = \cdots = c_n = 0$」となる事である．一次独立でない時には一次従属という．$\boxed{\text{板書 28}}$
・よって $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} y' + p_n y = 0$ を解きたければ，一次独立な解を n 個見つければよい．
$y = e^{\lambda x}$ という形の解を探してみる．(複素数の範囲で！) $\boxed{\text{板書 29}}$
λ の n 個の値 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ が全て異なる時は，$e^{\lambda_1 x}, \cdots, e^{\lambda_n x}$ は独立な解．$\boxed{\text{板書 30}}$
複素根 $\alpha \pm i\beta$ に対しては，$e^{(\alpha+i\beta)x}$ と $e^{(\alpha-i\beta)x}$ の代わりに $e^{\alpha x}\cos\beta x$ と $e^{\alpha x}\sin\beta x$ を取ってよい．
$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ の内に等しいものがある場合：λ が m 重根の場合は，$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, x^2 e^{\lambda x}, \cdots, x^{m-1}e^{\lambda x}$ が独立な解．
○ [解法その 3] $\boxed{\text{板書 31}}$
1 階線型を n 回解けばよい．
○ [解法その 4] 1 階連立に書き直す．→ § 5
○ 例・$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$ $\boxed{\text{板書 32}}$

・$y''' + 3y'' + 4y' + 2y = 0$ 板書 33

・$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ 板書 34

§ 3.4　高階非斉次

◎ $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}y' + p_n y = f(x)$

§ 3.2 と同様に特解 $y = Y(x)$ が 1 つ求まれば，板書 35
よって特解を (1 つ) 見つけられればよい．

§ 3.2 の方法をそれぞれ拡張してみる．

○ [解法その 1] 定数変化法

斉次方程式の一般解 $y(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x)$ に対して，$y(x) = u_1(x)y_1(x) + \cdots + u_n(x)y_n(x)$ としてみる．特解を 1 つ見つければよいので，n 個の関数 $u_1, \cdots, u_n$ は必要ではなく，その間に条件を $n-1$ 個おいて構わない．

○ [解法その 2]

$f(x)$ に応じて適当な形の解を仮定して探す．

$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \cdots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0$ の解を $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ とする．

(1) $f(x) = (x$ の m 次式$)$ 板書 36

(2) $f(x) = Ae^{\alpha x}$ 板書 37

(3) $f(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$ 板書 38

(4) $f(x) = (m$ 次式$) \times ($指数，三角関数$)$ 板書 39

(5) 上の形の式の和になっている時は，仮定する形も和にする．

○ [解法その 3] 板書 40

1 階線型を n 回解けばよい．

○ [解法その 4] 1 階連立に書き直す．→ § 5

○ 例：$y'''' + 2y'' + y = e^x$ 板書 41

◎ § 3 で覚える事 板書 42

§ 4　変数係数の線型微分方程式

○ 係数関数が連続ならば，解の存在と一意性は保証される．

§ 4.1　一般論

◎ 斉次

$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$

§ 3.1, § 3.3 と同様に，解の空間はベクトル空間になっており，その次元は n である．つまり一次独立な解 $y_1, \cdots, y_n$ に対して，一般解は 板書 1
よって，一次独立な解を n 個見つければよい．

◎ 非斉次

$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x)$

§ 3.2, § 3.4 と同様に，特解 $y(x) = Y(x)$ が 1 つ求まれば，板書 2
よって特解を (1 つ) 見つけられればよい．

○ 定数変化法：§ 3.2, § 3.4 と同様である．

§ 4.2　2 階

◎ 斉次　$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

○ 標準型：y' の項を消せる．

○ 定数変化法：$y(x) = y_1(x)$ という解が 1 つ見つかったとする．板書 3

○ より一般的な解き方については → § 6

○ 例：$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{3}{x^2}y = 0$ 板書 4

◎ 非斉次　$y'' + p(x)y' + q(x) = f(x)$

○ 例：$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{3}{x^2}y = x^2$ 板書 5

◎ § 4 で覚える事 板書 6

§ 5　連立線型微分方程式

○ 係数関数が連続ならば，解の存在と一意性は保証される．1 階：$\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},\ A = (a_{ij}(x)),\ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}.$$

