物理数学I　　小竹　　No.

目的など：　授業科目内容紹介　の通り

授業予定：

		回数の目安
§1	線型代数の復習	1
§2	3次元ベクトル	1
§3	微分	4
§4	積分	6
§5	直交曲線座標	2

対応する部分が終わったら宿題を提出せよ。
問題別でA4レポート用紙。

1-1〜6, 2-5〜6 は、やるべき他の宿題を済ませてから。

演習書として
　詳解物理応用数学演習　後藤・山本・神吉　共立出版　← 買って損はない。自習書というより辞書。

参考書として
　物理のための数学（物理入門コース10）　和達三樹　岩波書店
　物理数学（物理学基礎シリーズ11）　佐々木隆　培風館
　物理数学入門I・II　Chun Wa Wong（小林・近 訳）　丸善
　スカラー場、ベクトル場（物理数学One Point 8）　鈴木尚通　共立出版
　ベクトル解析　安達忠次　培風館

を挙げておくが、数多くの本が出版されているので本屋や図書館で分かり易そうな本を見つけたらそれを使えばよい。

十分な予習と徹底的な復習を！
手を動かして問題を解いてみる！　　とにかく勉強!!
分からない事は早めに解決！

全てを板書し諸君自らノートに書き写して欲しいのであるが、時間的制約等があるので、ノートの一部を配布する。

§1 線型代数の復習

No. 1-1

☆ 線形代数学Aの授業のプリント・ノートを復習せよ。
数学概論

◎ ベクトル, スカラー　和, スカラー倍　☆1, ☆2 を満たす.
線型写像　ベクトルからベクトルへの対応　☆4 を満たす
内積　2つのベクトルからスカラーへの対応　☆3 を満たす.

どういう座標軸(基底)を選んだかには依らない概念.

基底を1つ決めれば成分で表せる:

- ベクトル → 数ベクトル
- 線型写像 → 行列
- 内積: 正規直交基底を選ぶと式が簡単

基底を替えれば成分も変わる.

線型写像の和, スカラー倍, 合成 → 行列の和, スカラー倍, 積

◎ 正方行列の標準形

対角化　$P^{-1}AP = D$

スペクトル分解　$A = \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_s P_s$

Jordan標準形　$P^{-1}AP = J$

例.

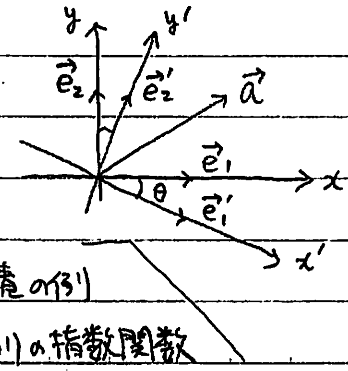
◎ 量子力学と線型代数

例

◎ その他

・$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ はベクトル?

「ベクトル$\vec{a}$のある基底での成分が$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$になっている」と考えるならばベクトルであるが,
単に「いつでもa_1, a_2という数字が並んだ$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$」ならばベクトルではない.



$$(\vec{e}_1' \ \vec{e}_2') = (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2)\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = (\vec{e}_1' \ \vec{e}_2')\begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

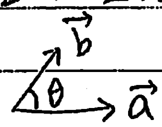
・内積の例

・行列の指数関数

ベクトル = 座標変換をした時に, 座標と同じ様に変換される量

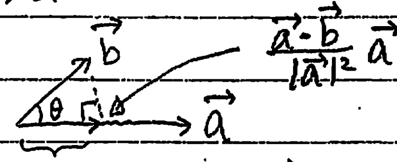
どこで使う?　概念 → 例 量力
計算道具 → 例 ばねの振動

◦ 内積：2つのベクトルに対して1つの数を対応させる規則



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta$$

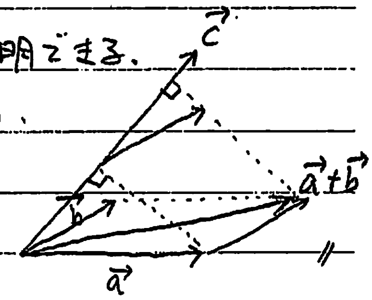
何の為



(符号付き)長さ $= |\vec{b}|\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$

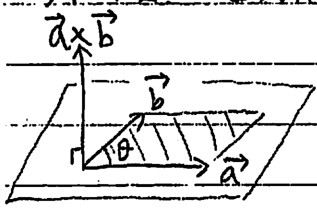
性質！
(1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$
(2) $\vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{c}\cdot\vec{a} + \vec{c}\cdot\vec{b}$
(3) $\vec{c}\cdot(k\vec{a}) = k(\vec{c}\cdot\vec{a})$
(4) $\vec{a}\cdot\vec{a} \geqq 0$ 等号は $\vec{a}=\vec{0}$

☺ 図で証明できる。
例えば(2)



成分を一切使っていない。
内積もどういう座標軸を選んだかに依らない概念である！

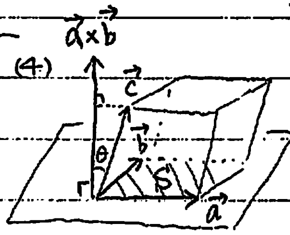
◦ 外積：2つのベクトルに対して1つのベクトルを対応させる規則



$\vec{a}\times\vec{b}$
向き：$\vec{a}, \vec{b}$ に垂直で、$\vec{a}$ から $\vec{b}$ へ回した時に右ねじの進む向き
大きさ：$\vec{a}, \vec{b}$ で張られる平行四辺形の面積 $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\theta$

性質
(1) $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$
(2) $\vec{c}\times(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{c}\times\vec{a} + \vec{c}\times\vec{b}$
(3) $\vec{c}\times(k\vec{a}) = k(\vec{c}\times\vec{a})$
(4) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$

