物理数学 I (小竹)　授業促進のためのノート [ver.2.1.7]

全部板書したいところであるが，時間が不足する事と，説明を聞いてもらうために，板書の一部を配布する。 板書 と書いた部分では板書するので書き写す様に。このノートを見れば話の順序が分かるので予習に役立ててもらいたい。十分な予習と徹底的な復習をする事。このノートは重要な事柄をまとめたものではない。ミスプリを見つけたら連絡して下さい。
必修化に伴い以前のもの (ver.1) の順序を入れ替え，一部を削除した。

準教科書 (←これに沿って進む訳ではない)
・「要点がわかるベクトル解析」
　丸山 武男・石井 望 著，コロナ社 (2007 年)
演習書
・「詳解物理応用数学演習」
　後藤憲一・山本邦夫・神吉健 共編，共立出版 (1979 年)
　(自習書というより辞書。買って損はない)
参考書
・物理入門コース 10「物理のための数学」
　和達 三樹 著，岩波書店 (1983 年)
・理工系の数学入門コース 5「ベクトル解析」
　戸田 盛和 著，岩波書店 (1989 年)
・「ベクトル解析」
　安達 忠次 著，培風館 (1961 年)
・物理数学 One Point 8「スカラー場，ベクトル場」
　鈴木 尚通 著，共立出版 (1993 年)
・応用数学要論シリーズ 5「ベクトル解析要論」
　田代 嘉宏 著，森北出版 (1995 年)
・新数学入門シリーズ 19「ベクトル解析入門」
　一松 信 著，森北出版 (1997 年)
を挙げておくが，数多くの本が出版されているので，本屋や図書館で分かり易そうな本を見つけたらそれを使えばよい。

§1　ベクトルと線型写像

◎ ベクトル：矢印 (大きさと向き) $\vec{a}$, $\boldsymbol{a}$
・相等：2 つのベクトルが等しい。$\vec{a} = \vec{b}$ 板書 1
○ 和とスカラー倍
・和：2 つのベクトルに 1 つのベクトルを対応させる規則。$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ 板書 2
・スカラー倍：1 つのベクトルと 1 つの数 (スカラー) に 1 つのベクトルを対応させる規則。$\vec{c} = k\vec{a}$ 板書 3
● 性質
☆$_1$(1) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ $({}^\forall\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$
　(2) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$ $({}^\forall\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$
　(3) ${}^\exists\boldsymbol{0}$, ${}^\forall\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$
　(4) ${}^\forall\boldsymbol{a}$, ${}^\exists\boldsymbol{a}'$ s.t. $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{0}$ ($\boldsymbol{a}' = -\boldsymbol{a}$ と書く)
☆$_2$(1) $k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ $({}^\forall k,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$
　(2) $(k+l)\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{a}$ $({}^\forall k,l,\boldsymbol{a})$
　(3) $(kl)\boldsymbol{a} = k(l\boldsymbol{a})$ $({}^\forall k,l,\boldsymbol{a})$
　(4) $1\cdot\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ $({}^\forall\boldsymbol{a})$
図で証明できる。 板書 4
○ 内積
・内積：2 つのベクトルに 1 つの数 (スカラー) を対応させる規則。$\vec{a}\cdot\vec{b}$, $(\vec{a},\vec{b})$ 板書 5

何のため？ 板書 6
● 性質
☆$_3$(1) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \overline{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})}$ $({}^\forall\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$
　(2) $(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{c},\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})$ $({}^\forall\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$
　(3) $(\boldsymbol{c},k\boldsymbol{a}) = k(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})$ $({}^\forall k,\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})$
　(4) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) \geq 0$ (${}^\forall\boldsymbol{a}$. 等号成立は $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$)
図で証明できる。 板書 7
○ ここまで成分を一切使っていない。ベクトル及びその演算 (和，スカラー倍，内積) はどういう座標軸を選んだかに依らない概念である！
○ 直交座標軸を 1 つ定める (正規直交基底を 1 組定める)。 板書 8 $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$ と 3 次元数ベクトル $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ を対応させた時に，数ベクトルの和 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix}$ とスカラー倍 $k\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{pmatrix}$ が (矢印の) ベクトルの和とスカラー倍に対応する： 板書 9
・内積は 板書 10
・注：和とスカラー倍に関しては，基底は正規直交でなくても構わない。
● よって分かった事は 板書 11
○ ベクトルは一般化 (n 次元数ベクトル)，抽象化される。
・集合 V の要素 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\in V$ が定義され，四則演算が定義された集合 K (体と呼ばれる) の要素 k に対してスカラー倍 $k\boldsymbol{a}\in V$ が定義され ($k\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}k$ とも書こう)，☆$_1$ と ☆$_2$ の 8 つの性質を満たしている時に，V を K 上の線型空間 (ベクトル空間) と言い，V の要素をベクトル，K の要素をスカラーと呼ぶ。
注：ベクトルの大きさは定義されていない。
・更に ☆$_3$ の 4 つの性質を満たす内積 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\in K$ が定義されている時に，V を計量線型空間と言う。
ベクトルの大きさ (ノルム) は $\|\boldsymbol{a}\| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})}$。
◎ 線型写像はこの授業で扱う内容ではないが，簡単に述べておく。
・(n 次元) ベクトルに対して (m 次元) ベクトルを対応させる規則 (写像) T が
☆$_4$(1) $T(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = T(\boldsymbol{a})+T(\boldsymbol{b})$ $({}^\forall\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$
　(2) $T(k\boldsymbol{a}) = kT(\boldsymbol{a})$ $({}^\forall k,\boldsymbol{a})$
を満たす時に線型写像と言う。
(1) を加法性，(2) を斉次性，合わせて線型性と言う。
(1)(2) ⇔ (3) $T(k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{b}) = kT(\boldsymbol{a})+lT(\boldsymbol{b})$ $({}^\forall k,l,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$.
・例えば，原点中心の拡大・回転，原点を通る超平面 (2 次元では直線，3 次元では平面) に関する鏡映・正射影は線型写像である。
○ 成分を一切使っていない。線型写像もどういう座標軸

を選んだかに依らない概念である！
○ 基底を 1 組定める。$\boldsymbol{y}=T(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^{m}y_i\boldsymbol{e}'_i$. T に対して数 a_{ij} が $T(\boldsymbol{e}_j)=\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{e}'_i a_{ij}$ と定まり，$y_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j$ となる。つまり線型写像 T に対して $(m\times n)$ 行列 $A=(a_{ij})$ が対応する。縦ベクトル $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ と行列 A の積を $(A\vec{x})_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j$ と定義すると，$\boldsymbol{y}=T(\boldsymbol{x})$ は $\vec{y}=A\vec{x}$ と表される。
線型写像 T, S に対応する行列を $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ として，線型写像の和 $T+S$ $[(T+S)(\boldsymbol{x})\overset{\text{def}}{=}T(\boldsymbol{x})+S(\boldsymbol{x})]$, スカラー倍 kT $[(kT)(\boldsymbol{x})\overset{\text{def}}{=}kT(\boldsymbol{x})]$, 合成 $T\circ S$ $[(T\circ S)(\boldsymbol{x})\overset{\text{def}}{=}T(S(\boldsymbol{x}))]$ に対応する様に行列の和 $A+B$, スカラー倍 kA, 積 AB を定義すると，$(A+B)_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, $(kA)_{ij}=ka_{ij}$, $(AB)_{ij}=\sum_k a_{ik}b_{kj}$ となる。
● よって分かった事は $\boxed{\text{板書 12}}$
・縦ベクトル $\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$ を $n\times 1$ 行列と思うと $\boxed{\text{板書 13}}$
◎ ベクトルと線型写像はどういう座標軸 (基底) を選んだかに依らない概念。
・基底を 1 つ決めれば成分で表される：
　ベクトル→数ベクトル，線型写像→行列
　(内積は正規直交基底を選ぶと式が簡単)。
・基底を変えれば成分は変わる。
○ $\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}$ はベクトル？
「ベクトルのある基底での成分が $\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}$ になっている」と考えるならばベクトルであるが，例えば単に「いつでも a_1, a_2 という数字が並んだ $\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}$」ならばベクトルではない。 $\boxed{\text{板書 14}}$ $(\vec{e}'_1\ \vec{e}'_2)=(\vec{e}_1\ \vec{e}_2)\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

$$\vec{a}=(\vec{e}_1\ \vec{e}_2)\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}=(\vec{e}'_1\ \vec{e}'_2)\begin{pmatrix}a'_1\\ a'_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}a'_1\\ a'_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}.$$

