線型代数学（数学概論Ⅰ, 線形代数学ⅠA など）　小竹

目的など：シラバスの通り

教科書：「基礎線形代数」押川元重・阪口紘治　培風館

（私が持っているのは 三訂第11刷 1998年4月10日）

授業予定：

			教科書	宿題
2	§1.	高校で何を学んだか・学ばなかったか	全て, 2	2-2～8
1	§2.	掃き出し法	1	1-1～3
3	§3.	一般化と抽象化（ベクトル,	6, 7	6-1～2；7-1～3；6-3～8；7-6～10
		線型写像と行列，内積）	3, 8	3-1～3；8-1～2
			11, 12	11-1～6；12-2～4
			16～18	
2	§4	行列式	2, 4	2-1；4-1～4, 6
2	§5	行列と線型写像	3, 5, 19	5-1, 4～6
			9, 8	9-4～5；8-3～5, 12-1
			10	10-1～3；5-2～3
			11, 12, 15	11-7～10；12-5～10
1	§6	固有値と固有ベクトル	13	13-1
3	§7	対角化とスペクトル分解	13, 14	13-2

道筋をはっきりさせ，この順番で講義を行う。　対応する教科書の部分を十分予習し，徹底的に復習せよ。対応する部分が終わったところで宿題を提出するように。

全てを板書し諸君自らノートに書き写して欲しいのであるが，時間的制約等があるので，ノートの一部を配布する。
重要な事柄をまとめたノートではない。諸君自らノートを作るように。

§1 高校で何を学んだか・学ばなかったか

No. 1-1

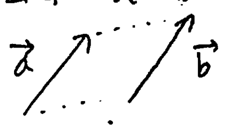
これからやることを平面ベクトルで。

◎ベクトル

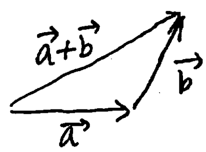
矢印  $\vec{a}$, $\mathbb{a}$

（$\vec{a}k$と書く事も許そう）

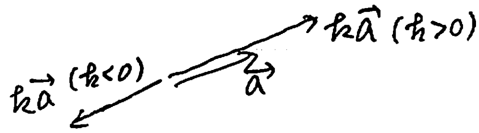
(0) 相等 $\vec{a}=\vec{b}$



(1) 和 $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$



(2) スカラー倍 $\vec{c}=k\vec{a}$



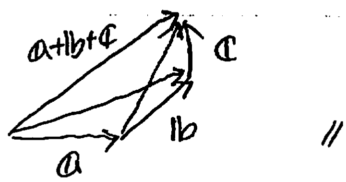
性質

$$☆_1\begin{cases}(\mathbb{a}+\mathbb{b})+\mathbb{c}=\mathbb{a}+(\mathbb{b}+\mathbb{c})\\ \mathbb{a}+\mathbb{b}=\mathbb{b}+\mathbb{a}\\ {}^\exists\mathbb{0},\ {}^\forall\mathbb{a},\ \mathbb{a}+\mathbb{0}=\mathbb{a}\\ {}^\forall\mathbb{a},\ {}^\exists\mathbb{a}'\ \text{s.t.}\ \mathbb{a}+\mathbb{a}'=\mathbb{0}\end{cases}$$

（$\mathbb{a}'=-\mathbb{a}$と書く）

$$☆_2\begin{cases}k(\mathbb{a}+\mathbb{b})=k\mathbb{a}+k\mathbb{b}\\ (k+l)\mathbb{a}=k\mathbb{a}+l\mathbb{a}\\ (kl)\mathbb{a}=k(l\mathbb{a})\\ 1\cdot\mathbb{a}=\mathbb{a}\end{cases}$$

☺ 図で証明できる。例えば



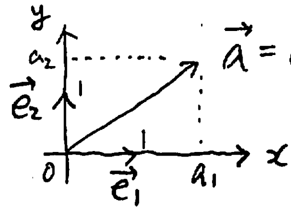
〃

成分を一切使っていない。

ベクトル及びその演算（和、スカラー倍）はどういう座標軸を選んだかに依らない概念である！

○ 互いに直交する単位ベクトル（正規直交基底）を1組決める。

つまり 直交座標軸



$\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2 \leftrightarrow \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ と対応させる

(0) $\vec{a}=\vec{b} \leftrightarrow \begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$, (1) $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b} \leftrightarrow \begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$. (2) $\vec{c}=k\vec{a} \leftrightarrow \begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$

☺ 〜〃

計算規則が完全に対応している。→ 同じと思ってよい。

$\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ と書こう。 $\vec{a}$の（基底$\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$に関する）成分表示。

（注） 正規直交でなくても構わない。

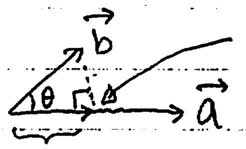
☆「ベクトル」+「基底」=「成分ベクトル」
(1つの) 基底 (座標軸)

• ベクトルの大きさ：矢印の長さ $\vec{a}$　$|\vec{a}|$

• 内積：2つのベクトルに対して1つの数を対応させる規則

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta$$

何の為

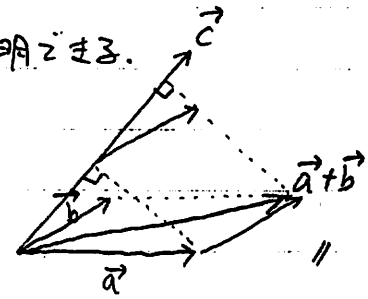


$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$

(符号付き)長さ $= |\vec{b}|\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$

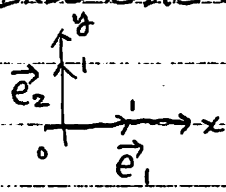
性質
(1) $(\mathbb{a},\mathbb{b}) = \overline{(\mathbb{b},\mathbb{a})}$
☆3 (2) $(\mathbb{c},\mathbb{a}+\mathbb{b}) = (\mathbb{c},\mathbb{a}) + (\mathbb{c},\mathbb{b})$
(3) $(\mathbb{c},k\mathbb{a}) = k(\mathbb{c},\mathbb{a})$
(4) $(\mathbb{a},\mathbb{a}) \geq 0$　等号は $\mathbb{a}=0$

☺ 図で証明できる。
例えば(2)



成分を一切使っていない。
内積もどういう座標軸を選んだかに依らない概念である！

• 正規直交基底を1組決める



$$\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j = \delta_{ij} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$ クロネッカーのデルタ