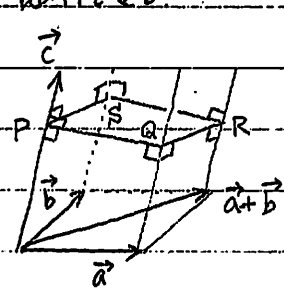
(4)



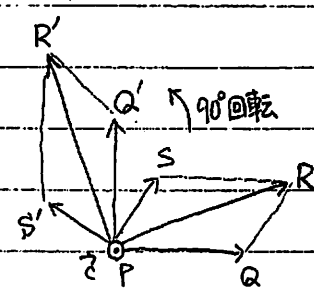
(符号付き)体積
$= S\times|\vec{c}|\cos\theta$
$= |\vec{a}\times\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cos\theta$
$= (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$

☺ 図で証明できる

(2)



$|\vec{c}\times\vec{a}| = |\vec{c}|\,\overline{PQ}$
$|\vec{c}\times\vec{b}| = |\vec{c}|\,\overline{PS}$
$|\vec{c}\times(\vec{a}+\vec{b})| = |\vec{c}|\,\overline{PR}$



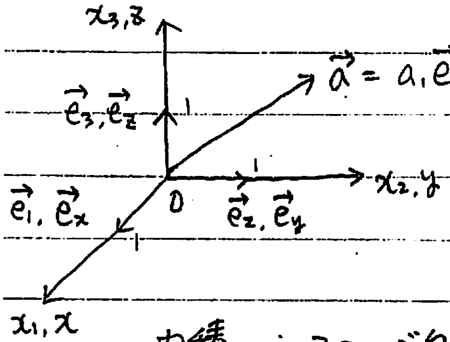
$\vec{c}\times\vec{a} = |\vec{c}|\,\overrightarrow{PQ'}$
$\vec{c}\times\vec{b} = |\vec{c}|\,\overrightarrow{PS'}$
$\vec{c}\times(\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{c}|\,\overrightarrow{PR'}$

//

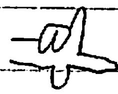
成分を一切使っていない。外積もどういう座標軸を選んだかに依らない概念である！ (注)軸性ベクトル

§2 3次元ベクトル

No. 2-1



$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 = (\vec{e}_1\,\vec{e}_2\,\vec{e}_3)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_z\end{pmatrix}$

右手系 

内積 : 2つのベクトル $\mapsto$ 1つの数 $\vec{a}\cdot\vec{b} = (\vec{a}, \vec{b})$

外積 : 2つのベクトル $\mapsto$ 1つのベクトル $\vec{a}\times\vec{b}$

線形代数学のプリント No1-8
数学概論

$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = \sum_i a_i b_i = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\vec{e}_k$, $\vec{a}\times\vec{b} = \sum_{i,j,k=1}^{3} \vec{e}_i\,\varepsilon_{ijk}\,a_j b_k = \begin{pmatrix}a_2b_3 - a_3b_2\\a_3b_1 - a_1b_3\\a_1b_2 - a_2b_1\end{pmatrix}$

$(\vec{a}\times\vec{b})_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\,a_j b_k$

- $\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{i'j'k} = \delta_{ii'}\delta_{jj'} - \delta_{ij'}\delta_{ji'}$ ☺ ~〃

- 例)

§3 微分

◎ 微分 = "瞬間" の変化率

$y = y(x)$

$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \to 0} \frac{dy}{dx} = y'$$

○ 性質

(1) 線型性 $\begin{cases} (f+g)' = f' + g' \\ (kf)' = kf' \quad (k: \text{定数}) \end{cases}$

(2) 積 $(fg)' = f'g + fg'$

(3) 合成関数 $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy}\dfrac{dy}{dx}$, $\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))\,g'(x)$

(⇒ 逆関数 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}$)

基本: $(1)' = 0$, $(x^a)' = ax^{a-1}$, $(e^x)' = e^x$, $(\sin x)' = \cos x$

例

○ 偏微分

多変数関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$: 独立変数が沢山ある

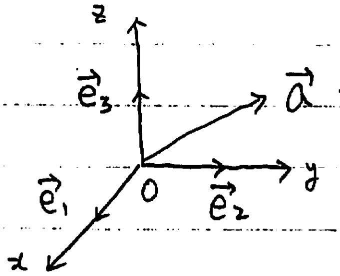
$\frac{\partial}{\partial x_1}$: x_1だけ変数, 他は定数と思って微分する

"良い関数" ならば 結果は偏微分の順序に依らない

例

coop

(I) "時間"微分



座標軸を1つ固定（つまり $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ は t に依らない）

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 = (\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

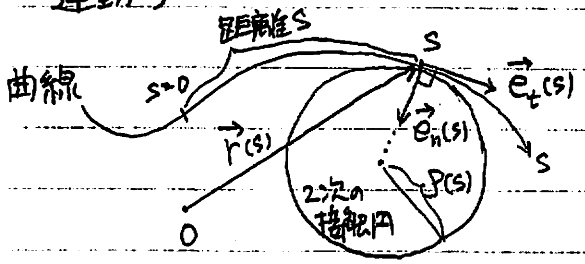
$$\vec{a} = \vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ a_3(t) \end{pmatrix}$$

$$\Delta\vec{a} = \vec{a}(t+\Delta t) - \vec{a}(t) \qquad \frac{\Delta\vec{a}}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \to 0} \frac{d\vec{a}}{dt} = \dot{\vec{a}}$$

$$\text{"}\begin{pmatrix} \frac{a_1(t+\Delta t) - a_1(t)}{\Delta t} \\ \vdots \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{a}_2 \\ \dot{a}_3 \end{pmatrix}\text{"}$$

例)

◎運動学

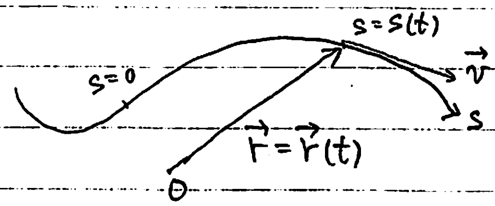


$\vec{e}_t(s) = \frac{d\vec{r}(s)}{ds}$: 接線単位ベクトル

$\frac{d}{ds}\vec{e}_t(s) = \frac{1}{\rho(s)}\vec{e}_n(s)$　$\vec{e}_n(s)$: 主法線単位ベクトル $\perp \vec{e}_t$