成分主体で見た場合には，「ベクトル」=「座標変換をした時に，座標と同じ様に変換される量」である。
また，「スカラー」=「座標変換をした時に，変わらない量」である。
○ ベクトルの式が与えられたら，都合のよい座標軸 (基底) を選んで成分で計算する事が出来る。
例：Newton の運動方程式 $m\ddot{\vec{x}}=\vec{F}$。
◎ ベクトルや線型写像を扱う線型代数はどこで役立つ？
・概念として　例：量子力学
・計算道具として　例：ばねの振動

§ 1.1　3 次元ベクトル (和，スカラー倍，内積，外積)

和，スカラー倍，内積については上で見た。3 次元ベクトルに対しては外積という演算が考えられる。
◎ 外積
・外積：2 つのベクトルに 1 つのベクトルを対応させる規則。$\vec{a}\times\vec{b}$
向き：$\vec{a}$, $\vec{b}$ に垂直で，$\vec{a}$ から $\vec{b}$ に回した時に右ねじの
　進む向き
大きさ：$\vec{a}$, $\vec{b}$ で張られる平行四辺形の面積

$\boxed{\text{板書 15}}$ $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\theta$
● 性質
　(1) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ $({}^\forall\vec{a},\vec{b})$
　(2) $\vec{c}\times(\vec{a}+\vec{b})=\vec{c}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{b}$ $({}^\forall\vec{a},\vec{b},\vec{c})$
　(3) $\vec{c}\times(k\vec{a})=k(\vec{c}\times\vec{a})$ $({}^\forall k,\vec{a},\vec{c})$
　(4) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$ $({}^\forall\vec{a},\vec{b},\vec{c})$
図で証明できる。[別紙 No.1①]
○ 成分を一切使っていない。外積もどういう座標軸を選んだかに依らない概念である！
・注：ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ に対して，$\vec{a}\times\vec{b}$ は軸性ベクトルである。(鏡に映した時の振る舞いが異なる。)
○ 直交座標軸を 1 つ定める (正規直交基底を 1 組定める)。
$\boxed{\text{板書 16}}$ 注：物理では右手系を用いる。
成分を用いて外積は $\boxed{\text{板書 17}}$
◎ 計算例
・$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ $\boxed{\text{板書 18}}$
・$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d})-(\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})$ $\boxed{\text{板書 19}}$
◎ § 1 で覚える事 $\boxed{\text{板書 20}}$

§ 2　微分

◎ 微分＝“瞬間”の変化率
・$y=y(x)$, $\Delta y=y(x+\Delta x)-y(x)$ $\boxed{\text{板書 1}}$
● 性質 (それぞれ微分が存在するとして)
(1) 線型性 $\begin{cases}(f+g)'=f'+g'\\ (kf)'=kf'\ (k\text{：定数})\end{cases}$
(2) 積の微分 (Leibniz 則) $(fg)'=f'g+fg'$
(3) 合成関数の微分 $z=z(y)$, $y=y(x)$
　$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$, $\big(f(g(x))\big)'=f'(g(x))g'(x)$
・(3) ⇒ 逆関数の微分 $\frac{dy}{dx}=1/\frac{dx}{dy}$
・基本：$(1)'=0$, $(x^a)'=ax^{a-1}$, $(e^x)'=e^x$,
　　$(\sin x)'=\cos x$.
・例 $y=y(x)=e^{ax+b}\sin(cx+d)$ $\boxed{\text{板書 2}}$
○ 偏微分
・多変数関数 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$：独立変数が沢山ある。
$\frac{\partial}{\partial x_1}$：$x_1$ だけ変数，他は定数と思って微分する。
・“良い関数”ならば結果は偏微分の順序に依らない。
・例 $E=E(t,x)=E_0\cos(kx-\omega t)$ $\boxed{\text{板書 3}}$

§ 2.1　時間微分

○ “時間”微分 $\boxed{\text{板書 4}}$
座標軸を 1 つ固定 (つまり $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ は t に依らない)。

$$\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3=(\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3)\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix},$$

$\vec{a}=\vec{a}(t)=\begin{pmatrix}a_1(t)\\ a_2(t)\\ a_3(t)\end{pmatrix}$, $\Delta\vec{a}=\vec{a}(t+\Delta t)-\vec{a}(t)$ $\boxed{\text{板書 5}}$
○ 例
・位置ベクトル (座標)・速度・加速度 $\boxed{\text{板書 6}}$
・$\frac{d}{dt}(\vec{a}\cdot\vec{b})=\dot{\vec{a}}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\dot{\vec{b}}$ $\boxed{\text{板書 7}}$
○ 運動学 [別紙 No.1②]
○ 平面極座標 $\boxed{\text{板書 8}}$

§ 2.2　空間微分 (勾配，発散，回転，ラプラシアン)

座標軸を 1 つ固定
○ 場：空間の各点で値が決まっている。 $\boxed{\text{板書 9}}$
・$\phi(\vec{r})=\phi(x,y,z)$ スカラー場　例 $\boxed{\text{板書 10}}$

・$\vec{a}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} a_1(x,y,z) \\ a_2(x,y,z) \\ a_3(x,y,z) \end{pmatrix}$ ベクトル場　例 $\boxed{\text{板書 11}}$

・例 Coulomb 力 $\boxed{\text{板書 12}}$

・物理の例では更に時刻 t に依る：$\phi = \phi(t, \vec{r})$, $\vec{a} = \vec{a}(t, \vec{r})$

○ 偏微分

x だけ変化 $\Delta\vec{a} = \vec{a}(x+\Delta x, y, z) - \vec{a}(x, y, z)$

$$\frac{\Delta\vec{a}}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \to 0} \frac{\partial\vec{a}}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x} \\ \frac{\partial a_3}{\partial x} \end{pmatrix}$$

・注：$\frac{\partial\vec{a}}{\partial x}$ はベクトルではない。

◎ 微分演算子 $\frac{d}{dx}$

・微分演算子 $\frac{d}{dx}$ を関数 $f(x)$ に掛けると (左から掛ける)，$f(x)$ の x による微分 $\frac{df(x)}{dx}$ を与える。 $\boxed{\text{板書 13}}$

$\frac{d}{dx}$ は右側にいるものを微分する。

・演算子 x を関数 $f(x)$ に掛けるとは，$f(x)$ の x 倍。 $\boxed{\text{板書 14}}$

・一般に，微分演算子 $A = a_n(x)\frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x)$。$f(x)$ に掛けると $Af(x) = a_n(x)\frac{d^n f(x)}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}f(x)}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{df(x)}{dx} + a_0(x)f(x)$。

・微分演算子 A と B の積 AB $\boxed{\text{板書 15}}$

積を強調したい時には ◦ と書く：$AB = A \circ B$。

・$x \circ \frac{d}{dx}$ と $\frac{d}{dx} \circ x$

$\boxed{\text{板書 16}}$ 積の交換法則は成り立たない。

$x \circ \frac{d}{dx} = x\frac{d}{dx}$ と書いても混乱を生じない。

$\frac{d}{dx} \circ x = \frac{d}{dx}x$ と書くと混乱を生じる：

　微分演算子としての積なのか　　　(cf. AB)

　$\frac{d}{dx}$ を関数 x に掛けたものなのか　(cf. $A\vec{x}$)

・独立変数が沢山ある場合も同様：$\frac{\partial}{\partial x_1}$, $\frac{\partial}{\partial x_2}$, ...

◎ ナブラ (nabla) $\vec{\nabla}$

$\boxed{\text{板書 17}}$ ベクトルの微分演算子

● $\vec{\nabla}$ はベクトル

∵直交座標変換 $x'_i = \sum_j a_{ij}x_j$, $A = (a_{ij})$, ${}^tAA = E$.