例 ・定電磁場中の荷電粒子の運動 板書 1

・ばねにつながれた質点系 板書 2

・単独高階 板書 3

§ 5.1　定数係数

◎ $\vec{y}' = A\vec{y}$ (A：定数行列)

○ 例：$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 \\ y_2' = -y_1 + 4y_2 \end{cases}$ 幾つかの方法で解いてみる．

・[解法その 1] 板書 4

・[解法その 2] 板書 5

簡単な形にしよう．→ 対角行列 板書 6

・[解法その 2′] 板書 7

・[解法その 3] 行列の指数関数を利用

○ 例：$y'' - 5y' + 6y = 0$ 板書 8

§ 5.2　一般

○ 1 階：$\vec{y}' = A(x)\vec{y} + \vec{b}(x)$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},\ A = (a_{ij}(x)),\ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}.$$

◎ 斉次　$\vec{y}' = A(x)\vec{y}$

§ 3.1, § 3.3, § 4.1 と同様に，解の空間はベクトル空間になっており，その次元は n である．つまり一次独立な解 $\vec{y}_1, \cdots, \vec{y}_n$ に対して，一般解は 板書 9
よって，一次独立な解を n 個見つければよい．

○ ロンスキアン 板書 10

注：以前の $W[y_1, \cdots, y_n]$ と同じ記号だが混乱はないだろう．実際同じものである．

注：関数 (抽象的なベクトル) としての一次独立であるが，この場合 $\mathbb{R}^n$ のベクトルとしての一次独立と同じになっている．$\vec{y}_1, \cdots, \vec{y}_n$ が一次独立の場合，$c_1\vec{y}_1 + \cdots + c_n\vec{y}_n$ は x の関数として $\vec{0}$ でないだけではなく，全ての x に対して $\vec{0}$ にならない．何故なら，ある x_0 で $\vec{0}$ になったとすると，$c_1\vec{y}_1 + \cdots + c_n\vec{y}_n$ は $x = x_0$ で $\vec{0}$ という初期条件を満たす解になるが，$\vec{y} = \vec{0}$ も同じ初期条件を満たす解なので，解の一意性より $c_1\vec{y}_1 + \cdots + c_n\vec{y}_n = \vec{0}$ となり，一次独立性に反するからである．

○ $Y(x) = (\vec{y}_1, \cdots, \vec{y}_n)$：基本行列，$W = |Y| \neq 0$

板書 11

・Y：基本行列，P：正則な定数行列 ⇒ YP：基本行列

∵ 板書 12

・Y_1, Y_2：基本行列 ⇒ $^\exists P$：正則な定数行列 s.t. $Y_2 = Y_1 P$

∵ 板書 13

○ $\vec{y}' = A\vec{y}$ の解は，基本行列を $Y(x)$ とすると，板書 14

◎ 非斉次　$\vec{y}' = A(x)\vec{y} + \vec{b}(x)$

§ 3.2, § 3.4, § 4.1 と同様に，特解 $\vec{y}(x) = \vec{y}_{\text{特解}}(x)$ が 1 つ求まれば，板書 15
よって特解を (1 つ) 見つけられればよい．

○ 定数変化法：板書 16

◎ § 5 で覚える事 板書 17

§ 6　級数による解法

○ $y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f(x)$
（$\leftarrow$ $y^{(n)}$ の係数が 1）

・$p_1(x),\ \ldots,\ p_n(x), f(x)$ が $x=a$ で正則の時，$x=a$ をこの微分方程式の通常点という．

・通常点 $(x=a)$ の近くで解は Taylor 展開できて次の形の解がある．$\boxed{\text{板書 1}}$

○ $y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0$

・$p_k(x)$ $(k=1,\ldots,n)$ が $x=a$ で高々 k 位の極を持つだけの時，$x=a$ をこの微分方程式の確定特異点という．$x=a$ が $p_1(x),\ \ldots,\ p_n(x)$ のどれかの特異点であるが確定特異点でない時，不確定特異点という．有限個の確定特異点を持ちそれ以外に特異点を持たない時，Fuchs 型微分方程式という．

・$x=a$ が確定特異点という事は，$(x-a)^n y^{(n)}+(x-a)^{n-1}\tilde{p}_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+(x-a)\tilde{p}_{n-1}(x)y'+\tilde{p}_n(x)y=0$ という形で，$\tilde{p}_k(x)$ $(k=1,\ldots,n)$ が $x=a$ で正則という事.