$\rho(s)$: 曲率半径

$\vec{e}_b(s) = \vec{e}_t(s) \times \vec{e}_n(s)$: 従法線単位ベクトル

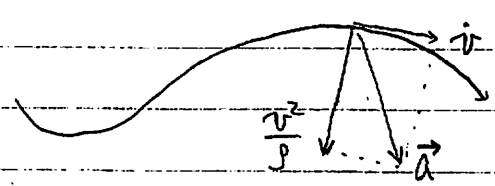


速度 $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{s}\vec{e}_t = v\vec{e}_t'$

速さ $v = |\vec{v}| = |\dot{s}|$　$\vec{e}_t' = \frac{\dot{s}}{|\dot{s}|}\vec{e}_t$

↑($\dot{s}=0$を除いて) ± 1

加速度 $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \dot{v}\vec{e}_t' + v\dot{\vec{e}}_t' = \dot{v}\vec{e}_t' + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n$



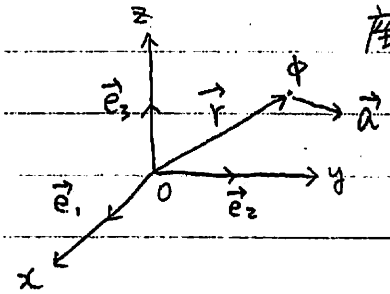
接線成分　$\dot{v}$　速度の大きさを変える

(内向き)法線 〃　$\frac{v^2}{\rho}$　〃 向き 〃

○平面極座標

例)

(II) "空間"微分



座標軸を1つ固定

場：空間の各点で値が決まっている

$\phi(\vec{r}) = \phi(x,y,z)$　スカラー場　　例

$\vec{a}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} a_1(x,y,z) \\ a_2(\;〃\;) \\ a_3(\;〃\;) \end{pmatrix}$　ベクトル場　　例

例

偏微分　xだけ変化　$\Delta\vec{a} = \vec{a}(x+\Delta x, y, z) - \vec{a}(x,y,z)$

$$\frac{\Delta\vec{a}}{\Delta x} \longrightarrow \frac{\partial\vec{a}}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x} \\ \frac{\partial a_3}{\partial x} \end{pmatrix}$$

(注) $\frac{\partial\vec{a}}{\partial x}$ はベクトルではない.

☆ ナブラ (nabla)　$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$　ベクトル微分演算子

$\vec{\nabla}$はベクトル.

☺ 直交座標変換　$x'_i = \sum_j a_{ij} x_j$,　$A = (a_{ij})$,　${}^tAA = E$,　$\therefore x_j = \sum_i a_{ij} x'_i$

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_j a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j} \quad /\!/$$

☆
- 勾配 (gradient)　$\mathrm{grad}\,\phi = \vec{\nabla}\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x_3} \end{pmatrix}$
- 発散 (divergence)　$\mathrm{div}\,\vec{a} = \vec{\nabla}\cdot\vec{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}$
- 回転 (rotation)　$\mathrm{rot}\,\vec{a} = \vec{\nabla}\times\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$
  $= \mathrm{curl}\,\vec{a}$

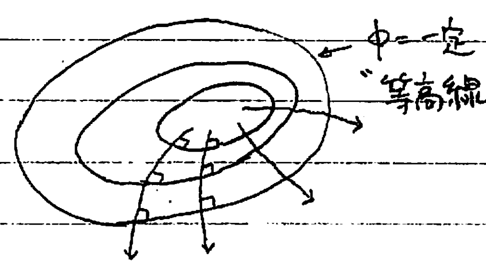
(1) 勾配

$\Delta\phi = \phi(\vec{r}+\Delta\vec{r}) - \phi(\vec{r})$　　$\Delta\vec{r}$ 微小

$= \phi(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - \phi(x,y,z)$

$= \frac{\partial\phi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\Delta z + \cdots$

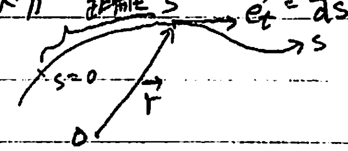
$= \mathrm{grad}\,\phi \cdot \Delta\vec{r}$



$\Delta\vec{r}$ が $\mathrm{grad}\,\phi$ の方向になっているとき ϕ の変化が最大

例

・方向微分　距離 s　$\vec{e}_t = \frac{d\vec{r}}{ds}$



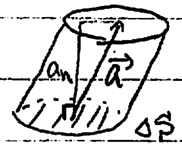
$$\phi = \phi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}(s))$$

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{dz}{ds}$$

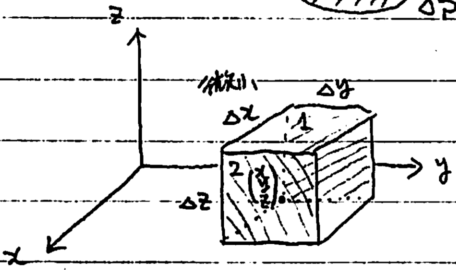
$$= \vec{\nabla}\phi \cdot \vec{e}_t = (\vec{e}_t \cdot \vec{\nabla})\phi$$

(2) 発散

$\vec{a}$ "流れ"



単位時間当たり $a_n \Delta S$ 流れ出す



面1 を通って $-a_x(x,y,z)\Delta y \Delta z$ 出て行く

面2 〃 $a_x(x+\Delta x, y, z)\Delta y \Delta z$ 出て行く

足して $\frac{\partial a_x}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial a_x}{\partial x}\Delta V$ 出て行く