$\therefore x_j = \sum_i a_{ij}x'_i$. $\frac{\partial}{\partial x'_i} = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_j a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}$. □

◎ ラプラシアン (Laplace 演算子) $\triangle$

$\boxed{\text{板書 18}}$ スカラーの微分演算子

◎ 勾配 (gradient)，発散 (divergence)，回転 (rotation)，ラプラシアン (Laplacian) $\boxed{\text{板書 19}}$

○ 例 $\boxed{\text{板書 20}}$

○ 意味と例

(1) 勾配 [別紙 No.1③] $\boxed{\text{板書 21}}$

(2) 発散 [別紙 No.2④] $\boxed{\text{板書 22}}$

(3) 回転 [別紙 No.2⑤] $\boxed{\text{板書 23}}$

(4) ラプラシアン $\boxed{\text{板書 24}}$

◎ 公式 (§2 の宿題 15 参照)

例えば $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{a} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{a} - \triangle\vec{a}$ $\boxed{\text{板書 25}}$

◎ ポテンシャル

・$\vec{a}$ に対するスカラーポテンシャル ϕ：$\vec{a} = -\mathrm{grad}\,\phi$.

・$\vec{b}$ に対するベクトルポテンシャル $\vec{a}$：$\vec{b} = \mathrm{rot}\,\vec{a}$.

● Thm $\boxed{\text{板書 26}}$

・例 $\boxed{\text{板書 27}}$

● Thm[Helmholtz] $\vec{b} = \vec{b}(\vec{r})$ 連続，$\frac{1}{r}\vec{b}(\vec{r}) \xrightarrow{r\to\infty} \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{b} = -\mathrm{grad}\,\phi + \mathrm{rot}\,\vec{a}$ なる ϕ, $\vec{a}$ が (付加定数を除いて) 一意的に定まる。

◎ §2 で覚える事 $\boxed{\text{板書 28}}$

§3　積分

§3.1　多重積分

◎ 積分＝細かく分けて“体積”に“重み”を掛けて足し合わせる $\boxed{\text{板書 1}}$ [別紙 No.2⑥]

● 性質 (それぞれ積分が存在するとして)

(1) 線型性 $\begin{cases} \int_D (f+g)d\mu = \int_D f d\mu + \int_D g d\mu \\ \int_D kf d\mu = k\int_D f d\mu \ (k：定数) \end{cases}$

(2) 部分積分 (一般は後で)

　$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$

(3) 積分の変数変換

　($\int_D f(x_1, \ldots, x_n)dx_1\cdots dx_n = \int_D f(x)d^n x$ と書く)

　$\int_D f(x)d^n x = \int_{D'} f(x(t))|J|d^n t$

　D と D' は 1 対 1 対応 $x_i = x_i(t_1, \ldots, t_n)$,

　$J = \frac{\partial(x_1,\ldots,x_n)}{\partial(t_1,\ldots,t_n)} = \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial t_j}\right)$ (ヤコビアン)

・積分が存在すれば，結果は積分の順序に依らない。

・ヤコビアンの例 $\boxed{\text{板書 2}}$

○ 注意

・積分は定積分 $\boxed{\text{板書 3}}$

・$\int_{D_1\cup D_2} f d\mu = \int_{D_1} f d\mu + \int_{D_2} f d\mu - \int_{D_1\cap D_2} f d\mu$

・高校の置換積分 $\boxed{\text{板書 4}}$

・Riemann 積分と Lebesgue 積分 $\boxed{\text{板書 5}}$

・「積分できる」とは？　(↔「積分できない」)

{ 積分可能つまり積分が存在
{ 積分の結果を知っている関数で書ける

　本来は上の意味だが，よく下の意味で使う。

◎ 有限和の例 $\boxed{\text{板書 6}}$

◎ 重積分の例 $\boxed{\text{板書 7}}$

◎ 3 重積分の例 $\boxed{\text{板書 8}}$

§3.2　線積分，面積分

◎ 線積分：曲線上の 1 次元積分

　[別紙 No.2⑦]

・$d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$ なので $\int_C \vec{a}\cdot d\vec{r} = \int_C (a_x dx + a_y dy + a_z dz)$ と書く事もある。

○ 計算方法

C をパラメータ表示する。C: $\vec{r} = \vec{r}(t)$ $(t : \alpha \to \beta)$.

C と $I = [\alpha, \beta]$ (または $I = [\beta, \alpha]$) は 1 対 1。

$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}\Delta t$, $\Delta s = |\Delta\vec{r}| = |\frac{d\vec{r}}{dt}|\Delta t$.

$\boxed{\text{板書 9}}$

○ 例 $\boxed{\text{板書 10}}$

○ Biot-Savart の法則 $\boxed{\text{板書 11}}$

◎ 面積分：曲面上の 2 次元積分　[別紙 No.3⑧]

○ 計算方法

・その 1 [別紙 No.3⑨] $\boxed{\text{板書 12}}$

・その 2 [別紙 No.3⑩] $\boxed{\text{板書 13}}$

○ 例 $\boxed{\text{板書 14}}$

◎ 体積積分：(3 次元空間では単なる)3 重積分

　[別紙 No.3⑪]

○ 例 $\boxed{\text{板書 15}}$

§ 3.3　積分定理 (Stokes の定理，Gauss の定理)

◎ Green の定理 (平面)

$\boxed{\text{板書 16}}$　[別紙 No.4⑫]

∘ 例 $\boxed{\text{板書 17}}$

◎ Stokes の定理

$\boxed{\text{板書 18}}$　z 成分=0 とすれば Green の定理

[別紙 No.4⑬]

・注：$\vec{a}$ はベクトルでなくてもよい。つまり単に $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ という 3 つの関数の組でよい。

∘ 例 $\boxed{\text{板書 19}}$

◎ Gauss の定理

$\boxed{\text{板書 20}}$　[別紙 No.5⑭]

・注：$\vec{a}$ はベクトルでなくてもよい。

∘ 例 $\boxed{\text{板書 21}}$

◎ 参考　微分幾何学

　微分形式　Stokes の定理 $\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega$

◎ 例

・Gauss の積分 $\boxed{\text{板書 22}}$

・立体角 $\boxed{\text{板書 23}}$

・Green の定理 $\boxed{\text{板書 24}}$

◎ § 3 で覚える事 $\boxed{\text{板書 25}}$

§ 4　さらに進んで

§ 4.1　完全反対称シンボル

∘ Kronecker デルタ δ_{ij}

$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$, 内積 $\boxed{\text{板書 1}}$

◎ 完全反対称シンボル ε_{ijk} $(i, j, k = 1, 2, 3)$

$\boxed{\text{板書 2}}$

・外積 $\boxed{\text{板書 3}}$

• $\sum_{m=1}^{3} \varepsilon_{ijm}\varepsilon_{klm} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$ $\boxed{\text{板書 4}}$

∘ 使いこなせると計算が簡単になる！ $\boxed{\text{板書 5}}$

§ 4.2　直交曲線座標

◎ 平面極座標

$\boxed{\text{板書 6}}$ 本質的内容は全てここに含まれている

◎ 直交曲線座標

[別紙 No.5⑮]

∘ 例

・円筒座標 (円柱座標) $\boxed{\text{板書 7}}$

・空間極座標 $\boxed{\text{板書 8}}$

§ 4.3　Maxwell 方程式

$\boxed{\text{板書 9}}$

◎ Maxwell 方程式

∘ 一般 (物質中) $\boxed{\text{板書 10}}$

　$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ ($\vec{P} // \vec{E}$ の時 $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$),

　$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$ ($\vec{M} // \vec{H}$ の時 $\vec{B} = \mu \vec{H}$),

　$\vec{E}$, $\vec{D}$, $\vec{B}$, $\vec{H}$, ρ, $\vec{j}$, $\vec{P}$, $\vec{M}$：場 (t と $\vec{r}$ の関数)

∘ $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$ (ε, μ は t に依らない) の場合

$\boxed{\text{板書 11}}$

∘ 真空中 ($\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$, $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \leftarrow \vec{P} = \vec{M} = \vec{0}$)

$\boxed{\text{板書 12}}$

・$\rho = 0$, $\vec{j} = \vec{0}$ の時 $\boxed{\text{板書 13}}$

・ρ, $\vec{j}$ ありで $\boxed{\text{板書 14}}$

・Lorentz 不変性：Lorentz 変換 (回転とブースト) の下で Maxwell 方程式は形を変えない。共変形式で $\boxed{\text{板書 15}}$

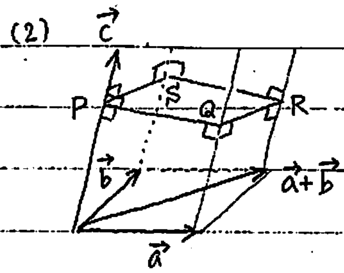
§ 4.4　積分定理の威力

Stokes の定理・Gauss の定理を使う事で，積分を直接計算せずに求められる事がある。

∘ 例 $\boxed{\text{板書 16}}$

①

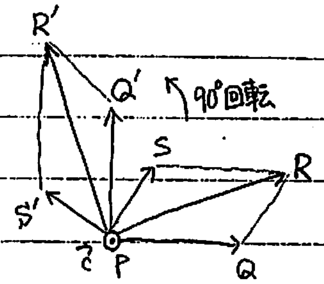
(2)