・確定特異点 $(x=a)$ の近くでは次の形の解がある．$\boxed{\text{板書 2}}$

・$\tilde{p}_k(x)$ を $x=a$ のまわりで展開した式とこの y の式を代入して，$x-a$ の各巾の係数を 0 とおくと，λ に対する式と a_m に対する漸化式が得られ，λ と a_m が順次定まる．

◎ 2 階　$(x-a)^2y''+(x-a)p(x)y'+q(x)y=0$
$p(x), q(x)$ は $x=a$ で正則.

$\boxed{\text{板書 3}}$ (指数) 決定方程式．λ が決まる，$\lambda=\lambda_1,\lambda_2$．特性指数という．$\boxed{\text{板書 4}}$ a_n に対する漸化式

・$\lambda_1-\lambda_2\notin\mathbb{Z}$ の時：λ_1 と λ_2 それぞれに対して漸化式から a_n を定めた解を y_1, y_2 とすると，y_1 と y_2 は一次独立な 2 つの解.

・$\lambda_1-\lambda_2\in\mathbb{Z}$ の時：$\lambda_1\geq\lambda_2$ とする．λ_1 と λ_2 それぞれに対して漸化式から a_n を定めた解を y_1, y_2 とする．y_1 と y_2 が一次独立ならばそれでよい．一次従属ならば，$y(x)=u(x)y_1(x)$ とおいて $u(x)$ を求める方法 (定数変化法) や，Frobenius の方法がある．

○ 例：$y''+a^2y=0$ $(a>0)$ $\boxed{\text{板書 5}}$

○ 例：超幾何微分方程式 $\boxed{\text{板書 6}}$

○ 級数による解法は，解の 1 点の近くでの局所的な性質を調べるのに適している．

・これに対して，解を $y(x)=\int_C K(x,t)u(t)dt$ の形において求める方法を積分変換による方法といい，解の全域での性質を調べたり，解析接続を行うのに便利である．

◎ § 6 で覚える事 $\boxed{\text{板書 7}}$

物理数学IIの宿題 [ver.2.2] (授業促進のためのノート [ver.2.1.1] に準拠)

以下の点数のついた問題 (合計 120 点) をレポート課題とする (提出・締切等については授業で述べる)。問題文は (わざと) 手短かに書いてある。ミスプリを見つけたら連絡して下さい。

第1部：複素関数

§1の宿題

1. (2点) 図示せよ。(1) $|z-2| \le 3$　(2) $\frac{1}{6}\pi < \arg z < \frac{1}{3}\pi$　(3) $\mathrm{Im}z > 0$　(4) $\mathrm{Re}z^2 \le 1$
2. (2点) (1) $1+i\sqrt{3}$ の極形式　(2) $1+i$ の3乗根
3. xy 平面上で原点を出発して x 軸の正の向きに距離 L 進み，次に進行方向左 30° に向きを変えて $2^{-1}L$ 進み，更に進行方向左 30° に向きを変えて $2^{-2}L$ 進み，更に進行方向左 30° に向きを変えて $2^{-3}L$ 進み，という事を繰り返した場合の到達点。
4. (2点) de Moivre の定理
5. $n \in \mathbb{Z}_{>0} = \{1, 2, \cdots\}$ に対して，$x^n = 1$ を解け。
6. $n = 2, 3, 4, 5, 6, 8$ に対して $x^n = 1$ を直接解き，問5と比較。
7. (2点) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\theta$ ($\theta \in \mathbb{R}$, $-1 < r < 1$)
8. $\chi_j(\theta) = \dfrac{\sin(j+\frac{1}{2})\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}$ ($j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\ge 0} = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \cdots\}$) とおく。$\chi_{j_1}(\theta)\chi_{j_2}(\theta) = \displaystyle\sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \chi_j(\theta)$ (j についての和は $|j_1 - j_2|$ から始まり，1ずつ増えて，$j_1 + j_2$ まで) を示せ。