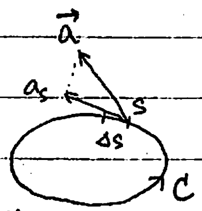
微小直方体から出て行くのは $\frac{\partial a_x}{\partial x}\Delta V + \frac{\partial a_y}{\partial y}\Delta V + \frac{\partial a_z}{\partial z}\Delta V = \mathrm{div}\,\vec{a}\cdot\Delta V$

単位体積当たり $\mathrm{div}\,\vec{a}$ 湧き出している。

例)

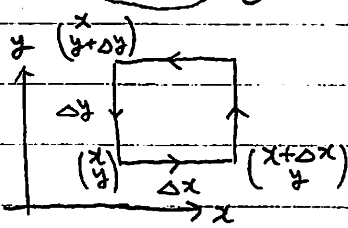
(3) 回転

$\vec{a}$ 流れ



$\Sigma a_s \Delta s \to \oint a_s ds$ 循環

z=一定の面で
(つまり xy平面に平行な面)



z略

$$a_x(x,y)\Delta x + a_y(x+\Delta x, y)\Delta y$$
$$- a_x(x, y+\Delta y)\Delta x - a_y(x,y)\Delta y$$
$$= (a_y(x+\Delta x, y) - a_y(x,y))\Delta y + (\cdots)\Delta x$$
$$= \frac{\partial a_y}{\partial x}\Delta x \Delta y - \frac{\partial a_x}{\partial y}\Delta y \Delta x$$
$$= (\mathrm{rot}\,\vec{a})_z \Delta x \Delta y$$

単位面積当たり $(\mathrm{rot}\,\vec{a})_z$ 回っている。

yz平面 $(\mathrm{rot}\,\vec{a})_x$, zx平面 $(\mathrm{rot}\,\vec{a})_y$

例)

(4) ラプラシアン (Laplacian)　$\Delta = \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$: スカラー

$$\Delta\phi = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

$$\Delta\vec{a} = \begin{pmatrix} \Delta a_1 \\ \Delta a_2 \\ \Delta a_3 \end{pmatrix}$$

例)

例)

◎ ポテンシャル

・ $\vec{a} = -\mathrm{grad}\,\phi$ 　　ϕ : $\vec{a}$ に対する スカラーポテンシャル

・ $\vec{b} = \mathrm{rot}\,\vec{a}$ 　　$\vec{a}$: $\vec{b}$ に対する ベクトル ポテンシャル

Thm (1) $\vec{a} = -\mathrm{grad}\,\phi \Leftrightarrow \mathrm{rot}\,\vec{a} = \vec{0}$ 　☺〜//

(2) $\vec{b} = \mathrm{rot}\,\vec{a} \Leftrightarrow \mathrm{div}\,\vec{b} = 0$

例)

Thm [Helmholtz] $\vec{b} = \vec{b}(\vec{r})$ 連続 　$\frac{1}{r}\vec{b}(\vec{r}) \xrightarrow{r\to\infty} 0$

$\Rightarrow$ $\vec{b} = -\mathrm{grad}\,\phi + \mathrm{rot}\,\vec{a}$ なる $\phi, \vec{a}$ が (付加定数を除いて) 一意的に定まる. ☺〜//

◎ Maxwell方程式

例)

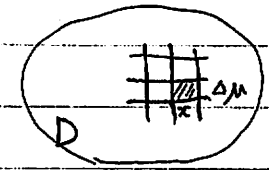
◎ 量子力学

例)

§4 積分

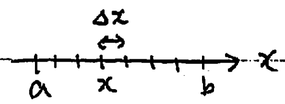
No. 4-1

◎ 積分 = 細かく分けて"体積"に"重み"を掛けて足し合わせる



$$\sum f(x)\Delta\mu \xrightarrow{\text{細かく}} \int_D f(x)\,d\mu$$

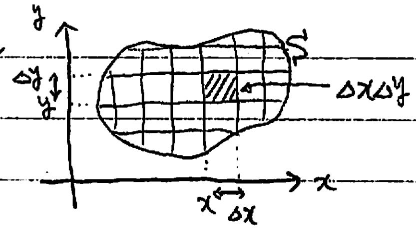
1次元



$$\sum f(x)\Delta x \to \int_I f(x)\,dx \qquad I=[a,b]\ (\text{当然 } a<b)$$

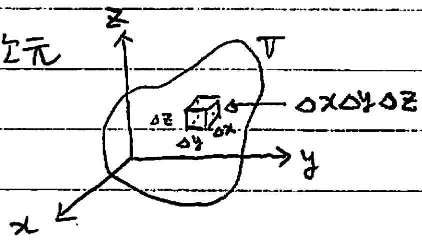
$\int_I f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ とも書く.

2次元



$$\sum f(x,y)\Delta x\Delta y \to \iint_S f(x,y)\,dxdy$$

3次元



$$\sum f(x,y,z)\Delta x\Delta y\Delta z \to \iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz$$

・性質

(1) 線型性 $\begin{cases} \int_D (f+g)\,d\mu = \int_D f\,d\mu + \int_D g\,d\mu \\ \int_D kf\,d\mu = k\int_D f\,d\mu \quad (k:\text{定数}) \end{cases}$

(2) 部分積分 $\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$ (一般は後で)

(3) 変数変換 $\int_D f(x_1,\cdots,x_n)\,dx_1\cdots dx_n = \int_D f(x)\,d^nx$ と書こう.

$$\int_D f(x)\,d^nx = \int_{D'} f(x(t))\,|J|\,d^nt$$

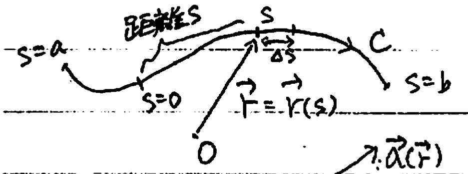
$$x_i = x_i(t_1,\cdots,t_n) \qquad J = \frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(t_1,\cdots,t_n)} = \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial t_j}\right) \ \text{Jacobian}$$