$|\vec{c}\times\vec{a}| = |\vec{c}|\,\overline{PQ}$

$|\vec{c}\times\vec{b}| = |\vec{c}|\,\overline{PS}$

$|\vec{c}\times(\vec{a}+\vec{b})| = |\vec{c}|\,\overline{PR}$

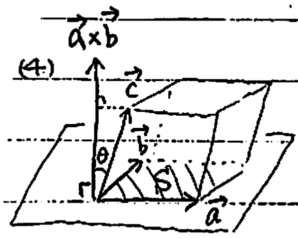


$\vec{c}\times\vec{a} = |\vec{c}|\,\overrightarrow{PQ'}$

$\vec{c}\times\vec{b} = |\vec{c}|\,\overrightarrow{PS'}$

$\vec{c}\times(\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{c}|\,\overrightarrow{PR'}$

(4)



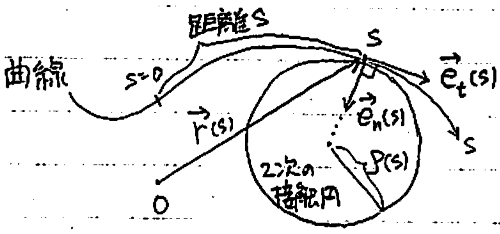
(符号付き)体積

$= S\times|\vec{c}|\cos\theta$

$= |\vec{a}\times\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cos\theta$

$= (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$

②

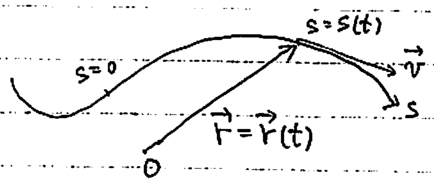


$\vec{e}_t(s) = \dfrac{d\vec{r}(s)}{ds}$ ：接線単位ベクトル

$\dfrac{d}{ds}\vec{e}_t(s) = \dfrac{1}{\rho(s)}\vec{e}_n(s)$　$\vec{e}_n(s)$：主法線単位ベクトル $\perp\vec{e}_t$

$\rho(s)$：曲率半径

$\vec{e}_b(s) = \vec{e}_t(s)\times\vec{e}_n(s)$ ：従法線単位ベクトル

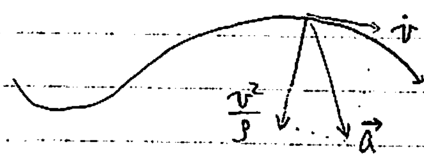


速度 $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{s}\,\vec{e}_t = v\,\vec{e}_t{}'$

速さ $v = |\vec{v}| = |\dot{s}|$　　$\vec{e}_t{}' = \dfrac{\dot{s}}{|\dot{s}|}\vec{e}_t$

↑($\dot{s}=0$を除いて) ±1

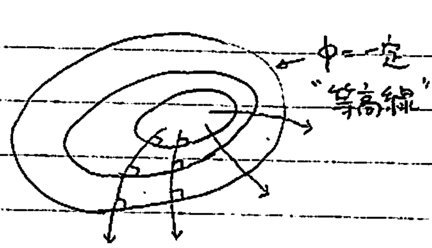
加速度 $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \dot{v}\,\vec{e}_t{}' + v\,\dot{\vec{e}}_t{}' = \dot{v}\,\vec{e}_t{}' + \dfrac{v^2}{\rho}\vec{e}_n$



接線成分　$\dot{v}$　速度の大きさを変える

(内向き)法線 〃　$\dfrac{v^2}{\rho}$　〃　向き　〃

③



$\Delta\phi = \phi(\vec{r}+\Delta\vec{r}) - \phi(\vec{r})$　　$\Delta\vec{r}$ 微小

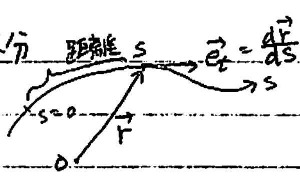
$= \phi(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - \phi(x,y,z)$

$= \dfrac{\partial\phi}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial\phi}{\partial y}\Delta y + \dfrac{\partial\phi}{\partial z}\Delta z + \cdots$

$= \mathrm{grad}\,\phi\cdot\Delta\vec{r}$

$\Delta\vec{r}$ が $\mathrm{grad}\,\phi$ の方向になっているとき ϕ の変化が最大

・方向微分



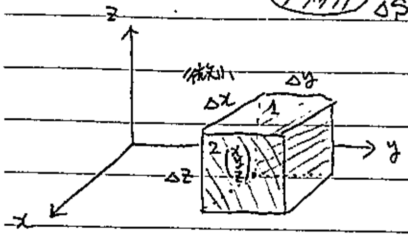
$\phi = \phi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}(s))$

$\dfrac{d\phi}{ds} = \dfrac{\partial\phi}{\partial x}\dfrac{dx}{ds} + \dfrac{\partial\phi}{\partial y}\dfrac{dy}{ds} + \dfrac{\partial\phi}{\partial z}\dfrac{dz}{ds}$

$= \vec{\nabla}\phi\cdot\vec{e}_t = (\vec{e}_t\cdot\vec{\nabla})\phi$

④

$\vec{a}$ "流れ"  単位時間当たり $a_n \Delta S$ 流れ出す



面1 を通って $-a_x(x,y,z)\Delta y \Delta z$ 出て行く

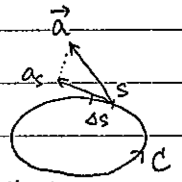
面2 〃 $a_x(x+\Delta x, y, z)\Delta y \Delta z$ 出て行く

足して $\frac{\partial a_x}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial a_x}{\partial x}\Delta V$ 出て行く

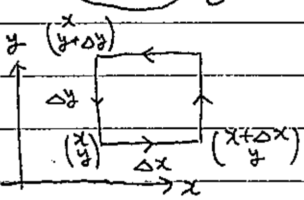
微小直方体から出て行くのは $\frac{\partial a_x}{\partial x}\Delta V + \frac{\partial a_y}{\partial y}\Delta V + \frac{\partial a_z}{\partial z}\Delta V = \mathrm{div}\,\vec{a}\cdot\Delta V$

単位体積当たり $\mathrm{div}\,\vec{a}$ 流れ出ている

⑤

$\vec{a}$ 流れ  $\sum a_s \Delta s \to \oint a_s ds$ 循環

z=一定の面で（つまり xy 平面に平行な面）



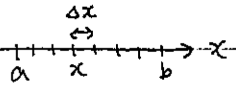
$$\begin{aligned}
&\overset{\text{省略}}{a_x(x,y)}\Delta x + a_y(x+\Delta x, y)\Delta y \\
&\quad - a_x(x, y+\Delta y)\Delta x - a_y(x,y)\Delta y \\
&= (a_y(x+\Delta x, y) - a_y(x,y))\Delta y + (\cdots)\Delta x \\
&= \frac{\partial a_y}{\partial x}\Delta x \Delta y - \frac{\partial a_x}{\partial y}\Delta y \Delta x \\
&= (\mathrm{rot}\,\vec{a})_z \Delta x \Delta y
\end{aligned}$$

（ちょっとインチキしている。本当は….。④も。）

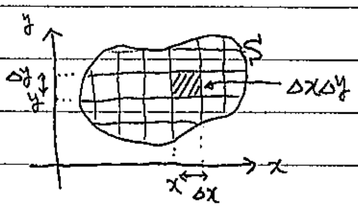
単位面積当たり $(\mathrm{rot}\,\vec{a})_z$ 回っている。

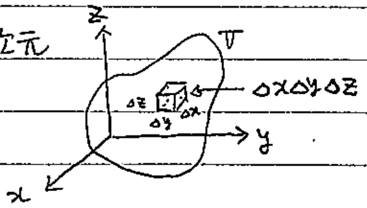
yz 平面 $(\mathrm{rot}\,\vec{a})_x$, zx 平面 $(\mathrm{rot}\,\vec{a})_y$