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2)\cdot(b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2)$$

☆3より $= a_1b_1 + a_2b_2$

(注) 正規直交基底でないと式が複雑になる。
単に $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ と書けば正規直交基底での成分と思う事にする。

• 一次独立

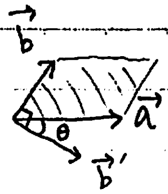
スカラー倍として

$\vec{a},\vec{b}$ が一次独立 $\stackrel{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$「$\vec{a}$ が $\vec{b}$ で表せない，$\vec{b}$ が $\vec{a}$ で表せない」
$\Longleftrightarrow$「$c\vec{a} + c'\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow c = c' = 0$」　☺ ～ //

• 平行四辺形の(符号付き)面積と行列式

ε_{ij} $(i,j=1,2)$　$\begin{cases} \varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji} \\ \varepsilon_{12} = 1 \end{cases}$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$，$\vec{a}' = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix}$　$a'_i = \sum_{j=1}^{2} \varepsilon_{ij} a_j$　$\vec{a}' \perp \vec{a}$，$|\vec{a}'| = |\vec{a}|$

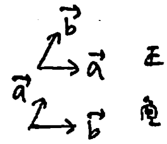


(符号付き)面積 $= |\vec a|\cdot|\vec b|\sin(\frac{\pi}{2}-\theta) = |\vec a|\cdot|\vec b'|\cos\theta = \vec a\cdot\vec b'$

$= a_1b_2 - a_2b_1 = \sum_{i,j=1}^{2}\varepsilon_{ij}\,a_i\,b_j$

$\overset{def}{=} \begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix} = |\vec a\ \ \vec b|$ 行列式

成分表示



宿 2-2~4

◎ 線型写像と行列

写像 T : {平面ベクトル} → {平面ベクトル} が

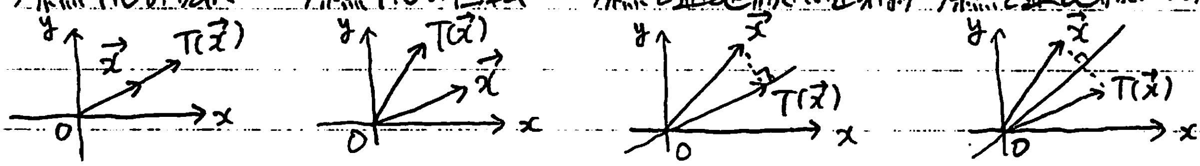
$\vec x \mapsto \vec x' = T(\vec x)$

☆4 $\begin{cases} (1)\ T(x+y) = T(x)+T(y) & \text{(加法性)} \\ (2)\ T(kx) = kT(x) & \text{(斉次性)} \end{cases}$ 線型性

を満たす時，線型写像という。

(注) (1)(2) $\Longleftrightarrow$ (3) $T(kx+ly) = kT(x) + lT(y)$ ☺ ~//

例) 原点中心の拡大　原点中心の回転　原点を通る直線への正射影　原点を通る直線に関する鏡影

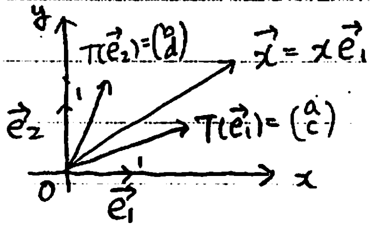


は線型写像 ☺ 図で証明できる//

成分を一切使っていない。

線型写像もどういう座標軸を選んだかに依らない概念である!

・正規直交基底を1組決める.



$\vec x = x\vec e_1 + y\vec e_2 = \binom{x}{y}$

$\binom{x'}{y'} = \vec x' = T(\vec x) = T(x\vec e_1 + y\vec e_2) = xT(\vec e_1) + yT(\vec e_2) = x\binom{a}{c} + y\binom{b}{d}$

$= \binom{ax+by}{cx+dy}$

$\overset{def}{=} \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\binom{x}{y}$ 行列とベクトルの積の定義

$\vec x \leftrightarrow \binom{x}{y}$

$T \leftrightarrow \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = A$ 　Tの(基底$\vec e_1, \vec e_2$に関する)行列表示
(成分)

$T(\vec x) \leftrightarrow \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\binom{x}{y} = A\vec x$

(注) 正規直交でなくても構わない

☆「線型写像」+ (1つの)「基底」=「行列」

○ 線型写像の和, スカラー倍, 合成

$T \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$

$S \leftrightarrow \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = B$

(0) 相等: $T = S$

$T(\vec{x}) = S(\vec{x})$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$A = B$ 行列の相等の定義

(1) 和: $T + S$

$(T+S)(\vec{x}) \overset{def}{=} T(\vec{x}) + S(\vec{x})$ 線型 ☺~//

$= \begin{pmatrix} a+p & b+q \\ c+r & d+s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\overset{def}{=} (A+B)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 行列の和の定義

(2) スカラー倍: kT

$(kT)(\vec{x}) \overset{def}{=} kT(\vec{x})$ 線型 ☺~//

$= \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\overset{def}{=} (kA)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 行列のスカラー倍の定義

(3) 合成: $T \circ S$

$(T \circ S)(\vec{x}) \overset{def}{=} T(S(\vec{x}))$ 線型 ☺~//

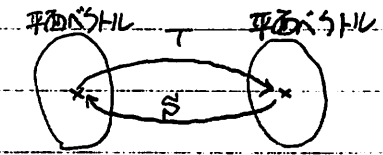
$= \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\overset{def}{=} (AB)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 行列の積の定義

・零写像 0 $\quad 0(\vec{x}) \overset{def}{=} \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\quad 0 \leftrightarrow O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 零行列

・恒等写像 I $\quad I(\vec{x}) \overset{def}{=} \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\quad I \leftrightarrow E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 単位行列

○ 逆写像 $\quad T$: 上への1対1 のとき



$T \circ S = S \circ T = I$ となる S を T の逆写像といい, $S = T^{-1}$ と書く

T: 線型ならば S も線型 ☺~//

$T \leftrightarrow A,\ S \leftrightarrow B,\quad T \circ S = S \circ T = I \iff AB = BA = E$ $\quad B$ を A の逆行列といい, $B = A^{-1}$ と書く.

・ $\begin{array}{ccccccc} T & S & T(\vec{x}) & T+S & kT & T \circ S & \overset{(あれば)}{T^{-1}} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ A & B & A\vec{x} & A+B & kA & AB & A^{-1} \end{array}$ となるように行列の演算を定義した!