$D \underset{1対1}{\longleftrightarrow} D'$

"良い関数"ならば結果は積分の順序に依らない

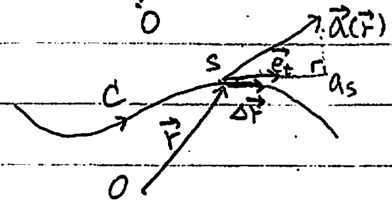
例)

◎ 線積分 ： 曲線上の1次元積分



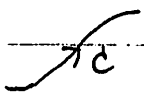
$\phi=\phi(\vec{r})$ $\quad \Sigma\phi\Delta s \to \int_C \phi\, ds = \int_a^b \phi(\vec{r}(s))\, ds$

$\Sigma \vec{a}\Delta s \to \int_C \vec{a}\, ds$

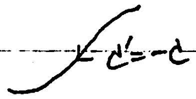


$\vec{a}=\vec{a}(\vec{r})$ $\quad \Sigma \vec{a}\cdot\Delta\vec{r} \to \int_C \vec{a}\cdot d\vec{r} = \int_C \vec{a}\cdot\vec{e}_t\, ds = \int_C a_s\, ds$

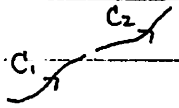
$\vec{e}_t = \dfrac{d\vec{r}}{ds}$, $\quad d\vec{r} = \vec{e}_t\, ds$



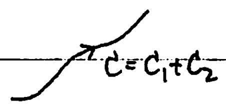
逆向き



$\int_{-C} \phi\, ds = -\int_C \phi\, ds$

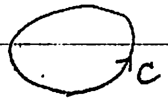


つなげて



$\int_{C_1+C_2} \phi\, ds = \int_{C_1} \phi\, ds + \int_{C_2} \phi\, ds$

閉曲線
ループ



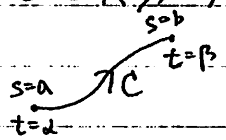
$\oint_C \phi\, ds \qquad \oint_C \vec{a}\cdot d\vec{r}$ ： 循環

$d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$ として $\int_C \vec{a}\cdot d\vec{r} = \int_C (a_x dx + a_y dy + a_z dz)$ と書くこともある。

例)

・計算方法

Cをパラメーター表示する $\quad C : \vec{r} = \vec{r}(t) \quad (\alpha \le t \le \beta) \quad I=[\alpha,\beta] \overset{1対1}{\longleftrightarrow} C$



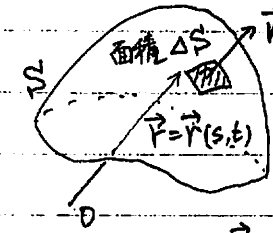
$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) = \dfrac{d\vec{r}}{dt}\Delta t \qquad \Delta s = |\Delta\vec{r}| = \left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right|\Delta t$

形式的に $\quad d\vec{r} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}dt, \quad ds = |d\vec{r}| = \left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right| dt$

$$\int_C \phi\, ds = \int_\alpha^\beta \phi(\vec{r}(t)) \left|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right| dt$$ など

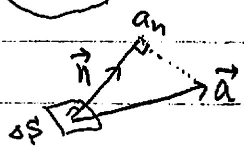
例)

◎ 面積分 : 曲面上の 2次元積分



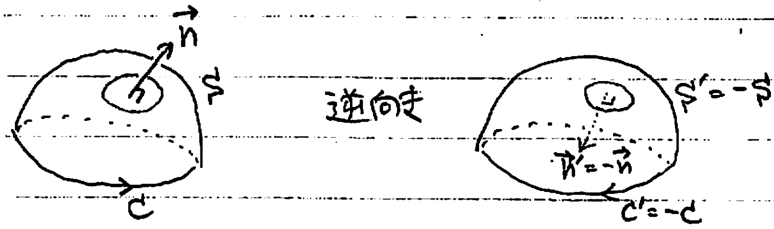
$\phi=\phi(\vec{r})$ $\quad \Sigma\phi\Delta S \rightarrow \int_S \phi\, dS$

$\vec{a}=\vec{a}(\vec{r})$ $\quad \Sigma\vec{a}\Delta S \rightarrow \int_S \vec{a}\, dS$

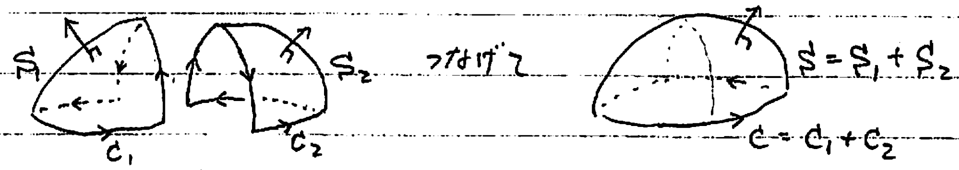


$\Delta\vec{S}=\vec{n}\Delta S \qquad \Sigma\vec{a}\cdot\Delta\vec{S} \rightarrow \int_S \vec{a}\cdot d\vec{S}=\int_S \vec{a}\cdot\vec{n}\, dS=\int_S a_n dS$

面の向きと境界



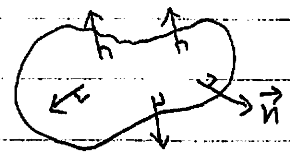
$\int_{S'}\phi dS=-\int_S \phi dS$



$S=S_1+S_2$ $\quad \int_{S_1+S_2}\phi dS$

$C=C_1+C_2$ $\quad =\int_{S_1}\phi dS+\int_{S_2}\phi dS$

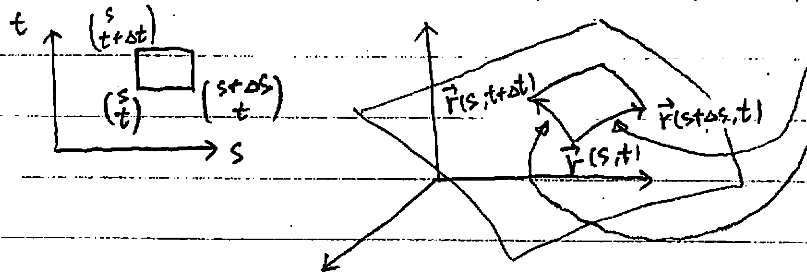
閉曲面



法線外向き

◦ 計算方法

S をパラメーター表示する. $\quad S : \vec{r}=\vec{r}(s,t) \qquad \binom{s}{t}\in D \overset{1対1}{\longleftrightarrow} S$