⑥

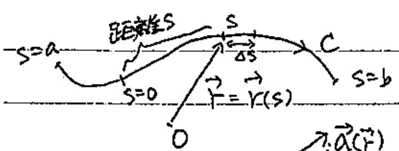
1次元  $\sum f(x)\Delta x \to \int_I f(x)dx$ $I=[a,b]$ (当然 $a<b$)

$\int_I f(x)dx = \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ とも書く

2次元  $\sum f(x,y)\Delta x \Delta y \to \iint_S f(x,y)\,dxdy$

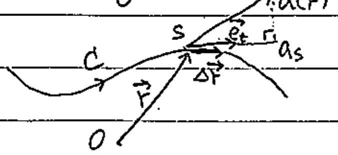
3次元  $\sum f(x,y,z)\Delta x \Delta y \Delta z \to \iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz$

⑦



$\phi = \phi(\vec{r})$ $\sum \phi \Delta s \to \int_C \phi\, ds = \int_a^b \phi(\vec{r}(s))\,ds$

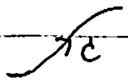
$\sum \vec{a}\Delta s \to \int_C \vec{a}\,ds$

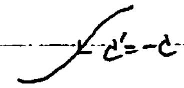


$\vec{a} = \vec{a}(\vec{r})$ $\sum \vec{a}\cdot\Delta\vec{r} \to \int_C \vec{a}\cdot d\vec{r} = \int_C \vec{a}\cdot\vec{e}_t\,ds = \int_C a_s\,ds$

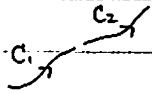
$\vec{e}_t = \frac{d\vec{r}}{ds}$, $d\vec{r} = \vec{e}_t\,ds$

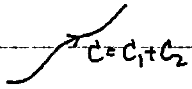
つづく



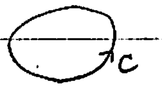
逆向き


$\int_{-C}\phi\,ds = -\int_C \phi\,ds$

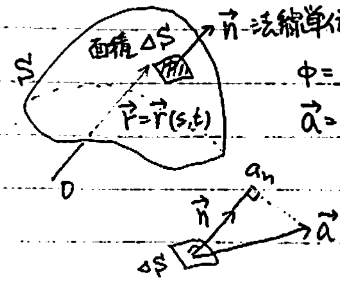


つなげて


$\int_{C_1+C_2}\phi\,ds = \int_{C_1}\phi\,ds + \int_{C_2}\phi\,ds$

閉曲線
ループ


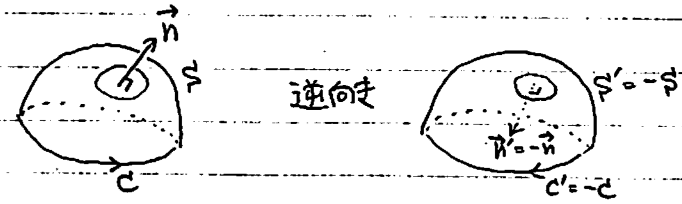
$\oint_C \phi\,ds$　$\oint_C \vec{a}\cdot d\vec{r}$: 循環

⑧


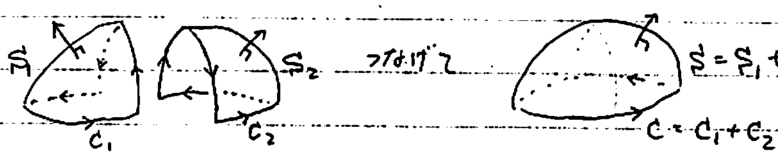
$\phi=\phi(\vec{r})$　$\sum\phi\Delta S \to \int_S \phi\,dS$

$\vec{a}=\vec{a}(\vec{r})$　$\sum \vec{a}\Delta S \to \int_S\vec{a}\,dS$

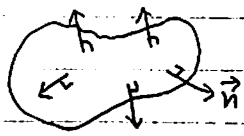
$\Delta\vec{S}=\vec{n}\Delta S$　$\sum\vec{a}\cdot\Delta\vec{S}\to\int_S\vec{a}\cdot d\vec{S}=\int_S\vec{a}\cdot\vec{n}\,dS=\int_S a_n\,dS$

面の向きと境界


$\int_{S'}\phi\,dS=-\int_S\phi\,dS$

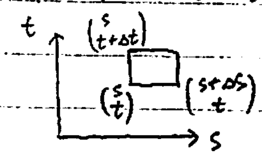


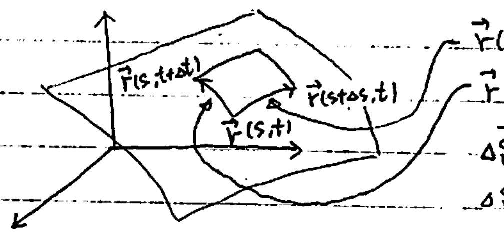
$\int_{S_1+S_2}\phi\,dS = \int_{S_1}\phi\,dS+\int_{S_2}\phi\,dS$

閉曲面


法線外向き

⑨ Sをパラメーター表示する　$S:\vec{r}=\vec{r}(s,t)$　$\binom{s}{t}\in D \overset{1対1}{\longleftrightarrow} S$





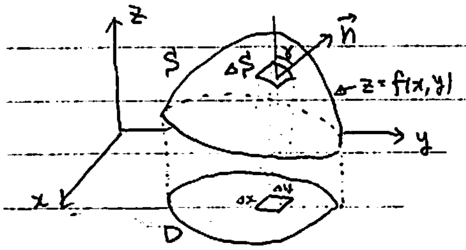
$\vec{r}(s+\Delta s,t)-\vec{r}(s,t)=\frac{\partial\vec{r}}{\partial s}\Delta s$

$\vec{r}(s,t+\Delta t)-\vec{r}(s,t)=\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\Delta t$

$\Delta\vec{S}=\pm\frac{\partial\vec{r}}{\partial s}\Delta s\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial t}\Delta t$

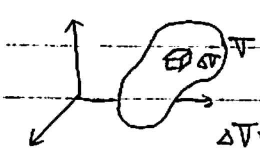
$\Delta S=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial s}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial t}\right|\Delta s\Delta t$

⑩ 特に s,t として x,y,z のうちの2つをとる場合。例えば $S: z=f(x,y)$ なら



$\Delta S|\cos\gamma|=\Delta x\Delta y$,　$\cos\gamma=\vec{n}\cdot\vec{e}_3$

$F(\vec{r})=z-f(x,y)$ とおくと曲面は $F=0$

⑪


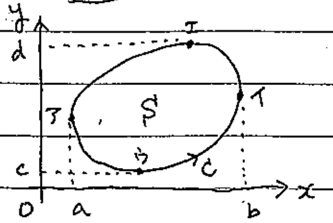
$\phi=\phi(\vec{r})$　$\sum\phi\Delta V\to\int_V\phi\,dV=\int_V\phi\,dxdydz$

$\vec{a}=\vec{a}(\vec{r})$　$\sum\vec{a}\Delta V\to\int_V\vec{a}\,dV$

$\Delta V=\Delta x\Delta y\Delta z$

⑫ ◦ Greenの定理（平面）の証明（概略）

まず  のとき



アエイ $y=g(x)$　　アウイ $y=f(x)$

$$\int_S \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \int_a^b dx \int_{f(x)}^{g(x)} dy \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$= \int_a^b dx \left(P(x, g(x)) - P(x, f(x)) \right)$$

$$= \int_{ア\overset{エ}{\frown}イ} Pdx - \int_{ア\underset{ウ}{\smile}イ} Pdx$$

$$= -\oint_C Pdx$$

ウイエ $x=i(y)$　　ウアエ $x=h(y)$

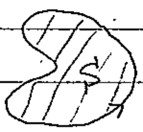
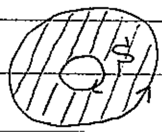
$$\int_S \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy = \int_c^d dy \int_{h(y)}^{i(y)} dx \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$= \int_c^d dy \left(Q(i(y), y) - Q(h(y), y) \right)$$

$$= \int_{ウ\,イ\,エ} Qdy - \int_{ウ\,ア\,エ} Qdy$$

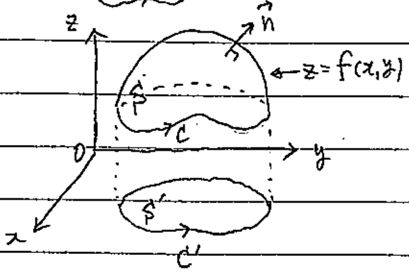
$$= \oint Qdy$$

$$\therefore \int_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint_C (Pdx + Qdy)$$