○ 行列式 $\quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (\vec{a}\ \vec{b})$

$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = |\vec{a}\ \vec{b}| \overset{def}{=} ad - cb = ad - bc$: $\vec{a}, \vec{b}$ で張られる平行四辺形の(符号付き)面積

性質 (1) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$, (2) $|\vec{a}\ \vec{b}| = -|\vec{b}\ \vec{a}|$, (3) $|\vec{a}\ \vec{b}+\vec{c}| = |\vec{a}\ \vec{b}| + |\vec{a}\ \vec{c}|$

(4) $|\vec{a}\ k\vec{b}| = k|\vec{a}\ \vec{b}|$ (5) $\tilde{A} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ 余因子行列 $\quad A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A|E$

(6) $|AB| = |A| \cdot |B|$ ☺~//

(注) T によって (符号付き) 面積が $|A|$ 倍に移される.

・ハミルトン・ケーリーの定理　$f_A(x) \stackrel{def}{=} |xE-A|$　∴ $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$f_A(x) = x^2-(a+d)x+ad-bc$

$f_A(A) \stackrel{def}{=} A^2-(a+d)A+(ad-bc)E = O$

$f_A(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$ とすると $(A-\alpha E)(A-\beta E)=O$

・逆行列

Aの逆行列が存在 $\Longleftrightarrow$ $|A| \neq 0$　この時 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\tilde{A}$

$\stackrel{def}{\Longleftrightarrow}$ Aは正則行列　つまり $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$　$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

・連立一次方程式

$\begin{cases} ax+by=e \\ cx+dy=f \end{cases}$　$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$　$\vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$　$\vec{b}=\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$　$A\vec{x}=\vec{b}$

$|A| \neq 0 \Rightarrow \vec{x}=A^{-1}\vec{b}$

$A\vec{x}=\vec{0}$ となる $\vec{x} \neq \vec{0}$ が存在 $\Longleftrightarrow$ $|A|=0$

◎・固有値と固有ベクトル

$A\vec{x}=\alpha\vec{x}$ を満たす $\vec{x} \neq \vec{0}$ が存在するとき，α をAの固有値，$\vec{x}$ を α に対応する固有ベクトルという。

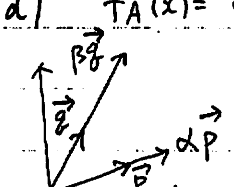
$(A-\alpha E)\vec{x}=\vec{0}$　∴ $|A-\alpha E|=0$

$f_A(x) \stackrel{def}{=} |xE-A|$　固有多項式

α がAの固有値 $\Longleftrightarrow$ α は $f_A(x)=0$（固有方程式）の解

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$　$f_A(x)=x^2-(a+d)x+ad-bc=(x-\alpha)(x-\beta)$

固有値	固有ベクトル
α	$\vec{p}$
β	$\vec{q}$



Tがよく分かる。

・対角化とジョルダン標準形

(1) $\alpha \neq \beta$ のとき

$A\vec{p}=\alpha\vec{p}$　$A\vec{q}=\beta\vec{q}$　$\vec{p}$ と $\vec{q}$ は一次独立

$P=(\vec{p}\ \vec{q})$　$|P| \neq 0$

$AP=(\alpha\vec{p}\ \beta\vec{q})=(\vec{p}\ \vec{q})\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$　∴ $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$　対角化

(2) $\alpha=\beta$ のとき　　$(A-\alpha E)^2=O$

(i) αの固有ベクトルとして一次独立な $\vec{p},\vec{q}$ がとれる時．　$A=\alpha E$ である

(ii) 〃 が1本しかない時．　$A\vec{p}=\alpha\vec{p}$

$(A-\alpha E)\vec{q}=\vec{p}$ となる $\vec{p}$ と一次独立な $\vec{q}$ が存在する．

$P=(\vec{p}\ \vec{q})$　　$AP=(\alpha\vec{p}\ \ \alpha\vec{q}+\vec{p})=(\vec{p}\ \vec{q})\begin{pmatrix}\alpha&1\\0&\alpha\end{pmatrix}$　　$\therefore P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\alpha&1\\0&\alpha\end{pmatrix}$　ジョルダン標準形

まとめて

固有ベクトルが2本ある時は対角化可能で　$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix}$　となる正則行列Pが存在する．

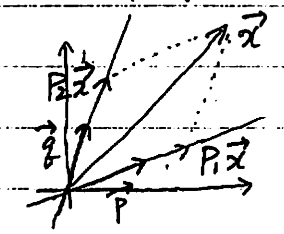
〃　　1本しかない時はジョルダン標準形 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\alpha&1\\0&\alpha\end{pmatrix}$　　〃

(注) Aが実対称行列（正規行列）のときは対角化可能で，Pとして直交行列（ユニタリ行列）をとれる．

○ スペクトル分解　　対角化可能なとき

(1) $\alpha\neq\beta$ のとき　$A=\alpha P_1+\beta P_2$

$$\begin{cases}E=P_1+P_2\\ A=\alpha P_1+\beta P_2\end{cases}\quad P_1=\frac{A-\beta E}{\alpha-\beta}\quad P_2=\frac{A-\alpha E}{\beta-\alpha}\quad P_1^2=P_1\quad P_2^2=P_2\quad P_1P_2=P_2P_1=O$$



射影

(2) $A=\alpha E$ のとき　　$A=\alpha\cdot\overset{\text{全平面への射影}}{E}$

(注) 対角化できない時でも一般スペクトル分解　$A=\alpha E+\overset{(A-\alpha E)^2=0}{(A-\alpha E)}$

(注) $A=P\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\beta\end{pmatrix}P^{-1}=\alpha P\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}P^{-1}+\beta P\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}P^{-1}=\alpha P_1+\beta P_2$

○ A^n　　$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$　　$f_A(x)=x^2-(a+d)x+ad-bc=(x-\alpha)(x-\beta)$

(1) $A, A^2, A^3, \cdots$ → 予想 → 帰納法で証明

(2) ハミルトン・ケーリー

$x^n=f_A(x)\cdot\underset{\text{商}}{r(x)}+\underset{\text{余り}}{q(x)}$　　　$q(x)=px+q$

$\alpha\neq\beta$ のとき　$p=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$，$q=\dfrac{\alpha\beta^n-\alpha^n\beta}{\alpha-\beta}$