$\vec{r}(s+\Delta s,t)-\vec{r}(s,t)\approx\frac{\partial\vec{r}}{\partial s}\Delta s$

$\vec{r}(s,t+\Delta t)-\vec{r}(s,t)\approx\frac{\partial\vec{r}}{\partial t}\Delta t$

$\Delta\vec{S}=\pm\frac{\partial\vec{r}}{\partial s}\Delta s\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial t}\Delta t$

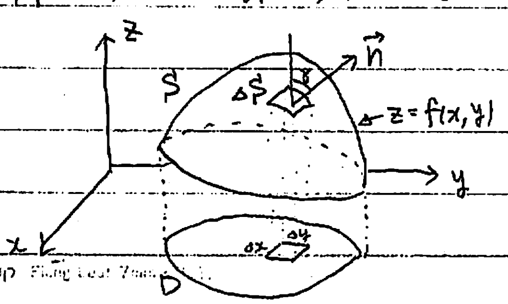
$\Delta S=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial s}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial t}\right|\Delta s\Delta t$

形式的に $\begin{cases} d\vec{S}=\vec{n}dS=\pm\frac{\partial\vec{r}}{\partial s}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial t}\, dsdt \\ dS=|d\vec{S}|=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial s}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial t}\right| dsdt \end{cases}$

$$\int_S \phi\, dS=\int_D \phi(\vec{r}(s,t))\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial s}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial t}\right| dsdt \quad \text{など}$$

特に s,t として x,y,z のうちの2つをとる場合。例えば $S : z=f(x,y)$ なら

形式的に $dS=\frac{dxdy}{|n_3|}$



$\Delta S|\cos\gamma|=\Delta x\Delta y \quad , \quad \cos\gamma=\vec{n}\cdot\vec{e}_3$

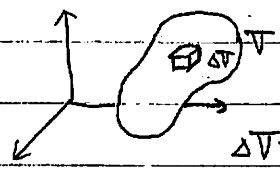
$F(\vec{r})=z-f(x,y)$ とおくと 曲面は $F=0$, $\pm\vec{n}=\frac{\nabla F}{|\nabla F|}$

$$\int_S \phi\, dS=\int_D \phi(x,y,f(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy \quad \text{など}$$

$$\pm d\vec{S}=\begin{pmatrix}-\frac{\partial f}{\partial x}\\ -\frac{\partial f}{\partial y}\\ 1\end{pmatrix}dxdy$$

例)

◎ 体積積分 : 3次元積分



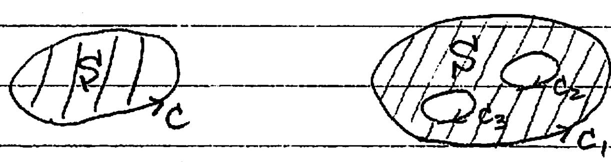
$\phi = \phi(\vec{r})$　$\sum \phi \Delta V \to \int_V \phi\, dV = \int_V \phi\, dxdydz$

$\vec{a} = \vec{a}(\vec{r})$　$\sum \vec{a} \Delta V \to \int_V \vec{a}\, dV$

例)

◎ Green の定理 (平面)

Thm. $\int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_C (P\,dx + Q\,dy)$　　$C = \partial S$ ← 境界



$C = C_1 + C_2 + C_3$

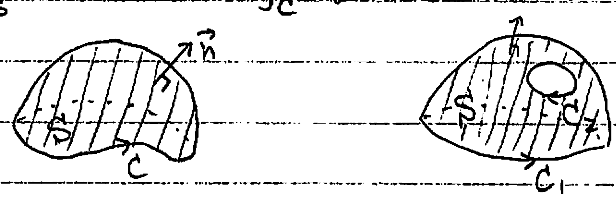
☺ 〜//

例)

◎ Stokes の定理

Thm $\int_S \mathrm{rot}\,\vec{a} \cdot d\vec{S} = \int_C \vec{a} \cdot d\vec{r}$　　$C = \partial S$

z成分=0とすれば Green の定理



$C = C_1 + C_2$

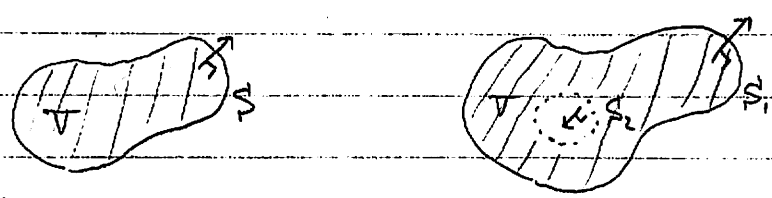
☺ 〜//

(注) $\vec{a}$ はベクトルでなくてもよい。つまり単に $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ という3つの関数の組でよい

例)

◎ Gauss の定理

Thm $\int_V \mathrm{div}\,\vec{a}\, dV = \int_S \vec{a} \cdot d\vec{S}$　　$S = \partial V$.



