# 物理数学Iの演習問題（小竹）

§1の全問及び§2の5,6はやらなくてよい．問題文はわざと手短かに書いてある．

ベクトルは $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ の様に書きたいのであるが，紙面を節約するために ${}^t(a_1, a_2, a_3)$ の様に書いてある．皆さんは $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ の様に書いて下さい．

## 宿題 §1

1. 次の行列を対角化せよ。またスペクトル分解せよ。

   (1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 3 & 8 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \\ -2 & -4 & -7 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ -4 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

   （注）行列 $A$ の対角化とは，$P^{-1}AP = D$ となる対角行列 $D$ と正則行列 $P$ を求めること。行列 $A$ のスペクトル分解とは，$\alpha_i$ を $A$ の相異なる固有値，$P_i$ を固有値 $\alpha_i$ の固有空間への射影とする時，$A = \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_s P_s$ と表すこと。

2. 次の実対称行列を直交行列で対角化せよ（$P$ として直交行列をとれということ）。またスペクトル分解せよ。

   (1) $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -4 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

3. 次のエルミート行列をユニタリ行列で対角化せよ（$P$ としてユニタリ行列をとれということ）。またスペクトル分解せよ。

   (1) $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 3 & i & -1 \\ -i & 5 & i \\ -1 & -i & 3 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 0 & i & 1 \\ -i & 0 & i \\ 1 & -i & 0 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 2 & i & 1 & -i \\ -i & 2 & i & 1 \\ 1 & -i & 2 & i \\ i & 1 & -i & 2 \end{pmatrix}$

4. $\vec{a}_1 = {}^t(1, 2, 1)$, $\vec{a}_2 = {}^t(2, 1, -1)$ で張られる空間（平面）への $\vec{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3)$ の正射影を $\vec{x}\,' = {}^t(x_1', x_2', x_3')$ とする。

   (1) $\vec{x}\,'$ を求めよ。

   (2) $A = \Big((\vec{a}_i, \vec{a}_j)\Big)_{1 \le i,j \le 2}$, $P = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{2} \vec{a}_i (A^{-1})_{ij} {}^t\vec{a}_j$ とおく。$P\vec{x}$ を計算せよ。

5. $\vec{a}_1 = {}^t(1, -2, 1)$, $\vec{a}_2 = {}^t(1, 2, -1)$ に垂直な原点を通る空間（直線）への $\vec{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3)$ の正射影を $\vec{x}\,' = {}^t(x_1', x_2', x_3')$ とする。

(1) $\vec{x}'$ を求めよ。

(2) $A=\Big((\vec{a}_i,\vec{a}_j)\Big)_{1\le i,j\le 2}$, $P=\displaystyle\sum_{i,j=1}^{2}\vec{a}_i(A^{-1})_{ij}{}^t\vec{a}_j$ とおく。$\vec{x}-P\vec{x}$ を計算せよ。

(3) $(\vec{x},\vec{y})'=(\vec{x},\vec{y})-\displaystyle\sum_{i,j=1}^{2}(\vec{x},\vec{a}_i)(A^{-1})_{ij}(\vec{a}_j,\vec{y})$ とおく。$(\vec{x}',\vec{y}')$ と $(\vec{x},\vec{y})'$ を計算せよ。

6. 次の行列の指数関数を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

（注）正方行列 $A$ に対して，指数関数は $\exp A=e^A=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n$ と定義される。

## 宿題 §2

1. 成分を用いて確かめよ。
$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a},\quad (k\vec{a})\times\vec{b}=k(\vec{a}\times\vec{b}),\quad \vec{c}\times(\vec{a}+\vec{b})=\vec{c}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{b},$
$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b},$
$\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a},\vec{b},\quad |\vec{a}\times\vec{b}|^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2.$

2. $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c},\quad (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=?,$
$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=?,$
$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d})-(\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c}).$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{i'j'k}=\delta_{ii'}\delta_{jj'}-\delta_{ij'}\delta_{ji'}.$

4. (1) 質点に ${}^t(4,-3,2)$ の力を加え点 ${}^t(3,2,-1)$ から点 ${}^t(2,-1,4)$ まで動かす時に力のする仕事。
(2) 磁場（磁束密度） $\vec{B}={}^t(1.0,-1.0,1.0)\times 10^{-2}$[T] 中で，電子が速度 $\vec{v}={}^t(1.0,2.0,1.0)\times 10^6$[m/s] で動いている時に受ける力。

5. $\vec{a}_1={}^t(1,-1,0)$, $\vec{a}_2={}^t(0,1,-1)$, $\vec{a}_3={}^t(1,0,1)$, $A=(\vec{a}_i\cdot\vec{a}_j)_{1\le i,j\le 3}$ とおく。
(1) $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ で張られる平行六面体の体積。 (2) $A$, $\det A$.
(3) $\vec{x}\in\mathbb{R}^3$ に対し，${}^t\vec{x}A\vec{x}\ge 0$（等号は $\vec{x}=\vec{0}$）。（正値（実対称行列）と呼ばれ $A>0$ と表す。）
(4) $\sqrt{A}$ . 但し $\sqrt{A}$ は $(\sqrt{A})^2=A$, $\sqrt{A}>0$ となる行列。