$A^n=q(A)=pA+qE$　　　$\alpha=\beta$ のとき　$p=n\alpha^{n-1}$，$q=(1-n)\alpha^n$

(3) 対角化 (Jordan 標準形)

$$P^{-1}AP = J \quad , \quad J = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \alpha E + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(P^{-1}AP)^n = J^n \quad , \quad J^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$$

$$= P^{-1}A^nP \qquad \therefore \ A^n = PJ^nP^{-1}$$

(4) (一般) スペクトル分解

(i) $\alpha \neq \beta$ のとき $\quad A = \alpha P_1 + \beta P_2 \ , \quad A^n = \alpha^n P_1 + \beta^n P_2$

(ii) $\alpha = \beta$ のとき $\quad A = \alpha E + (A - \alpha E) \ , \quad (A - \alpha E)^2 = O$

$$A^n = (\alpha E)^n + n(\alpha E)^{n-1}(A - \alpha E) = n\alpha^{n-1}A + (1-n)\alpha^n E$$

◎ 応用 (の ほんの一例)

- $\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n \\ y_{n+1} = cx_n + dy_n \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \vec{x}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \qquad \vec{x}_{n+1} = A\vec{x}_n \qquad \therefore \ \vec{x}_n = A^n \vec{x}_0 \qquad A^n$がわかればよい。

又は 対角化できる場合は $\quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \ , \quad \vec{x}'_n = P^{-1}\vec{x}_n$ とおくと

$$\begin{pmatrix} x'_{n+1} \\ y'_{n+1} \end{pmatrix} = \vec{x}'_{n+1} = P^{-1}\vec{x}_{n+1} = P^{-1}APP^{-1}\vec{x}_n = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'_n \\ y'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x'_n \\ \beta y'_n \end{pmatrix}$$ 分離した!

$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$

$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$ とおくと $\quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ ☺ ~~

- $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases}$ $\quad$ (a, b, c, d 定数)

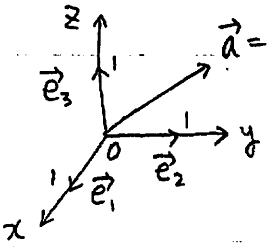
$y'' + py' + qy = 0 \qquad$ (p, q 定数)

- $dxdy = |J| \, dsdt \qquad J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix}$

- $ax^2 + 2bxy + c^2y^2 = (x \ y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

① 空間ベクトルに固有の話：外積

互いに直交する単位ベクトル（正規直交基底）を1組決める.

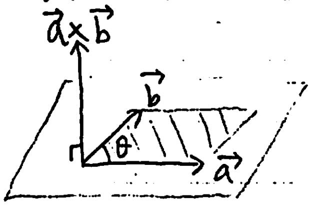


$$\vec a = a_1\vec e_1 + a_2\vec e_2 + a_3\vec e_3 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec e_i \cdot \vec e_j = \delta_{ij}$$

$$\vec a \cdot \vec b = (a_1\vec e_1 + a_2\vec e_2 + a_3\vec e_3)\cdot(b_1\vec e_1 + b_2\vec e_2 + b_3\vec e_3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

・外積：2つのベクトルに対して1つのベクトルを対応させる規則



$\vec a \times \vec b$

- 向き：$\vec a, \vec b$ に垂直で，$\vec a$ から $\vec b$ へ回した時に右ねじの進む向き
- 大きさ：$\vec a, \vec b$ で張られる平行四辺形の面積　$|\vec a \times \vec b| = |\vec a|\cdot|\vec b|\sin\theta$

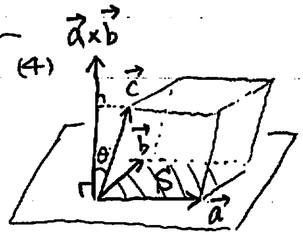
性質

(1) $\vec a \times \vec b = -\vec b \times \vec a$

(2) $\vec c \times (\vec a + \vec b) = \vec c \times \vec a + \vec c \times \vec b$

(3) $\vec c \times (k\vec a) = k(\vec c \times \vec a)$

(4) $(\vec a \times \vec b)\cdot \vec c = (\vec b \times \vec c)\cdot \vec a = (\vec c \times \vec a)\cdot \vec b$

(4)


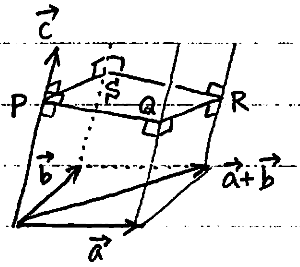
(符号付き)体積

$= S \times |\vec c|\cos\theta$

$= |\vec a \times \vec b|\cdot|\vec c|\cos\theta$

$= (\vec a \times \vec b)\cdot \vec c$

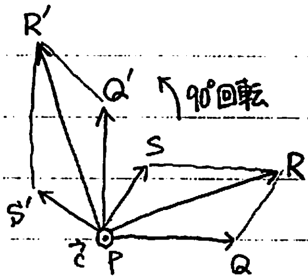
∵ 図で証明できる

(2)


$|\vec c \times \vec a| = |\vec c|\,\overline{PQ}$

$|\vec c \times \vec b| = |\vec c|\,\overline{PS}$

$|\vec c \times (\vec a + \vec b)| = |\vec c|\,\overline{PR}$



$\vec c \times \vec a = |\vec c|\,\overrightarrow{PQ'}$

$\vec c \times \vec b = |\vec c|\,\overrightarrow{PS'}$

$\vec c \times (\vec a + \vec b) = |\vec c|\,\overrightarrow{PR'}$ //

成分を一切使っていない。外積もどういう座標軸を選んだかに依らない概念である！ (注)軸性ベクトル

・ $\vec e_1 \times \vec e_2 = \vec e_3$
$\begin{matrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix}$

$$\vec e_i \times \vec e_j = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, \vec e_k$$

ε_{ijk}
- 完全反対称（添字を入れ替えると−がつく）
- $\varepsilon_{123} = 1$

$$\vec a \times \vec b = (a_1\vec e_1 + a_2\vec e_2 + a_3\vec e_3) \times (b_1\vec e_1 + b_2\vec e_2 + b_3\vec e_3)$$

$$\overset{\text{性質より}}{=} \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \qquad (\vec a \times \vec b)_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, a_j b_k$$

$\vec a, \vec b, \vec c$ で張られる平行六面体の(符号付き)体積 $= \vec a \cdot (\vec b \times \vec c) = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, a_i b_j c_k$