§2の宿題

1. (2点) 微分可能か，正則関数か (Cauchy-Riemann の関係式を満たすか)。
   (1) z^2　(2) $\frac{1}{z}$　(3) $\bar{z}$　(4) $z|z|^2$
2. (2点) $f(z) = ax^2 + bxy + y^2 + i(x^2 + cxy + dy^2)$ ($z = x + iy$) が正則となる実定数 a, b, c, d.
3. (2点) [指数関数] 複素数 $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) に対し，$\exp z = e^x(\cos y + i \sin y)$ と定義し，$\exp z = e^z$ と略記することにする。指数法則 $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ を示せ。また，e^z が Cauchy-Riemann の関係式を満たす事を示し，微分を求めよ。
4. (2点) [三角関数] 前問の指数関数を用いて，複素数 z に対し $\cos z = \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ と定義する。次を示せ。

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1, \quad \cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z, \quad e^{iz} = \cos z + i \sin z,$$
$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, \quad \cos(z + 2\pi) = \cos z, \quad \tfrac{d}{dz}\cos z = -\sin z,$$
$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2, \quad \sin(z + 2\pi) = \sin z, \quad \tfrac{d}{dz}\sin z = \cos z.$$

5. (2 点) [双曲線関数] 前々問の指数関数を用いて，複素数 z に対し $\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$, $\sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$ と定義する。次を示せ。

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1, \quad \cosh(-z) = \cosh z, \quad \sinh(-z) = -\sinh z, \quad e^z = \cosh z + \sinh z,$$
$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2, \quad \cosh(z + 2\pi i) = \cosh z, \quad \tfrac{d}{dz}\cosh z = \sinh z,$$
$$\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2, \quad \sinh(z + 2\pi i) = \sinh z, \quad \tfrac{d}{dz}\sinh z = \cosh z.$$

6. (2 点) 対数関数を用いて表せ。微分も求めよ。
(1) $\sin^{-1} z$ (2) $\cos^{-1} z$ (3) $\tan^{-1} z$ (4) $\sinh^{-1} z$ (5) $\cosh^{-1} z$ (6) $\tanh^{-1} z$

7. (1) $\mathrm{Re}(\cos e^{i\theta})$ $(\theta \in \mathbb{R})$ (2) $\log i$ (3) $\cos z = 2$

8. 一次分数変換 $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ $(a, b, c, d \in \mathbb{C},\ ad - bc \neq 0)$ は，$w = z + b$, $w = az$, $w = \frac{1}{z}$ の合成で得られる事を示せ。

9. (1) $|z - a| = b$ $(a \in \mathbb{C},\ b > 0)$ はどんな図形か。(2) $az + \bar{a}\bar{z} + b = 0$ $(a \in \mathbb{C},\ a \neq 0,\ b \in \mathbb{R})$ はどんな図形か。(3) (1)(2) の図形は $w = \frac{1}{z}$ によってどんな図形にうつるか。

10. (1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(|A| \neq 0)$ に対して $f_A(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ とおく時，$(f_A \circ f_B)(z) = f_{AB}(z)$。
(2) $H = \{\tau \in \mathbb{C} | \mathrm{Im}\tau > 0\}$, $SL(2;\mathbb{R}) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{R},\ ad - bc = 1 \right\}$ とおく時，$\tau \in H, A \in SL(2;\mathbb{R}) \Rightarrow \tau' = f_A(\tau) \in H$。

11. $f(z)$ に対し，$S[f](z) = \dfrac{f'(z)f'''(z) - \frac{3}{2}\big(f''(z)\big)^2}{\big(f'(z)\big)^2}$ とおく。
(1) $S[f](z) = 0 \Leftrightarrow f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ (2) $S\left[\dfrac{af+b}{cf+d}\right](z) = S[f](z)$

§3 の宿題

1. (2 点) 収束半径を求めよ。(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$

2. (2 点) 収束半径を求めよ。(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$ (2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$ (3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^n}{n!}$
但し $\binom{\alpha}{n} = \frac{(\alpha+1-n)_n}{n!}$, $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$, $(\alpha)_0 = 1$ 及び $\gamma \neq 0, -1, -2, \cdots$.