6. $\sigma_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_2=\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\vec{\sigma}={}^t(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ とおく（Pauli 行列）。

(1) $\sigma_a\sigma_b=\delta_{ab}\,\mathbf{1}+i\displaystyle\sum_{c=1}^{3}\varepsilon_{abc}\sigma_c$. 但し $\mathbf{1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$。

(2) $[s_a,s_b]=i\displaystyle\sum_{c=1}^{3}\varepsilon_{abc}s_c$. 但し $s_a=\frac{1}{2}\sigma_a$, $[A,B]=AB-BA$。

(3) $\{\sigma_a,\sigma_b\}=2\delta_{ab}\mathbf{1}$. 但し $\{A,B\}=AB+BA$。

(4) $\exp(i\theta\sigma_2)$.
(5) $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ に対し，$(\vec{a}\cdot\vec{\sigma})(\vec{b}\cdot\vec{\sigma}) = (\vec{a}\cdot\vec{b})\ \mathbf{1} + i(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{\sigma}$。
(6) $\vec{\theta} \in \mathbb{R}^3$ に対し，$\exp(i\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}) = \cos\theta\ \mathbf{1} + i\sin\theta\ (\frac{1}{\theta}\vec{\theta}\cdot\vec{\sigma})$。但し，$\theta = |\vec{\theta}|$。

## 宿題 §3

1. $\frac{d}{dt}(k\vec{a}) =?$, $\frac{d}{dt}(\vec{a}\times\vec{b}) =?$, $\vec{a}$ の大きさ一定ならば $\vec{a}\perp\dot{\vec{a}}$。

2. $m\ddot{\vec{r}} = \vec{f}$ の時，$\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$, $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$, $\vec{N} = \vec{r}\times\vec{f}$ とおくと，$\dot{\vec{p}} = \vec{f}$, $\dot{\vec{L}} = \vec{N}$。

3. $\vec{r} = {}^t(t^3 - 4t, t^2 + 4t, 8t^2 - 3t^3)$ に対し，$\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}$。$t = 2$ での $\ddot{\vec{r}}$ の接線成分，法線成分。

4. $m\ddot{\vec{r}} = -\frac{A}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$ （$r = |\vec{r}|$, $A = Gm_1m_2$）に対し，$\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$, $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$, $L = |\vec{L}|$, $\vec{e} = \frac{1}{A}\left(\dot{\vec{r}}\times\vec{L} - \frac{A}{r}\vec{r}\right)$, $e = |\vec{e}|$, $E = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - \frac{A}{r}$, $\ell = \frac{L^2}{Am}$ とおく。
(1) $\vec{L}\perp\vec{r}, \dot{\vec{r}}$, $\dot{\vec{L}} = \vec{0}$. （つまり $\vec{L}$ は定数ベクトル） (2) $\dot{E} = 0$. （つまり $E$ は定数）
(3) $\vec{e}\perp\vec{L}$, $\dot{\vec{e}} = \vec{0}$. （つまり $\vec{e}$ は定数ベクトル） (4) $e$ を $m, A, L, E$ で表せ。
(5) $\vec{r}\cdot\vec{e} = \ell - r$. (6) $\vec{r}$ と $\vec{e}$ のなす角を $\theta$ とする時，$r = \ell/(1 + e\cos\theta)$。

5. $\vec{a} = {}^t(x, y)$, $\vec{a} = {}^t(-y, x)$ に対し，ベクトル場を描け。また，$\mathrm{div}\,\vec{a}$, $\mathrm{rot}\,\vec{a}$ （${}^t({}^t\vec{a}, 0)$ として）。

6. $\phi = 3x^2y - y^3z^2$, $\vec{a} = {}^t(x^2z, -2y^3z^2, xy^2z)$ に対し，$\mathrm{grad}\,\phi$, $\mathrm{div}\,\vec{a}$, $\mathrm{rot}\,\vec{a}$。

7. $\phi = x^2yz$, $\vec{a} = {}^t(2xz^2, -yz, 3xz^3)$ に対し，$\mathrm{grad}\,\phi$, $\mathrm{div}\,\vec{a}$, $\mathrm{rot}\,\vec{a}$, $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{a}$, $\mathrm{grad}\,(\vec{a}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{a})$。

8. $\vec{F} = -\frac{A}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$, $U = -\frac{A}{r}$ に対し，$\mathrm{rot}\,\vec{F}$, $-\mathrm{grad}\,U$.

9. $\phi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r}$, $\phi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\vec{d}\cdot\vec{r}}{r^3}$, $\vec{A} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}$ に対し，$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\phi$, $\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$。

10. $x^2y + 2xz = 4$ 上の点 ${}^t(2, -2, 3)$ での法線単位ベクトル。

11. 点 $O$ のまわりに一定の角速度ベクトル $\vec{\omega}$ で回転する剛体の点 $\vec{r}$ での速度を $\vec{v}$ とする時，$\mathrm{rot}\,\vec{v}$。

12. 以下の公式を書き，また grad , div , rot で表せ。また証明せよ。
$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\phi) =?$, $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{a}) =?$, $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{a}) =?$, $\vec{\nabla}(\phi\psi) =?$, $\vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{a}) =?$, $\vec{\nabla}\times(\phi\vec{a}) =?$, $\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{b}) =?$, $\vec{\nabla}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) =?$, $\vec{\nabla}\times(\vec{a}\times\vec{b}) =?$, $\triangle(\phi\psi) =?$.