$= |\vec a\ \vec b\ \vec c|$　3次の行列式

§2 掃き出し法

連立一次方程式を要領良く解く方法

・連立一次方程式

例 $\begin{cases} x+y=2 & \cdots ① \\ 2x+4y=1 & \cdots ② \end{cases}$

代入法　①より $y=2-x$　②へ代入 $2x+4(2-x)=1$　$\therefore x=\frac{7}{2}$　$\therefore y=-\frac{3}{2}$

加減法　①×4−②　$2x=7$　$\therefore x=\frac{7}{2}$　①×2−②　$-2y=3$　$\therefore y=-\frac{3}{2}$

又は ②−①×2 $\begin{cases} x+y=2 & \cdots ①' \\ \quad 2y=-3 & \cdots ②' \end{cases}$

②'$\times\frac{1}{2}$ $\begin{cases} x+y=2 & \cdots ①'' \\ \quad y=-\frac{3}{2} & \cdots ②'' \end{cases}$

①''−②'' $\begin{cases} x \quad =\frac{7}{2} \\ \quad y=-\frac{3}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} \text{操作 I}：\text{ある式に他の式の何倍かを加える} & \mathrm{I}(\boxed{i}+\boxed{j}\times c) \\ \text{〃 II}：\text{ある式に0でない数を掛ける} & \mathrm{II}(\boxed{i}\times c) \\ \text{〃 III}：\text{2つの式の順序を入れ替える} & \mathrm{III}(\boxed{i}\leftrightarrow\boxed{j}) \end{cases}$

係数だけ書くと

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{I}(\boxed{2}-\boxed{1}\times 2)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{II}(\boxed{2}\times\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{\mathrm{I}(\boxed{1}-\boxed{2})} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \end{array}\right)$$

例1. $\begin{cases} x+3y+z=4 \\ 2x+6y-z=7 \\ x+4y+2z=5 \end{cases}$ $\qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 6 & -1 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 5 \end{array}\right)$

xを消す $\begin{cases} x+3y+z=4 \\ \quad -3z=-1 \\ \quad y+z=1 \end{cases}$ $\qquad \xrightarrow[\mathrm{I}(\boxed{3}-\boxed{1})]{\mathrm{I}(\boxed{2}-\boxed{1}\times 2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

入れ替え $\begin{cases} x+3y+z=4 \\ \quad y+z=1 \\ \quad -3z=-1 \end{cases}$ $\qquad \xrightarrow{\mathrm{III}(\boxed{2}\leftrightarrow\boxed{3})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{array}\right)$

yを消す
$$\begin{cases} x \qquad -2z = 1 \\ y + z = 1 \\ -3z = -1 \end{cases} \xrightarrow{\mathrm{I}(\boxed{1}-\boxed{2}\times 3)} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x \qquad -2z = 1 \\ y + z = 1 \\ z = \frac{1}{3} \end{cases} \qquad \mathrm{II}(\boxed{3}\times\tfrac{1}{-3}) \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

zを消す
$$\begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = \frac{1}{3} \end{cases} \qquad \xrightarrow[\mathrm{I}(\boxed{2}-\boxed{3})]{\mathrm{I}(\boxed{1}+\boxed{3}\times 2)} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

例

宿 1-1~3

§3 一般化と抽象化（ベクトル，線型写像と行列，内積） No. 3-1-1

§3-1 一般化

◎ n次元数ベクトル

平面ベクトル $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$，空間ベクトル $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

一般化

n次元数ベクトル $\vec{a} = \mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ $(a_i \in \mathbb{R})$ $\mathbb{R}^n = \{$n次元数ベクトル$\}$

◦ $\mathbb{R}^n$ の演算 $\mathbb{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ $\mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ $\mathbb{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$

(0) 相等 $\mathbb{a} = \mathbb{b}$

$$\begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ \vdots \\ a_n = b_n \end{cases}$$

$a_i = b_i$

(1) 和 $\mathbb{c} = \mathbb{a} + \mathbb{b}$

$$\mathbb{a} + \mathbb{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

$c_i = a_i + b_i$

(2) スカラー倍 $\mathbb{c} = k\mathbb{a}$ $k \in \mathbb{R}$

$$k\mathbb{a} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ \vdots \\ ka_n \end{pmatrix}$$

（$\mathbb{a}k$ と書く事も許す）

$c_i = ka_i$

成分毎に計算するだけ。 $\mathbb{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ 零ベクトル ☆1☆2を満たす。☺～〃

例)

◎ 一次独立

◦ 一次結合（線型結合）

Def. [定義 6-1]

例)

宿 6-1~2

◦ 一次独立（線型独立）

Def. [定義 7-1]

Prop. [定理 7-1, 7-1′]

例)

宿 7-1~3

◎ 部分空間

◦ 線型部分空間

Def. [定義 6-2]

例)

宿 6-3

Def. [定理 6-1, 定義 6-3]

例)

宿 6-4~8

Def. [定義7-2, 7-3], Prop [定理7-5]

例) 宿 7-6~8

Prop [定理7-6], Def [定義7-4]

宿 7-9~10

- Prop. $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^n$ 部分空間
  - (1) $W_1 \cap W_2$ は部分空間
  - (2) $W_1 \cup W_2$ は必ずしも部分空間にはならない。
  - (3) $\{x = x_1 + x_2 \mid x_1 \in W_1,\ x_2 \in W_2\} \subset \mathbb{R}^n$ は部分空間

    Def. W_1 と W_2 の和空間といい、$W_1 + W_2$ で表す。

  ☺ ~~//

Thm. $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^n$ 部分空間

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

☺ ~~//

- Def. $\mathbb{R}^n = W_1 + W_2$ で、全ての $x \in \mathbb{R}^n$ が $x = x_1 + x_2$ $(x_i \in W_i)$ の形に一意的に表される時、$\mathbb{R}^n$ は W_1 と W_2 の直和であるといい、$\mathbb{R}^n = W_1 \oplus W_2$ と書く。

Prop. $\mathbb{R}^n = W_1 + W_2$ のとき、次の3つは同値：
- (1) $\mathbb{R}^n = W_1 \oplus W_2$
- (2) $W_1 \cap W_2 = \{0\}$
- (3) $\dim \mathbb{R}^n = \dim W_1 + \dim W_2$

☺ ~~//

◎ $\mathbb{C}^n$

$\ni a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ $a_i \in \mathbb{C}$ $\mathbb{R}^n$ と同様

◎ 線型写像と行列

Def. 写像 $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が ☆4 ($x, y \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{R}$) を満たす時, 線型写像という。

$\quad\quad x \mapsto x' = T(x)$ $\quad\quad$ $n=m$ の時には 線型変換ともいう.