3. (2 点) 収束半径を求めよ。(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2^n}$

4. (2 点) 収束半径を求めよ。(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$

5. (2 点) 複素数 z に対し $\exp z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ と定義し，$\exp z = e^z$ と略記することにする。$\frac{d}{dz} e^z = e^z$ 及び，指数法則 $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ を示せ。

6. (2 点) 複素数 z に対し $\cos z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$, $\sin z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$ と定義する。

$$\cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z, \quad \tfrac{d}{dz} \cos z = -\sin z, \quad \tfrac{d}{dz} \sin z = \cos z$$

を示せ。また，問 5 を用いて次を示せ。

$$\begin{aligned}
&e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z, \\
&\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos^2 z + \sin^2 z = 1, \\
&\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, \quad \sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2.
\end{aligned}$$

7. (2 点) 複素数 z に対し $\cosh z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} z^{2n}$, $\sinh z = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1}$ と定義する。

$$\cosh(-z) = \cosh z, \quad \sinh(-z) = -\sinh z, \quad \tfrac{d}{dz} \cosh z = \sinh z, \quad \tfrac{d}{dz} \sinh z = \cosh z$$

を示せ。また，問 5 を用いて次を示せ。

$$\begin{aligned}
&e^{z} = \cosh z + \sinh z, \quad e^{-z} = \cosh z - \sinh z, \\
&\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \quad \cosh^2 z - \sinh^2 z = 1, \\
&\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2, \ \sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2.
\end{aligned}$$

8. (2 点) 問 5,6 を用いて，$z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ に対して $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ を示せ。
また，これと問 6,7 を用いて次を示せ。

$$\begin{aligned}
e^{2\pi i n} = 1 \ (n \in \mathbb{Z}), \quad &\cos(z + 2\pi) = \cos z, \quad \sin(z + 2\pi) = \sin z, \\
&\cosh(z + 2\pi i) = \cosh z, \quad \sinh(z + 2\pi i) = \sinh z.
\end{aligned}$$

§4 の宿題

1. (2 点) $C : (1+i)t$ $(t : 0 \to 1)$ に対し (1) $\int_C (z^2 + iz + 1) dz$ (2) $\int_C |z|^2 dz$

2. (2 点) $C : t + it^2$ $(t : 0 \to 1)$ に対し (1) $\int_C (z^2 + iz + 1) dz$ (2) $\int_C |z|^2 dz$

3. (2 点) $C : \cos t + i \sin t$ $(t : 0 \to \pi)$ に対し (1) $\int_C (z^2 + iz + 1) dz$ (2) $\int_C |z|^2 dz$

§5 の宿題

1. (2 点) $\dfrac{z^4 + 2}{z^2(z-1)}$ の特異点と留数

2. (2 点) $\displaystyle\oint_C \frac{dz}{2\pi i} f(z)$ ($C:|z|=2$ で反時計回り)　(1) $f(z)=\dfrac{z}{z-1}$　(2) $f(z)=\dfrac{\cos z}{z}$

3. (2 点) 問 2 で　(1) $f(z)=\dfrac{z}{z^2+1}$　(2) $f(z)=\dfrac{z}{(9-z^2)(z+i)}$

4. (2 点) 問 2 で　(1) $f(z)=\dfrac{z^3+3z+1}{z^4-5z^2}$　(2) $f(z)=\dfrac{ze^z}{(z-1)^4}$

5. (2 点) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{1-2a\cos\theta+a^2}d\theta$ $(a\in\mathbb{C},|a|\neq 1)$

6. (1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos n\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}d\theta$ $(n\in\mathbb{Z},a\in\mathbb{R},|a|\neq 1)$　(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(n\theta-\sin\theta)d\theta$ $(n\in\mathbb{Z})$.