次に 　次に 

⑬ ◦ Stokesの定理の証明（概略）

まず  のとき



$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x} \\ -\frac{\partial f}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad d\vec{S} = \vec{n}dS = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x} \\ -\frac{\partial f}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix} dxdy$$

左辺の a_x に依る部分

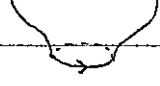
$$= \int_S \left(\frac{\partial a_x}{\partial z}\vec{e}_2 - \frac{\partial a_x}{\partial y}\vec{e}_3 \right) \cdot d\vec{S}$$

$$= \int_{S'} \left(-\frac{\partial a_x}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) dxdy$$

$a_x(x, y, f(x,y)) = F(x,y)$ とおくと $= -\int_{S'} \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} dxdy$

Greenの定理（平面）より $= \oint_{C'} F(x,y)dx$

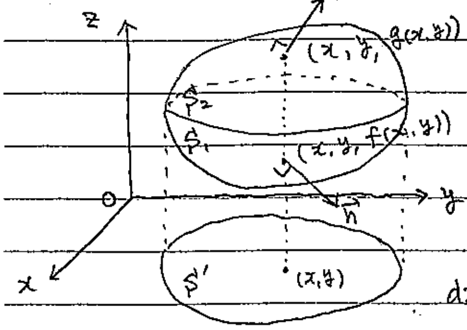
$$= \oint_C a_x dx$$

次に 　次に 

a_y, a_z に依る部分も同様なので、$\int_S \mathrm{rot}\,\vec{a}\cdot d\vec{S} = \int_C (a_x dx + a_y dy + a_z dz) = \oint_C \vec{a}\cdot d\vec{r}$

⑭ ○ Gaussの定理の証明（概略）

まず  のとき



左辺の a_z に依る部分

$$= \int_V \frac{\partial a_z}{\partial z}\, dV$$

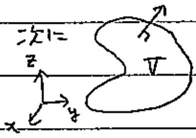
$$= \int_{S'} dxdy \int_{f(x,y)}^{g(x,y)} dz \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

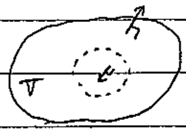
$$= \int_{S'} dxdy \left(a_z(x,y,g(x,y)) - a_z(x,y,f(x,y)) \right)$$

$dxdy = |n_z|\, dS$ より

$$= \int_{S_2} a_z n_z dS + \int_{S_1} a_z n_z dS$$

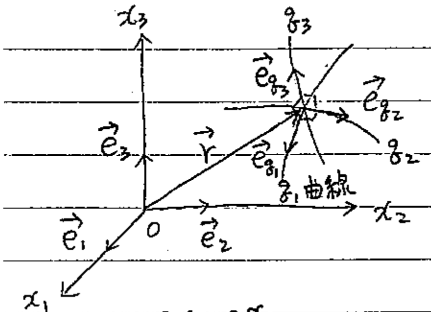
$$= \int_S a_z n_z dS$$

次に 

次に 

a_x, a_y に依る部分も同様なので、$\int_V \mathrm{div}\,\vec a\, dV = \int_S (a_x n_x + a_y n_y + a_z n_z) dS = \int_S \vec a \cdot \vec n\, dS = \int_S \vec a \cdot d\vec S$

⑮ ◎ 直交曲線座標



$$x_i = x_i(q_1, q_2, q_3)$$

$$q_i = q_i(x_1, x_2, x_3)$$

$$\Delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1}\Delta q_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2}\Delta q_2 + \frac{\partial x_i}{\partial q_3}\Delta q_3 = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\Delta q_j$$

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = \sum_i (\Delta x_i)^2 = \sum_{i,j,k} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\Delta q_j \Delta q_k$$

$\sum_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\frac{\partial x_i}{\partial q_k} = 0 \quad (j \neq k)$ と仮定する。 …※

$\sum_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right)^2 = h_j^2 \quad (h_j > 0)$ とおく。

長さ

$(\Delta s)^2 = \sum_i h_i^2 (\Delta q_i)^2 = \sum_i (\Delta s_i)^2$ 　　 $\Delta s_i = h_i \Delta q_i$ 　　 $(\Delta s)^2 = (\Delta \vec r)^2$

$$\Delta V = \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 = \Delta s_1 \Delta s_2 \Delta s_3 = h_1 h_2 h_3 \Delta q_1 \Delta q_2 \Delta q_3$$

$ds^2 = \sum_i h_i^2 dq_i^2$, 　 $\dot{\vec r}^2 = \sum_i h_i^2 \dot q_i^2$, 　 $dV = dx_1 dx_2 dx_3 = h_1 h_2 h_3\, dq_1 dq_2 dq_3$

$\vec e_{q_i} = \dfrac{\frac{\partial \vec r}{\partial q_i}}{\left|\frac{\partial \vec r}{\partial q_i}\right|} = \dfrac{1}{h_i}\dfrac{\partial \vec r}{\partial q_i}$ 　　 $\vec e_{q_i} \cdot \vec e_{q_j} = \delta_{ij}$ ☺ 〜//

$$\vec r = \sum_i x_i \vec e_i$$

$\vec e_{q_i} = \sum_j \frac{1}{h_i}\frac{\partial x_j}{\partial q_i}\vec e_j = \sum_j \vec e_j (A^{-1})_{ji}$ 　　 $(A^{-1})_{ij} = \frac{1}{h_j}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}$ 　　 $A = (A_{ij})$

$A_{ij} = h_i \frac{\partial q_i}{\partial x_j} = \frac{1}{h_i}\frac{\partial x_j}{\partial q_i}$ ☺ 〜// 　 ∴ A 直交行列

$\vec a = \vec a(\vec r)$

$= \sum_i a_i \vec e_i = \sum_i a_{q_i} \vec e_{q_i}$ 　　 ∴ $a_{q_i} = \sum_j A_{ij} a_j$

$\frac{\partial}{\partial q_i} = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial x_j}$ 　 ∴ $\frac{1}{h_i}\frac{\partial}{\partial q_i} = \sum_j A_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}$ 　 ∴ $\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_j (A^{-1})_{ij}\frac{1}{h_j}\frac{\partial}{\partial q_j}$

つづく

$\vec{e}_{q_i} = h_i \vec{\nabla} q_i$ ☺ 〜 //

$\dfrac{\partial \vec{e}_{q_i}}{\partial q_j} = \sum_k C_k^{(ij)} \vec{e}_{q_k}$, $C_k^{(ij)} = \delta_{jk} \dfrac{1}{h_i}\dfrac{\partial h_j}{\partial q_i} - \delta_{ji}\dfrac{1}{h_k}\dfrac{\partial h_j}{\partial q_k}$ ☺ 〜 //

- $\vec{\nabla} = \sum_i \vec{e}_i \dfrac{\partial}{\partial x_i} = \sum_i \vec{e}_{q_i} \dfrac{1}{h_i}\dfrac{\partial}{\partial q_i}$

$\mathrm{grad}\,\phi = \vec{\nabla}\phi = \sum_i \vec{e}_{q_i} \dfrac{1}{h_i}\dfrac{\partial \phi}{\partial q_i}$

$$\mathrm{div}\,\vec{a} = \vec{\nabla}\cdot\vec{a} = \left(\sum_i \vec{e}_{q_i}\frac{1}{h_i}\frac{\partial}{\partial q_i}\right)\cdot\left(\sum_j a_{q_j}\vec{e}_{q_j}\right)$$
$$= \sum_i \frac{1}{\prod_j h_j}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\prod_{j\neq i} h_j \cdot a_{q_i}\right)$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{a} = \vec{\nabla}\times\vec{a} = \left(\sum_j \vec{e}_{q_j}\frac{1}{h_j}\frac{\partial}{\partial q_j}\right)\times\left(\sum_k a_{q_k}\vec{e}_{q_k}\right)$$
$$= \sum_i \vec{e}_{q_i}\sum_{j,k}\varepsilon_{ijk}\frac{1}{h_j h_k}\frac{\partial}{\partial q_j}\left(h_k a_{q_k}\right)$$

$$\Delta\phi = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\phi = \sum_i \frac{1}{\prod_j h_j}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\prod_{j\neq i} h_j \cdot \frac{1}{h_i}\frac{\partial \phi}{\partial q_i}\right)$$

$$\Delta\vec{a} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{a} - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{a}$$