例 $\quad\quad$ 📖 8-1~2

Prop. $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 線型 , $S: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ 線型

(1) 和 $T+S$ $\quad ((T+S)(x) \overset{def}{=} T(x)+S(x))$ 但し $p=n$, $q=m$

(2) スカラー倍 kT $\quad ((kT)(x) \overset{def}{=} kT(x))$

(3) 合成 $T \circ S$ $\quad ((T\circ S)(x) = T(S(x)))$ 但し $q=n$

も線型 $\quad$ ∵ ~~

◦ 行列

$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 線型

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$$

$$T(x) = T(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) = x_1 T(e_1) + \cdots + x_n T(e_n), \quad T(e_j) = a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$$\overset{def}{=} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ 行列とベクトルの積の定義

$$= Ax \qquad A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ $m \times n$ 行列

線型写像を一次写像ともいう。 $n=m$ のときは一次変換ともいう.

・ $T \leftrightarrow A$, $S \leftrightarrow B$

(0) 相等 $T=S$

$T(x) = S(x)$

$Ax = Bx$

$A = B$ 行列の相等の定義

$a_{ij} = b_{ij}$

(1) 和 $T+S$

$(T+S)(x) = T(x) + S(x)$

$= Ax + Bx$

$\overset{def}{=} (A+B)x$ 行列の和の定義

$C = A+B$

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

(2) スカラー倍　kT

$(kT)(x) = kT(x)$

$= k(Ax)$

$\overset{def}{=} (kA)x$　行列のスカラー倍の定義

$C = kA$

$c_{ij} = k a_{ij}$

(3) 合成　$T \circ S$

$(T \circ S)(x) = T(S(x))$

$= T(Bx)$

$= A(Bx)$

$\overset{def}{=} (AB)x$　行列の積の定義

$\underset{m \times p}{C} = \underset{m \times n}{A}\ \underset{n \times p}{B}$　　$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

零写像　$O : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

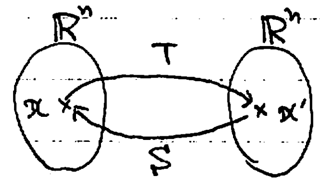
$x \mapsto O(x) = 0 = Ox$　　$O = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ $m \times n$　零行列

恒等写像　$I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$x \mapsto I(x) = x = Ex$　　$E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij})$ $n \times n$　単位行列

(略) 3-1~3

・逆写像



$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$: 線型

が上への1対1写像ならば

逆写像 $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

が考えられる。$T \circ S = S \circ T = I$　　S を T^{-1} と書く

Prop. 逆写像も線型　[定理8-2]

・逆行列　$T \circ S = S \circ T = I$

$AB = BA = E$　　B を A の逆行列といい　A^{-1} と書く。

・Def　[定理3-5の上]

◎ 内積

◦ $\mathbb{R}^n$ の内積

$\mathbb{R}^2 \ni \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$　　$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2$

$\mathbb{R}^3 \ni \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$　　$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

一般化 $\mathbb{R}^n \ni \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$　　$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$

☆$_3$ を満たす.

ノルム $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} \geq 0$　　$\|k\mathbf{a}\| = |k| \cdot \|\mathbf{a}\|$

逆に $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2}(\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}\|^2 - \|\mathbf{b}\|^2)$

例

Thm (i) $|(\mathbf{a}, \mathbf{b})| \leq \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|$　　(Schwarz の不等式)

(ii) $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$　　(三角不等式)

☺ 〜〜//　　注) 成分を使わず, ☆$_3$ のみ用いた

$\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \neq 0$ のとき　$-1 \leq \dfrac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|} \leq 1$

$= \cos\theta$ とおく

$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cos\theta$

$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ のとき 直交するという.

例

Def　[定義 11-4, 11-5]

Prop　[定理 11-4]

Thm (Schmidt の直交化法) 一次独立な $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_r$ をもとにして,

$L[\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_i] = L[\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_i]$ $(i = 1, \cdots, r)$ となるように, 正規直交系

$\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_r$ を作る事ができる:

$\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1$,　$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|} \mathbf{v}_1$

$\mathbf{v}_2 = \mathbf{a}_2 - (\mathbf{u}_1, \mathbf{a}_2)\mathbf{u}_1$,　$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|} \mathbf{v}_2$

$\mathbf{v}_3 = \mathbf{a}_3 - (\mathbf{u}_1, \mathbf{a}_3)\mathbf{u}_1 - (\mathbf{u}_2, \mathbf{a}_3)\mathbf{u}_2$,　$\mathbf{u}_3 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_3\|} \mathbf{v}_3$

$\vdots$

$\mathbf{v}_r = \mathbf{a}_r - \sum_{i=1}^{r-1} (\mathbf{u}_i, \mathbf{a}_r)\mathbf{u}_i$,　$\mathbf{u}_r = \frac{1}{\|\mathbf{v}_r\|} \mathbf{v}_r$

☺ 〜〜//

例

㊎ 11-1〜6

・直交補空間

Prop 集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ に対し

$S^\perp \overset{\mathrm{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid$ 全ての $y \in S$ に対し $(x, y) = 0\}$ は部分空間

(証) ~ //

Thm $W \subset \mathbb{R}^n$ 部分空間 $\Rightarrow$ $\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$

W の直交補空間という

(証) ~ //

・$\mathbb{C}^n$ の内積

$\mathbb{C}^n \ni \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \bar{a}_1 b_1 + \cdots + \bar{a}_n b_n$

☆3 を満たす。

例 (注) 教科書と定義が違う。

ノルム $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} \geqq 0$ $\|t\mathbf{a}\| = |t| \cdot \|\mathbf{a}\|$

Thm (i) $|(\mathbf{a}, \mathbf{b})| \leqq \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|$

(ii) $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leqq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$

(証) ~ //

$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ の時 直交するという。

正規直交系，Schmidt の正規直交化法，… は $\mathbb{R}^n$ と同様。 内積の順序に注意

例

(宿) 12-2~4

§3-2 抽象化

◎ 線型空間

体 K　$K=\mathbb{R}, \mathbb{C}, \cdots$　　$K \ni k, l, \cdots$ スカラー

集合 V　　$V \ni \mathbf{a}, \mathbf{b}, \cdots$ ベクトル

Def　V が K 上の線型空間（ベクトル空間）

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{和} \quad \mathbf{a}+\mathbf{b} \quad ({}^\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V \Rightarrow \mathbf{a}+\mathbf{b} \in V) \\ \text{スカラー倍} \quad k\mathbf{a} \quad ({}^\forall \mathbf{a} \in V, {}^\forall k \in K \Rightarrow k\mathbf{a} \in V) \end{cases}$ （$\mathbf{a}k$ と書くことも許す）