$S = S_1 + S_2$

☺ 〜//

(注) $\vec{a}$はベクトルでなくてもよい。

例)

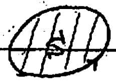
◦ 参考 微分幾何学

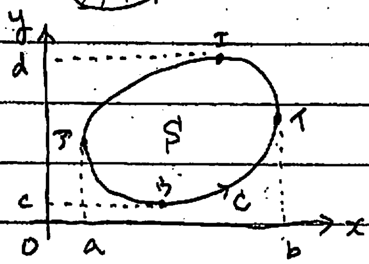
微分形式　Stokesの定理 $\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega$

◦ 例)

◎ 補足

◦ Greenの定理(平面)の証明(概略)

まず  のとき



アエイ $y=g(x)$　アウイ $y=f(x)$

$$\int_S \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} dy \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$= \int_a^b dx \left(P(x, g(x)) - P(x, f(x)) \right)$$

$$= \int_{アエイ} P dx - \int_{アウイ} P dx$$

$$= -\oint_C P dx$$

ウイエ $x=i(y)$　ウアイ $x=h(y)$

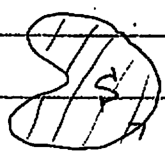
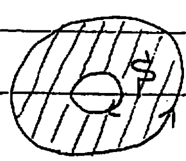
$$\int_S \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_c^d dy \int_{h(y)}^{i(y)} dx \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$= \int_c^d dy \left(Q(i(y), y) - Q(h(y), y) \right)$$

$$= \int_{ウイエ} Q dy - \int_{ウアエ} Q dy$$

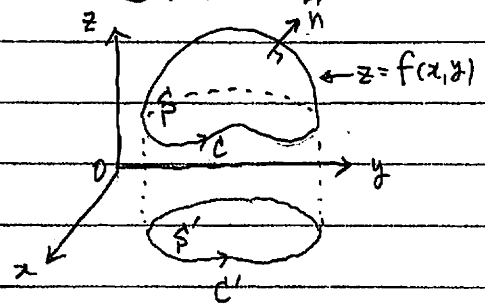
$$= \oint Q dy$$

$$\therefore \int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C (P dx + Q dy)$$

次に 　次に 

・Stokesの定理の証明(概略)

まず  のとき



$$\vec n = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}\begin{pmatrix}-\frac{\partial f}{\partial x}\\ -\frac{\partial f}{\partial y}\\ 1\end{pmatrix} \qquad d\vec S = \vec n\, dS = \begin{pmatrix}-\frac{\partial f}{\partial x}\\ -\frac{\partial f}{\partial y}\\ 1\end{pmatrix} dx\,dy$$

左辺の a_x に依る部分

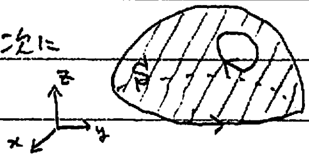
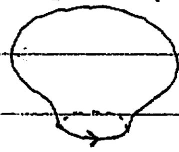
$$= \int_S \left(\frac{\partial a_x}{\partial z}\vec e_2 - \frac{\partial a_x}{\partial y}\vec e_3\right)\cdot d\vec S$$

$$= \int_{S'} \left(-\frac{\partial a_x}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$a_x(x, y, f(x,y)) = F(x,y)$ とおくと $\displaystyle = -\int_{S'} \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} dx\,dy$

Greenの定理(平面)より $\displaystyle = \oint_{C'} F(x,y)\,dx$

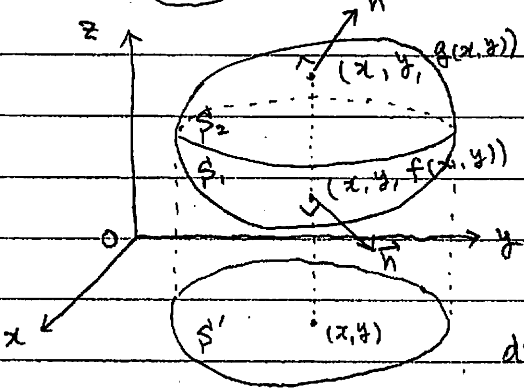
$$= \oint_C a_x\, dx$$

次に  次に 

a_y, a_z に依る部分も同様なので, $\displaystyle \int_S \mathrm{rot}\,\vec a\cdot d\vec S = \int_C (a_x dx + a_y dy + a_z dz) = \oint_C \vec a\cdot d\vec r$ //

・Gaussの定理の証明(概略)

まず  のとき



左辺の a_z に依る部分

$$= \int_V \frac{\partial a_z}{\partial z}\, dV$$

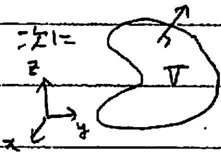
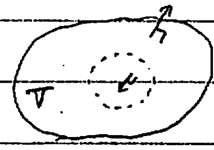
$$= \int_{S'} dx\,dy \int_{f(x,y)}^{g(x,y)} dz\, \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

$$= \int_{S'} dx\,dy\,\big(a_z(x,y,g(x,y)) - a_z(x,y,f(x,y))\big)$$

$dx\,dy = |n_z|\,dS$ より

$$= \int_{S_2} a_z n_z\, dS + \int_{S_1} a_z n_z\, dS$$

$$= \int_S a_z n_z\, dS$$

次に  次に 

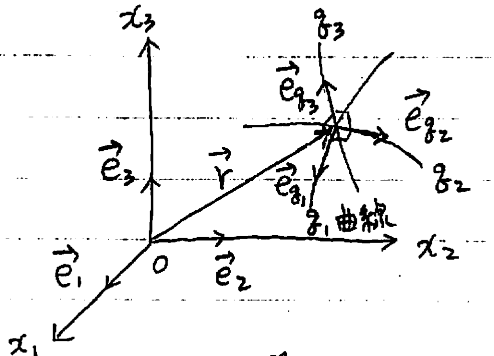
a_x, a_y に依る部分も同様なので, $\displaystyle \int_V \mathrm{div}\,\vec a\, dV = \int_S (a_x n_x + a_y n_y + a_z n_z)\, dS = \int_S \vec a\cdot\vec n\, dS = \int_S \vec a\cdot d\vec S$ //

§5 直交曲線座標

◎ 平面極座標

例)