7. (2 点) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$

8. (1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+a^4}$ $(a>0)$　(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)(x^2+9)}$　(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}$ $(n\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$.

9. (2 点) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos bx}{x^2+a^2}dx$ $(a,b>0)$

10. (1) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos bx}{(x^2+a^2)^2}dx$ $(a,b>0)$　(2) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos bx}{x^4+a^4}dx$ $(a,b>0)$.

11. (2 点) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$

12. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$

13. (1) $\displaystyle \mathrm{P}\!\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x-a}dx$ $(a\in\mathbb{R})$　(2) $\displaystyle \mathrm{P}\!\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2-a^2}dx$ $(a>0)$

14. (1) $\displaystyle\int_0^{\infty}\sin x^2 dx,\ \int_0^{\infty}\cos x^2 dx$　(2) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin x^2}{x}dx$
(3) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2\cos 2\alpha}\cos(x^2\sin 2\alpha)dx$ $(0\leq\alpha<\frac{\pi}{4})$.

15. (1) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos 2ax\,dx$ $(a>0)$　(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx$ $(0<a<1)$

16. (1) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}dx$ $(0<a<1)$　(2) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\log x}{(1+x^2)^2}dx$
(3) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^\alpha}{1+2x\cos\theta+x^2}dx$ $(-1<\alpha<1,\ 0<\theta<\pi)$.

17. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x-b)^2}dx$ $(a=a_0e^{i\theta},\ a_0>0,\ -\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2})$, $(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ の時は $b\in\mathbb{C}$，$\theta=\pm\frac{\pi}{2}$ の時は $b\in\mathbb{R})$

18. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2}{}^t\vec{x}A\vec{x}+{}^t\vec{b}\,\vec{x}}d^nx$ (A: n 次実対称行列，正定値 ($\Leftrightarrow {}^t\vec{x}A\vec{x}>0(\forall\vec{x}\in\mathbb{R}^n,\vec{x}\neq\vec{0})$), $\vec{b}\in\mathbb{R}^n$)

19. $\displaystyle G(\vec{r})=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\vec{p}\cdot\vec{r}}}{\vec{p}^2-k^2-i\varepsilon}$ ($k>0$)

§6 の宿題

1. (2 点) $\displaystyle\frac{z+1}{(z-1)(z-3)}$ を $z=0$ 及び $z=2$ のまわりで Taylor 展開。また収束半径。
2. (2 点) $\displaystyle\frac{1}{z^3}$ を $z=1$ のまわりで Taylor 展開。また収束半径。
3. (2 点) $\cos z$ を $z=\frac{\pi}{4}$ のまわりで Taylor 展開。また収束半径。
4. (2 点) $\displaystyle\frac{1}{z(z^2+1)}$ を $z=0$ のまわりで Laurent 展開。
5. (2 点) $\displaystyle f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}$ を $z=0$ のまわりで $1<|z|<2$ の範囲で Laurent 展開。
6. (2 点) $\displaystyle f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}$ を $z=1$ のまわりで $0<|z-1|<1$ の範囲で Laurent 展開。
7. (2 点) $\displaystyle f(z)=\frac{1}{z^2-3z+2}$ を $z=2$ のまわりで $|z-2|>1$ の範囲で Laurent 展開。
8. Bernoulli 数 B_n $(n=0,1,2,\cdots)$ を $\displaystyle\frac{t}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{t^n}{n!}$ $(|t|<2\pi)$ で定義する。
   $B_0=1,B_1=-\frac{1}{2},B_2=\frac{1}{6},B_3=0,B_4=-\frac{1}{30}$ 及び $B_{2n+1}=0$ $(n>0)$ を示せ。
9. 問 8 の Bernoulli 数を用いて，$z\cot z$ と $\tan z$ を原点のまわりで Taylor 展開せよ。
10. 問 9 の $z\cot z$ は，$\displaystyle z\cot z=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^2}{z^2-(n\pi)^2}$ と部分分数展開できる。Riemann のゼータ関数を $\displaystyle\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ $(\mathrm{Re}\,s>1)$ と定義する時，$\zeta(2m)$ $(m=1,2,\cdots)$ を Bernoulli 数を用いて表せ。そして，$\zeta(2),\zeta(4)$ を具体的に求めよ。