☺ 前ページの式を使う，又は意味を考える。// (注) rot 以外は n 次元で OK

参考 一般の $ds^2 = \sum_{ij} g_{ij}\,dx^i dx^j$ では $\Delta\phi = \sum_{ij}\dfrac{1}{\sqrt{g}}\dfrac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}\,g^{ij}\dfrac{\partial\phi}{\partial x^j}\right)$

共変微分，一般相対性理論

物理数学Iの宿題 [ver.2.1.1] (授業促進のためのノート [ver.2.1.1] に準拠)

§1〜§3の問題 (合計104点) をレポート課題とする (提出・締切等については授業で述べる)。
問題文は (わざと) 手短かに書いてある。ベクトルは $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ の様に書きたいのであるが，紙面を節約するために $^t(a_1, a_2, a_3)$ の様に書いてある。皆さんは $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ と書くように。ミスプリを見つけたら連絡して下さい。

§1の宿題

1. (2点) 成分を用いて確かめよ。
   $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$, $\quad \vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b}$, $\quad \vec{c} \cdot (k\vec{a}) = k(\vec{c} \cdot \vec{a})$, $\quad \vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$ (等号成立は $\vec{a} = \vec{0}$).
2. (2点) 成分を用いて確かめよ。
   $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$, $\quad \vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}$, $\quad \vec{c} \times (k\vec{a}) = k(\vec{c} \times \vec{a})$.
3. (2点) 成分を用いて確かめよ。
   $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}, \vec{b}$, $\quad |\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2$, $\quad (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix}$ (3次行列式).
4. (2点) $\vec{a} = {}^t(1, 2, -3)$, $\vec{b} = {}^t(4, -5, 6)$, $\vec{c} = {}^t(-7, 8, 9)$ に対して，
   $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$, $\quad (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$, $\quad \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b})$. (具体的に計算せよ)
5. (2点) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b})$.
6. (2点) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$, $\quad (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$.

§2の宿題

1. (2点) $\frac{d}{dt}(k\vec{a})$, $\quad \frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{b})$, $\quad \frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b})$.
2. (2点) $\vec{a}$ の大きさ一定ならば $\vec{a} \perp \dot{\vec{a}}$.
3. (2点) $m\ddot{\vec{r}} = \vec{f}$ の時，$\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{f}$ とおくと，$\dot{\vec{p}} = \vec{f}$, $\dot{\vec{L}} = \vec{N}$.
4. (2点) $\vec{r} = {}^t(t^3 - 4t, t^2 + 4t, 8t^2 - 3t^3)$ に対し，$\dot{\vec{r}}$, $\ddot{\vec{r}}$。$t = 2$ での $\ddot{\vec{r}}$ の接線成分，法線成分。
5. (2点) 平面極座標 $\vec{r} = {}^t(r\cos\theta, r\sin\theta)$ での速度 $\dot{\vec{r}}$，加速度 $\ddot{\vec{r}}$.
6. (2点) $\phi = 3x^2y - y^3z^2$, $\vec{a} = {}^t(x^2z, -2y^3z^2, xy^2z)$ に対し，$\mathrm{grad}\,\phi$, $\mathrm{div}\,\vec{a}$, $\mathrm{rot}\,\vec{a}$, $\triangle\,\phi$, $\triangle\,\vec{a}$.
7. (2点) $\phi = x^2yz$, $\vec{a} = {}^t(2xz^2, -yz, 3xz^3)$ に対し，$\mathrm{grad}\,\phi$, $\mathrm{div}\,\vec{a}$, $\mathrm{rot}\,\vec{a}$, $\triangle\,\phi$, $\triangle\,\vec{a}$.
8. (2点) $\phi = f(r)$ に対し，$\mathrm{grad}\,\phi$, $\triangle\,\phi$.
9. (2点) $\vec{a} = f(r)\vec{r}$ に対し，$\mathrm{div}\,\vec{a}$, $\mathrm{rot}\,\vec{a}$, $\triangle\,\vec{a}$.

10. (2 点) $\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$ に対し，$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\phi$.

11. (2 点) $\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{d}\cdot\vec{r}}{r^3}$ に対し，$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\phi$.

12. (2 点) $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}$ に対し，$\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$.

13. (2 点) $x^2y + 2xz = 4$ 上の点 ${}^t(2,-2,3)$ での法線単位ベクトル。

14. (2 点) 点 O のまわりに一定の角速度ベクトル $\vec{\omega}$ で回転する剛体の点 $\vec{r}$ での速度を $\vec{v}$ とする時，$\mathrm{rot}\,\vec{v}$。

15. (20 点) 以下の公式を書き，また grad , div , rot , $\triangle$ で表せ。また証明せよ。
(1) $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\phi) =?$ (2) $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{a}) =?$ (3) $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{a}) =?$ (4) $\vec{\nabla}(\phi\psi) =?$ (5) $\vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{a}) =?$
(6) $\vec{\nabla}\times(\phi\vec{a}) =?$ (7) $\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{b}) =?$ (8) $\vec{\nabla}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) =?$ (9) $\vec{\nabla}\times(\vec{a}\times\vec{b}) =?$ (10) $\triangle(\phi\psi) =?$

16. (2 点) $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)$, $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0\cos(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)$ が，
$\mathrm{div}\,\vec{E} = 0$, $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$, $\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$, $\mathrm{rot}\,\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ (c は正の定数)
を満たす時，$\vec{E}_0$, $\vec{B}_0$, $\vec{k}$, ω が満足すべき条件。

§3 の宿題

1. (2 点) $\vec{a}(t) = {}^t(-\rho\omega^2\cos\omega t, -\rho\omega^2\sin\omega t, 0)$ に対し，(1) $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t')dt'$ (2) $\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \int_0^t \vec{v}(t')dt'$.

2. (2 点) 質量 M の一様な薄い円盤 (半径 a で，中心部分は半径 b の穴があいている) に関して，円盤と同一面内で中心を通る軸のまわりの慣性モーメント。

3. (2 点) 質量 M の一様な中空球 (外半径 a，内半径 b) の中心を通る軸のまわりの慣性モーメント。

4. (2 点) $O = {}^t(0,0,0)$, $A = {}^t(1,1,1)$, $B = {}^t(1,0,0)$, $\phi = 2x + 7y + 2xz$ に対し，$\int_C \phi ds$. 但し C は (i) $C : OA$, (ii) $C : OBA$, (iii) $C : {}^t(t,t^3,t^2)$ $(t : 0\to 1)$, (iv) $C : {}^t(\cos t, \sin t, 0)$ $(t : 0\to 2\pi)$.

5. (2 点) 前問と同じ状況で，$\vec{a} = {}^t(3xy, -5z, 10x)$ に対し，$\int_C \vec{a}\cdot d\vec{r}$.

6. (2 点) 前々問と同じ状況で，$\vec{f} = {}^t(2xy + z^3, x^2, 3xz^2)$ に対し，$\int_C \vec{f}\cdot d\vec{r}$.

7. (2 点) 前問と同じ状況で，$\vec{f}$ を力とすると，(1) $\vec{f}$ は保存力 (2) 位置エネルギー U
(3) $U(O) - U(A)$.

8. (2 点) $C : {}^t(t^2, 2t, t^3)$ $(t : 0\to 1)$, $\phi = 2xyz^2$ に対し，$\int_C \phi d\vec{r}$.

9. (2 点) $C : {}^t(t^2, 2t, t^3)$ $(t : 0\to 1)$, $\vec{a} = {}^t(xy, -z, x^2)$ に対し，$\int_C \vec{a}\times d\vec{r}$.

10. (2 点) $\vec{r} = {}^t(0,0,z)$, $C : {}^t(a\cos t, a\sin t, 0)$ $(t : 0\to 2\pi)$ に対し，$\vec{B}(\vec{r}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}I\displaystyle\int_C \frac{d\vec{r}'\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$.

11. (2 点) $\vec{r} = {}^t(x,y,z)$, $C : {}^t(0,0,t)$ $(t : -\infty\to\infty)$ に対し，$\vec{B}(\vec{r}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}I\displaystyle\int_C \frac{d\vec{r}'\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$.

12. (2 点) $A = {}^t(6,0,0)$, $B = {}^t(0,4,0)$, $C = {}^t(0,0,2)$, $S = \triangle ABC$, $\vec{a} = {}^t(18z, -12, 3y)$ に対し，$\int_S \vec{a}\cdot d\vec{S}$.