13. $\vec{E} = \vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}_0\cos(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)$, $\vec{B} = \vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{B}_0\cos(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)$ が真空中の Maxwell 方程式を満たす時，$\vec{E}_0$, $\vec{B}_0$, $\vec{k}$, $\omega$ が満足すべき条件。

## 宿題 §4

1. 質量 $M$ の一様な中空球（外半径 $a$，内半径 $b$）の中心を通る軸のまわりの慣性モーメント。

2. $\vec{a}(t) = {}^t(-\rho\omega^2\cos\omega t, -\rho\omega^2\sin\omega t, 0)$ に対し，(1) $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t')dt'$ (2) $\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \int_0^t \vec{v}(t')dt'$。

3. $O = {}^t(0,0,0)$, $A = {}^t(1,1,1)$, $B = {}^t(1,0,0)$, $\phi = 2x+7y+2xz$, $\vec{a} = {}^t(3xy,-5z,10x)$, $\vec{f} = {}^t(2xy+z^3, x^2, 3xz^2)$ に対し，(1) $\int_C \phi ds$, (2) $\int_C \vec{a}\cdot d\vec{r}$, (3) $\int_C \vec{f}\cdot d\vec{r}$。但し $C$ は (i) $C: OA$, (ii) $C: OBA$, (iii) $C: {}^t(t,t^3,t^2)$ $(0\le t\le 1)$, (iv) $C: {}^t(\cos t, \sin t, 0)$ $(0\le t\le 2\pi)$。
$\vec{f}$ を力とすると，(4) $\vec{f}$ は保存力　(5) 位置エネルギー $U$　(6) $U(O)-U(A)$。

4. $\phi = 2xyz^2$, $\vec{a} = {}^t(xy,-z,x^2)$, $C: {}^t(t^2,2t,t^3)$ $(0\le t\le 1)$ に対し，(1) $\int_C \phi d\vec{r}$　(2) $\int_C \vec{a}\times d\vec{r}$。

5. $\vec{B}(\vec{r}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi} I \displaystyle\int_C \dfrac{d\vec{r}'\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$.
(1) $C: {}^t(0,0,t)$ $(-\infty\le t\le\infty)$　(2) $\vec{r} = {}^t(0,0,z)$, $C: {}^t(a\cos t, a\sin t, 0)$ $(0\le t\le 2\pi)$.

6. $A = {}^t(6,0,0)$, $B = {}^t(0,4,0)$, $C = {}^t(0,0,2)$, $S = \triangle ABC$, $\vec{a} = {}^t(18z,-12,3y)$ に対し，
(1) $\int_S \vec{a}\cdot d\vec{S}$　(2) Stokes の定理を確かめよ。

7. $S = \{{}^t(x,y,z) | x,y,z\ge 0, z\le 5, x^2+y^2=16\}$, $\phi = \frac{3}{8}xyz$, $\vec{a} = {}^t(z,x,-3y^2z)$ に対して，
(1) $\int_S \phi d\vec{S}$　(2) $\int_S \vec{a}\cdot d\vec{S}$　(3) $\vec{a}$, $S$ に対して Stokes の定理を確かめよ。

8. $S = \{{}^t(x,y,z) | x^2+y^2+z^2=1, z\ge 0\}$, $\vec{a} = {}^t(2x-y, -yz^2, y^2z)$ に対して，Stokes の定理を確かめよ。

9. $O = {}^t(0,0,0)$, $A = {}^t(1,0,0)$, $B = {}^t(0,1,0)$, $C = {}^t(0,0,1)$, $V = OA, OB, OC$ を３辺とする立方体，$\vec{a} = {}^t(4xz,-yz,yz)$ に対して，Gauss の定理を確かめよ。

10. $O = {}^t(0,0,0)$, $A = {}^t(1,0,0)$, $B = {}^t(0,2,0)$, $C = {}^t(0,0,2)$, $V =$ 四面体 $OABC$，$\phi = xy+xz$, $\vec{a} = {}^t(4x, 1-y, z)$ に対して，(1) $\int_V \phi dV$　(2) $\vec{a}$, $V$ に対して Gauss の定理を確かめよ。

11. $V = \{{}^t(x,y,z) | x^2+y^2\le 4, 0\le z\le 3\}$, $\vec{a} = {}^t(4x,-2y^2,z^2)$ に対して，Gauss の定理を確かめよ。

## 宿題 §5

1. 速度・加速度の次の座標系での成分：(1) 円柱座標，(2) 極座標。

2. $\mathrm{grad}\,\phi$, $\mathrm{div}\,\vec{a}$, $\mathrm{rot}\,\vec{a}$, $\triangle\phi$ を次の座標系で：(1) 円柱座標，(2) 極座標。