§7 の宿題

1. Γ 関数，B 関数を用いて表せ。
   (1) $\displaystyle\int_0^{\infty}x^{p-1}e^{-ax^q}dx$ $(a,p,q>0)$　(2) $\displaystyle\int_a^b(x-a)^{p-1}(b-x)^{q-1}dx$ $(p,q>0,\ b>a)$
   (3) $\displaystyle\int_0^1x^{p-1}(1-x^r)^{q-1}dx$ $(p,q,r>0)$　(4) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^{p-1}}{(1+x^r)^q}dx$ $(p,r>0,\ q>\frac{p}{r})$
   (5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{p-1}\theta\cos^{q-1}\theta d\theta$ $(p,q>0)$

2. $\displaystyle\int_D dx_1\cdots dx_n x_1^{p_1-1}\cdots x_n^{p_n-1} f(x_1+\cdots+x_n)=\frac{\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+\cdots+p_n)}\int_a^b f(u)u^{p_1+\cdots+p_n-1}du$
を示せ。但し $b>a\geq 0$, $p_i>0$, $D=\{{}^t(x_1,\cdots,x_n)|x_i\geq 0, a\leq x_1+\cdots+x_n\leq b\}$。

3. 半径 a の n 次元球 $(\{{}^t(x_1,\cdots,x_n)|x_1^2+\cdots+x_n^2\leq a^2\})$ の体積，表面積。

4. $Z_N=\dfrac{1}{h^{3N}N!}(vN)^N(2\pi mk_BT)^{\frac{3}{2}N}$ $(h,m,k_B$：定数$)$ とおく。
(1) $f=-\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}k_BT\log Z_N$　(2) $p=-\dfrac{\partial f}{\partial v}$, $u=-T^2\dfrac{\partial}{\partial T}\dfrac{f}{T}$

第2部：常微分方程式

§1の宿題

1. (2点) 任意の a,b $(a<0<b)$ に対して，$y=\begin{cases}(x-a)^3 & \text{for } -\infty<x\leq a\\ 0 & \text{for } a<x<b\\ (x-b)^3 & \text{for } b\leq x<\infty\end{cases}$ は，
$\begin{cases}y'=3y^{\frac{2}{3}}\\ y(0)=0\end{cases}$ の解である。

§2の宿題

1. (2点) $y'=ay$ $(a$：定数$)$

2. (2点) $y'=x(1-y)$

3. (2点) $y'=-\frac{x}{y}$

4. (2点) $y'=\dfrac{x^2+y^2}{2xy}$

5. $y'=\dfrac{8x-y-4}{x+y-5}$

6. $\dfrac{dy}{dx}=f\Big(\dfrac{y}{x}\Big)$ の解は，極座標 (r,θ) を用いると，次のように表せる事を示せ。
$r=C\exp\Big(\displaystyle\int^\theta F(\theta')d\theta'\Big)$, $F(\theta)=\dfrac{f(\tan\theta)\tan\theta+1}{f(\tan\theta)-\tan\theta}$

7. (2点) $y'-y=x$

8. (2点) $y'+2y=5e^{3x}$

9. (2点) $y'+y\tan x=\tan x$

10. (2点) $(y+\cos x)dx+xdy=0$

11. (2点) $ydx-xdy=0$

12. 熱せられた物体を空気中に放置した時，時刻 t における温度を $\theta = \theta(t)$ とすると，$\frac{d\theta}{dt}$ は θ と外界の温度 α (一定) との差に比例するという。$t = 0$ での温度を θ_0，比例係数を $-k$ として θ を t の関数として表せ。