◎ 直交曲線座標



$x_i = x_i(q_1, q_2, q_3)$

$q_i = q_i(x_1, x_2, x_3)$

$\Delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1}\Delta q_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2}\Delta q_2 + \frac{\partial x_i}{\partial q_3}\Delta q_3 = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\Delta q_j$

$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = \sum_i (\Delta x_i)^2 = \sum_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\Delta q_j \Delta q_k$

$\sum_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} = 0 \quad (j \neq k)$ と仮定する。 … ※

$\sum_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right)^2 = h_j^2 \quad (h_j > 0)$ とおく。

$(\Delta s)^2 = \sum_i h_i^2 (\Delta q_i)^2 = \sum_i (\Delta s_i)^2$ 長さ $\Delta s_i = h_i \Delta q_i$ $(\Delta s)^2 = (\Delta \vec r)^2$

$\Delta V = \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 = \Delta s_1 \Delta s_2 \Delta s_3 = h_1 h_2 h_3 \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3$

$ds^2 = \sum_i h_i^2 dq_i^2$, $\dot{\vec r}^2 = \sum_i h_i^2 \dot q_i^2$, $dV = dx_1 dx_2 dx_3 = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$

$\vec e_{q_i} = \dfrac{\frac{\partial \vec r}{\partial q_i}}{\left|\frac{\partial \vec r}{\partial q_i}\right|} = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \vec r}{\partial q_i}$ $\vec e_{q_i} \cdot \vec e_{q_j} = \delta_{ij}$ ☺ ~//

$\vec r = \sum_i x_i \vec e_i$

$\vec e_{q_i} = \sum_j \frac{1}{h_i}\frac{\partial x_j}{\partial q_i}\vec e_j = \sum_j \vec e_j (A^{-1})_{ji}$ $(A^{-1})_{ij} = \frac{1}{h_j}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}$ $A = (A_{ij})$

$A_{ij} = h_i \frac{\partial q_i}{\partial x_j} = \frac{1}{h_i}\frac{\partial x_j}{\partial q_i}$ ☺ ~// ∴ A 直交行列

$\vec a = \vec a(\vec r)$
$= \sum_i a_i \vec e_i = \sum_i a_{q_i} \vec e_{q_i}$ ∴ $a_{q_i} = \sum_j A_{ij} a_j$

$\frac{\partial}{\partial q_i} = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial x_j}$ ∴ $\frac{1}{h_i}\frac{\partial}{\partial q_i} = \sum_j A_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}$ ∴ $\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_j (A^{-1})_{ij}\frac{1}{h_j}\frac{\partial}{\partial q_j}$

$\vec e_{q_i} = h_i \vec\nabla q_i$ ☺ ~//

$\frac{\partial \vec e_{q_i}}{\partial q_j} = \sum_k C_k^{(ij)} \vec e_{q_k}$, $C_k^{(ij)} = \delta_{jk}\frac{1}{h_i}\frac{\partial h_j}{\partial q_i} - \delta_{ji}\frac{1}{h_k}\frac{\partial h_j}{\partial q_k}$ ☺ ~//

・ $\vec{\nabla} = \sum_i \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_i \vec{e}_{g_i} \frac{1}{h_i}\frac{\partial}{\partial g_i}$

$$\mathrm{grad}\,\phi = \vec{\nabla}\phi = \sum_i \vec{e}_{g_i} \frac{1}{h_i}\frac{\partial \phi}{\partial g_i}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{a} = \vec{\nabla}\cdot\vec{a} = \left(\sum_i \vec{e}_{g_i} \frac{1}{h_i}\frac{\partial}{\partial g_i}\right)\cdot\left(\sum_j a_{g_j}\vec{e}_{g_j}\right)$$

$$= \sum_i \frac{1}{\prod_j h_j}\frac{\partial}{\partial g_i}\left(\prod_{j\neq i} h_j \cdot a_{g_i}\right)$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{a} = \vec{\nabla}\times\vec{a} = \left(\sum_j \vec{e}_{g_j}\frac{1}{h_j}\frac{\partial}{\partial g_j}\right)\times\left(\sum_k a_{g_k}\vec{e}_{g_k}\right)$$

$$= \sum_i \vec{e}_{g_i}\sum_{j,k}\varepsilon_{ijk}\frac{1}{h_j h_k}\frac{\partial}{\partial g_j}\left(h_k a_{g_k}\right)$$

$$\Delta\phi = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\phi = \sum_i \frac{1}{\prod_j h_j}\frac{\partial}{\partial g_i}\left(\prod_{j\neq i} h_j \cdot \frac{1}{h_i}\frac{\partial\phi}{\partial g_i}\right)$$

$$\Delta\vec{a} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{a} - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{a}$$

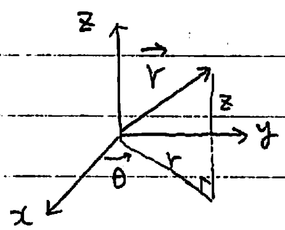
☺ No5-1の式を使う，又は意味を考える. //　　(注) rot以外はn次元でOK

参考　一般の $ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}\,dx^i dx^j$ では $\Delta\phi = \sum_{i,j}\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\,g^{ij}\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\right)$

共変微分，　一般相対性理論

◎ 例

・円筒座標、　r, θ, z



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

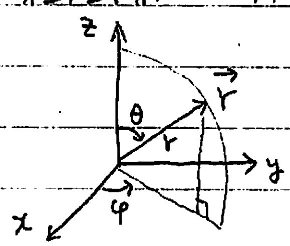
$r \geq 0,\ 0 \leq \theta < 2\pi,\ z \in \mathbb{R}$

$h_1 = 1,\ h_2 = r,\ h_3 = 1$

$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2$

$dV = r\,dr\,d\theta\,dz$

・極座標、　r, θ, φ



$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$r \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \varphi < 2\pi$

$h_1 = 1,\ h_2 = r,\ h_3 = r\sin\theta$

$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2$

$dV = r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$

・例