が定義され，☆$_1$☆$_2$ を満たす．

Thm.　[P146]

Def　[定義16-2, 3, 4, 5, 6, 7]　など $\mathbb{R}^n$ と同様

Thm　[定理16-1, 2]　　〃

☆「n次元ベクトル空間」+「1つの基底」=「n次元数ベクトル空間」

例

◎ 線型写像

Def.　V, W : K上の線型空間

$T: V \to W$, $x \mapsto T(x)$ が ☆$_4$ を満たす時，線型写像という．

行列

☆「線型写像」+「1つの基底」=「行列」

例

◎ 内積

Def.　K上の線型空間 V が内積を持つ時，計量線型空間という．

内積とは，$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ に対して $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in K$ を対応させる規則で ☆$_3$ を満たすもの．

ノルム　$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} \geq 0$，　$\|k\mathbf{a}\| = |k| \cdot \|\mathbf{a}\|$

Thm　(i)　$|(\mathbf{a}, \mathbf{b})| \leq \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|$，　(ii)　$\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$

$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ のとき直交。正規直交系，Schmidtの正規直交化法，… は $\mathbb{R}^n$ と同様

（注）内積の入れ方は一意的ではない．

例

§4 行列式

No. 4-1

・完全反対称シンボル

$\varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n}$　　$i_j = 1, \cdots, n$

$\begin{cases} \text{完全反対称（添字を入れ替えると－がつく）} & \varepsilon_{\cdots i \cdots j \cdots} = -\varepsilon_{\cdots j \cdots i \cdots} \\ \varepsilon_{12\cdots n} = 1 & \end{cases}$

例)

同じ添字があると0。　0でないのは全ての添字が異なるとき。

$i_1 i_2 \cdots i_n$ を何回入れ替えると $12\cdots n$ になるか。 $\begin{cases} \text{偶数回のとき} & \varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} = 1 \\ \text{奇数回のとき} & \varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} = -1 \end{cases}$

◎ 行列式

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ で張られる平行四辺形の(符号付き)面積 $= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \sum_{i,j=1}^{2} \varepsilon_{ij} a_i b_j$

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ で張られる平行六面体の(符号付き)体積 $= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k$

一般化

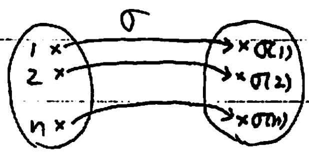
Def.　$n \times n$ 行列 $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2 \cdots \boldsymbol{a}_n)$ の

行列式 $|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1, i_2, \cdots, i_n = 1}^{n} \varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$

注) 和は $\{i_1, i_2, \cdots, i_n\} = \{1, 2, \cdots, n\}$ のみきく。　$n!$ 個の和。

注) $|\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2 \cdots \boldsymbol{a}_n| = \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ で張られる平行 $2n$ 面体の(符号付き)体積

注) (n文字の)置換：$\{1, 2, \cdots, n\}$ から $\{1, 2, \cdots, n\}$ への1対1対応



$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ と書く。　$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & n \\ \sigma(2) & \sigma(1) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ と書いても同じ。

・恒等置換　$1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$　　σ の逆置換　$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$

・積 $\sigma\tau$ は合成写像 $\sigma \circ \tau$　　例)

・$S_n = \{n\text{文字の置換}\}$　：n 次対称群　　$|S_n| = n!$

・互換 (i, j) ：i と j だけを入れ替えて他を動かさない。 $(i, j) = \begin{pmatrix} \cdots & i & \cdots & j & \cdots \\ \cdots & j & \cdots & i & \cdots \end{pmatrix}$

・Thm 置換は互換の積として表され，その積の個数の偶奇は表し方に依らない。☺～

・Def.　σ が偶(奇)数個の互換の積の時，偶(奇)置換といい，
　　σ の符号を　$\operatorname{sgn}\sigma = \begin{cases} 1 & \sigma\text{が偶置換} \\ -1 & \text{奇} \end{cases}$　と定める。

・$\operatorname{sgn}\sigma = \varepsilon_{\sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)}$

・$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\ a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$ //　　　注終わり

例) $n=2, n=3$

(注) $n \geq 4$ではこういう方法はない。 和の数は$n!$個. ㊖2-1

- 行列式の性質

Thm [定理4-1, 定理4-$\overset{2'\sim4'}{2\sim4}$ 系4-$\overset{5'\sim6'}{5\sim6}$]

Cor $|a_{j_1}\, a_{j_2} \cdots a_{j_n}| = \varepsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n} |a_1\, a_2 \cdots a_n|$

Def $A = (a_{ij})$ $n \times n$

a_{ij}の余因子 $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \cancel{a_{i1}} & \cdots & \cancel{a_{ij}} & & \cancel{a_{in}} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ i行を取り去る　j列を取り去る

Thm $|A| = a_{1j}\tilde{a}_{1j} + a_{2j}\tilde{a}_{2j} + \cdots + a_{nj}\tilde{a}_{nj}$ (第j列に関する展開)

$= a_{i1}\tilde{a}_{i1} + a_{i2}\tilde{a}_{i2} + \cdots + a_{in}\tilde{a}_{in}$ (第i行に 〃) ☺ ~//

Cor $|A|\delta_{ij} = a_{1i}\tilde{a}_{1j} + a_{2i}\tilde{a}_{2j} + \cdots + a_{ni}\tilde{a}_{nj}$

$= a_{i1}\tilde{a}_{j1} + a_{i2}\tilde{a}_{j2} + \cdots + a_{in}\tilde{a}_{jn}$ ☺ ~//

Def. $\underset{n\times n}{A = (a_{ij})}$の余因子行列 $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ji}) = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \cdots & \tilde{a}_{n1} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{n2} \\ \vdots & & & \\ \tilde{a}_{1n} & \tilde{a}_{2n} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$

上のCorは $A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A|E$

Thm $A, B : n \times n$ $|AB| = |A| \cdot |B|$ ☺ ~//

Thm $A : n \times m$, $B : m \times n$ $A = (a_1\, a_2 \cdots a_m)$, $B = \begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \\ \vdots \\ b_m' \end{pmatrix}$