13. (2 点) 前問と同じ状況で，Stokes の定理を確かめよ。

14. (2 点) $S = \{{}^t(x,y,z) | x,y,z \geq 0, z \leq 5, x^2+y^2 = 16\}$, $\phi = \frac{3}{8}xyz$ に対して，$\int_S \phi d\vec{S}$.

15. (2 点) 前問と同じ S，$\vec{a} = {}^t(z, x, -3y^2 z)$ に対して，$\int_S \vec{a}\cdot d\vec{S}$.

16. (2 点) 前問と同じ状況で，Stokes の定理を確かめよ。

17. (2 点) $S = \{{}^t(x,y,z) | x^2+y^2+z^2 = 1, z \geq 0\}$, $\vec{a} = {}^t(2x-y, -yz^2, y^2 z)$ に対して，Stokes の定理を確かめよ。

18. (2 点) $O = {}^t(0,0,0)$, $A = {}^t(1,0,0)$, $B = {}^t(0,1,0)$, $C = {}^t(0,0,1)$, $V = OA, OB, OC$ を 3 辺とする立方体，$\vec{a} = {}^t(4xz, -yz, yz)$ に対して，Gauss の定理を確かめよ。

19. (2点) $O = {}^t(0,0,0)$, $A = {}^t(1,0,0)$, $B = {}^t(0,2,0)$, $C = {}^t(0,0,2)$, $V =$ 四面体 $OABC$，$\phi = xy + xz$ に対して，$\int_V \phi dV$.

20. (2 点) 前問と同じ状況で，$\vec{a} = {}^t(4x, 1-y, z)$ に対して，Gauss の定理を確かめよ。

21. (2 点) $V = \{{}^t(x,y,z) | x^2+y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 3\}$, $\vec{a} = {}^t(4x, -2y^2, z^2)$ に対して，Gauss の定理を確かめよ。

§ 4 の問題

1. § 1 の宿題 6，§ 2 の宿題 12, 15 の (1), (2), (3), (6), (7), (8), (9).

2. 速度・加速度の次の座標系での成分：(1) 円柱座標，(2) 極座標。

3. $\mathrm{grad}\,\phi$, $\mathrm{div}\,\vec{a}$, $\mathrm{rot}\,\vec{a}$, $\triangle\phi$ を次の座標系で：(1) 円柱座標，(2) 極座標。

4. (§ 2 の内容だがここに入れておく。成分を使わずに計算できる点がミソ。)
$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{A}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$ $(r = |\vec{r}|,\ A = Gm_1m_2)$ に対し，$\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$, $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$, $L = |\vec{L}|$, $\vec{e} = \frac{1}{A}\left(\dot{\vec{r}}\times\vec{L} - \frac{A}{r}\vec{r}\right)$, $e = |\vec{e}|$, $E = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - \frac{A}{r}$, $\ell = \frac{L^2}{Am}$ とおく。
(1) $\vec{L}\perp\vec{r}, \dot{\vec{r}}$,　$\dot{\vec{L}} = \vec{0}$. (つまり $\vec{L}$ は定数ベクトル)　(2) $\dot{E} = 0$. (つまり E は定数)
(3) $\vec{e}\perp\vec{L}$,　$\dot{\vec{e}} = \vec{0}$. (つまり $\vec{e}$ は定数ベクトル)　(4) e を m, A, L, E で表せ。
(5) $\vec{r}\cdot\vec{e} = \ell - r$.　(6) $\vec{r}$ と $\vec{e}$ のなす角を θ とする時，$r = \ell/(1 + e\cos\theta)$.

(ついでに) 線型代数の問題

1. 次の行列を対角化せよ。またスペクトル分解せよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 3 & 8 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \\ -2 & -4 & -7 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ -4 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

注：行列 A の対角化とは，$P^{-1}AP = D$ となる対角行列 D と正則行列 P を求めること。
行列 A のスペクトル分解とは，α_i を A の相異なる固有値，P_i を固有値 α_i の固有空間への射影とする時，$A = \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_s P_s$ と表すこと。

2. 次の実対称行列を直交行列で対角化せよ (P として直交行列をとれということ)。またスペクトル分解せよ。

(1) $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -4 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

3. 次のエルミート行列をユニタリ行列で対角化せよ (P としてユニタリ行列をとれということ)。またスペクトル分解せよ。

(1) $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 3 & i & -1 \\ -i & 5 & i \\ -1 & -i & 3 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 0 & i & 1 \\ -i & 0 & i \\ 1 & -i & 0 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 2 & i & 1 & -i \\ -i & 2 & i & 1 \\ 1 & -i & 2 & i \\ i & 1 & -i & 2 \end{pmatrix}$

4. $\vec{a}_1 = {}^t(1,2,1)$, $\vec{a}_2 = {}^t(2,1,-1)$ で張られる空間 (平面) への $\vec{x} = {}^t(x_1,x_2,x_3)$ の正射影を $\vec{x}' = {}^t(x_1',x_2',x_3')$ とする。
(1) $\vec{x}'$ を求めよ。
(2) $A = \big((\vec{a}_i,\vec{a}_j)\big)_{1\le i,j\le 2}$, $P = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} \vec{a}_i (A^{-1})_{ij} {}^t\vec{a}_j$ とおく。$P\vec{x}$ を計算せよ。

5. $\vec{a}_1 = {}^t(1,-2,1)$, $\vec{a}_2 = {}^t(1,2,-1)$ に垂直な原点を通る空間 (直線) への $\vec{x} = {}^t(x_1,x_2,x_3)$ の正射影を $\vec{x}' = {}^t(x_1',x_2',x_3')$ とする。
(1) $\vec{x}'$ を求めよ。
(2) $A = \Big((\vec{a}_i,\vec{a}_j)\Big)_{1\le i,j\le 2}$, $P = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} \vec{a}_i (A^{-1})_{ij} {}^t\vec{a}_j$ とおく。$\vec{x} - P\vec{x}$ を計算せよ。
(3) $(\vec{x},\vec{y})' = (\vec{x},\vec{y}) - \displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} (\vec{x},\vec{a}_i)(A^{-1})_{ij}(\vec{a}_j,\vec{y})$ とおく。$(\vec{x}',\vec{y}')$ と $(\vec{x},\vec{y})'$ を計算せよ。

6. $\vec{a}_1 = {}^t(1,-1,0)$, $\vec{a}_2 = {}^t(0,1,-1)$, $\vec{a}_3 = {}^t(1,0,1)$, $A = (\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j)_{1\le i,j\le 3}$ とおく。
(1) $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ で張られる平行六面体の体積。 (2) A, $\det A$.
(3) $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ に対し，${}^t\vec{x}A\vec{x} \ge 0$ (等号は $\vec{x} = \vec{0}$)。(正値 (実対称行列) と呼ばれ $A > 0$ と表す。)
(4) $\sqrt{A}$. 但し $\sqrt{A}$ は $(\sqrt{A})^2 = A$, $\sqrt{A} > 0$ となる行列。

7. 次の行列の指数関数を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

注：正方行列 A に対して，指数関数は $\exp A = e^A = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$ と定義される。

8. $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\vec{\sigma} = {}^t(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ とおく (Pauli 行列)。

(1) $\sigma_a \sigma_b = \delta_{ab}\, \mathbf{1} + i \displaystyle\sum_{c=1}^{3} \varepsilon_{abc} \sigma_c$. 但し $\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) $[s_a, s_b] = i\hbar \displaystyle\sum_{c=1}^{3} \varepsilon_{abc} s_c$. 但し $s_a = \frac{\hbar}{2} \sigma_a$ ($\hbar$ は定数), $[A, B] = AB - BA$.

(3) $\{\sigma_a, \sigma_b\} = 2\delta_{ab} \mathbf{1}$. 但し $\{A, B\} = AB + BA$.

(4) $\exp(i\theta\sigma_2)$.

(5) $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ に対し，$(\vec{a} \cdot \vec{\sigma})(\vec{b} \cdot \vec{\sigma}) = (\vec{a} \cdot \vec{b})\, \mathbf{1} + i(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{\sigma}$.

(6) $\vec{\theta} \in \mathbb{R}^3$ に対し，$\exp(i\vec{\theta} \cdot \vec{\sigma}) = \cos\theta\, \mathbf{1} + i \sin\theta\, (\frac{1}{\theta} \vec{\theta} \cdot \vec{\sigma})$. 但し $\theta = |\vec{\theta}|$.