13. 質量 m の物体が空気中を落下する時，速度に比例する抵抗力を受けるとする。この物体の運動について論ぜよ。

14. 質量 m の物体が空気中を落下する時，速度の 2 乗に比例する抵抗力を受けるとする。この物体の運動について論ぜよ。

15. 一様な重力下で，一様な物質でできた曲がりやすく伸びないひもの両端を水平に離して固定してひもをたるませた時の，ひもの形を表す式を求めよ。

§3 の宿題

1. (2 点) $y'' - 2y' - 3y = 0$

2. (2 点) $y'' + 4y' - 5y = 0$

3. (2 点) $y'' - 6y' + 9y = 0$

4. 速度に比例する抵抗があるときのバネの振動の方程式 $\ddot{x} + \mu\dot{x} + \omega^2 x = 0$ (μ, ω : 定数) の解を，初期条件 $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = 0$ の下で求めよ。

5. (2 点) $y'' - 4y' + 3y = x$

6. (2 点) $y'' - 3y' + 2y = \cos x$

7. 外力 $A\sin\Omega t$ (A, Ω : 定数) が働いた時のバネの振動の方程式 $\ddot{x} + \omega^2 x = A\sin\Omega t$ (ω : 定数，$\omega \neq \Omega$) の解を，初期条件 $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$ の下で求めよ。

8. 問 7 で，$\Omega = \omega$ の場合の解を求めよ。

9. (2 点) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$

10. (2 点) $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 0$

11. (2 点) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

12. (2 点) $y'''' + 2y'' + y = e^{2x}$

§4 の宿題

1. (2 点) ( ) 内の関数が解である事を確かめ，これと独立な解を求めよ。$x^2y'' + xy' - y = 0 \quad (y_1 = x)$

2. 問 1 で $xy'' - (1 + x)y' + y = 0 \quad (y_1 = 1 + x)$

3. (2 点) ( ) 内の関数が斉次微分方程式の解である事を確かめ，一般解を求めよ。
$xy'' - y' = 2x \quad (y_1 = 1,\ y_2 = x^2)$

4. 問 3 で $y'' + \dfrac{1}{x}y' - \dfrac{1}{x^2}y = 2x^3 + 4x \quad (y_1 = x,\, y_2 = \frac{1}{x})$

5. $y'' - \dfrac{3}{x}y' + \dfrac{3}{x^2}y = x^2$

6. $x^2y'' - axy' + ay = 0$ (a：定数) に対して，$y_1 = x$ が解である事を確かめ，$y = y_1u$ とおく事により一般解を求めよ。

7. $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ の基本解を $f(x),\ g(x)$ とする時，$p(x) = -\dfrac{d}{dx}\log W[f,g],\ q(x) = \dfrac{W[f',g']}{W[f,g]}$ を示せ。ここで $W[f_1,f_2] = f_1f_2' - f_1'f_2$。

8. $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ の特解は，斉次微分方程式の基本解 $f(x),\ g(x)$ 及び $W(x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$ を用いて $-f(x)\displaystyle\int^x \frac{r(x')g(x')}{W(x')}dx' + g(x)\int^x \frac{r(x')f(x')}{W(x')}dx'$ で与えられる事を定数変化法を用いて示せ。

§5 の宿題

1. (2 点) $\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 \\ y_2' = -y_1 + 4y_2 \end{cases}$

2. (2 点) $\begin{cases} y_1' = 7y_1 + 4y_2 \\ y_2' = 4y_1 + y_2 \end{cases}$

3. (2 点) $\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -2kx_1 + kx_2 \\ m\ddot{x}_2 = kx_1 - 2kx_2 \end{cases}$ (m, k：正定数)

§6 の宿題

1. (2 点) $xy'' + (x+2)y' + y = 0$ の一般解を $x = 0$ における級数展開で求めよ。

2. $y'' - 2xy' + 2ny = 0$ (Hermite の微分方程式) を $n = 0, 1, 2$ に対して，$x = 0$ における級数展開により解け。

3. 超幾何級数 $F(a, b; c\,; x)$ について，次の事を示せ。
   (1) $F(1, 1; 2\,; -x) = \dfrac{1}{x}\log(1+x)$ (2) $F(-a, b; b\,; -x) = (1+x)^a$ (a, b：定数)
   (3) $F(a, -n; c\,; x) = x$ の多項式 (n：非負整数，a, c：定数)