(i) $m = n$のとき $|AB| = |A| \cdot |B|$

(ii) $m < n$のとき $|AB| = 0$

(iii) $m > n$のとき $|AB| = \underbrace{\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leq m}}_{\binom{m}{n}\text{個}} |a_{i_1}\, a_{i_2} \cdots a_{i_n}| \cdot \begin{vmatrix} b_{i_1}' \\ b_{i_2}' \\ \vdots \\ b_{i_n}' \end{vmatrix}$

☺ ~//

Thm F: n個のn次元数ベクトル → 数

$x_1, \cdots, x_n \longmapsto F(x_1, \cdots, x_n)$

$\begin{cases} n\text{重線型性} & (\text{各}x_i\text{について線型性}) \\ \text{交代性} & (F(\cdots x_i, \cdots, x_j, \cdots) = -F(\cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots)) \end{cases}$

$\Rightarrow F(x_1, \cdots, x_n) = c\,|x_1 \cdots x_n|$, $c = F(e_1, \cdots, e_n)$ ☺ ~//

- 例)

㊖4-1~4,6

§5 行列と線型写像

◎ 行列の演算

$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ i行j列が a_{ij}　　$m \times n$ 行列

$m=n$ のとき n 次正方行列

(0) 相等 $\underset{m\times n}{A} = \underset{m\times n}{B}$

$a_{ij} = b_{ij}$

(1) 和 $\underset{m\times n}{C} = \underset{m\times n}{A} + \underset{m\times n}{B}$

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

(2) スカラー倍 $\underset{m\times n}{C} = k \underset{m\times n}{A}$

$c_{ij} = k a_{ij}$

(3) 積 $\underset{m\times p}{C} = \underset{m\times n}{A}\ \underset{n\times p}{B}$

$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

$$\begin{array}{c} \\ i \end{array}\begin{pmatrix} & j & \\ \cdots & c_{ij} & \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ i \end{array}\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & j & \\ & b_{1j} & \\ & b_{2j} & \\ & \vdots & \\ & b_{nj} & \end{pmatrix}$$

例)

Prop [定理3-1〜4]

注) AB が定義されても, BA が定義されるとは限らない.

AB, BA が定義されても, AB = BA とは限らない.

「AB = O ⇒ A = O 又は B = O」が成り立つとは限らない

Def kE をスカラー行列

Prop n 次スカラー行列 ⟺ 全ての n 次行列と交換可能 (AB=BA)

Def. 正方行列 A に対し, $A^n = \underbrace{AA\cdots A}_{n個}$ と書く

例)

Def 多項式 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ と正方行列 A に対して, $f(A) = a_0A^n + a_1A^{n-1} + \cdots + a_{n-1}A + a_nE$ とおく

Def. 正方行列 A に対して,

$f_A(x) = |xE - A|$ を A の固有多項式 (特性多項式) という.

Thm (Hamilton - Cayley)

$A : n\times n$, $f_A(A) = O$ (n×n)

注) $f_A(A) = |AE - A| = |O| = 0$ ではない

誤り　　数字

注) A^n = (A の $n-1$ 次以下の式)

A^N を 〃 で表せる → A^N の計算法

$x^N = f_A(x)\underset{商}{r(x)} + \underset{余り}{g(x)}$, $A^N = g(A)$

例)

- Def. $m\times n$ 行列 $A=(a_{ij})$ の行と列を入れ替えた $n\times m$ 行列を A の転置行列といい，${}^tA$ と書く． $({}^tA)_{ij}=a_{ji}$

例)

Prop ${}^t({}^tA)=A$，[定理3-5]

Def. $A=(a_{ij})$ $m\times n$ の複素共役行列 $\overline{A}=(\overline{a_{ij}})$ $m\times n$

エルミート共役行列 $A^\dagger={}^t\overline{A}$ $n\times m$ $(\overset{\text{ダガー}}{A^\dagger}=A^*)$

Prop. $(A^\dagger)^\dagger=A$，$(A+B)^\dagger=A^\dagger+B^\dagger$，$(kA)^\dagger=\bar{k}A^\dagger$，$(AB)^\dagger=B^\dagger A^\dagger$ ☺~//

- 行列の区分け

$$A=\left(\begin{array}{c:c:c}a_{11} & & a_{1n}\\ \hdashline & & \\ \hdashline a_{m1} & & a_{mn}\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1q}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2q}\\ \vdots & & & \vdots\\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pq}\end{pmatrix}$$

A_{st} : $m_s\times n_t$

$m=\sum_{s=1}^{p}m_s$，$n=\sum_{t=1}^{q}n_t$

Prop $\overset{m\times n}{A}=\begin{pmatrix}A_{11} & \cdots & A_{1q}\\ \vdots & & \vdots\\ A_{p1} & \cdots & A_{pq}\end{pmatrix}$ $\overset{n\times l}{B}=\begin{pmatrix}B_{11} & \cdots & B_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ B_{q1} & \cdots & B_{qr}\end{pmatrix}$ $\overset{m\times l}{C}=AB$

A_{st} : $m_s\times n_t$ B_{tu} : $n_t\times l_u$

$C=\begin{pmatrix}C_{11} & \cdots & C_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ C_{p1} & \cdots & C_{pr}\end{pmatrix}$ $C_{su}=\sum_{t=1}^{q}A_{st}B_{tu}$: $m_s\times l_u$

☺~//

特に Prop $\overset{m\times n}{A}=\begin{pmatrix}a'_1\\ \vdots\\ a'_m\end{pmatrix}$ $\overset{n\times l}{B}=(\mathbb{b}_1\cdots\mathbb{b}_l)$

$$AB=(A\mathbb{b}_1\ A\mathbb{b}_2\ \cdots\ A\mathbb{b}_l)=\begin{pmatrix}a'_1B\\ a'_2B\\ \vdots\\ a'_mB\end{pmatrix}$$ ☺~//

◎逆行列

Def [定義5-1]

Prop [例5-2 (2)(3)]

Thm A : 正則 $\Leftrightarrow$ $|A|\neq 0$ その時 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\widetilde{A}$ ☺~//

Prop (i) $AX=E$ なる X が存在 $\Rightarrow$ A は正則で $A^{-1}=X$ つまり $XA=E$

(ii) $XA=E$ 〃 $\Rightarrow$ 〃 $AX=E$ ☺~//

注) 無元次元行列では必ずしも成立しない．

- 逆行列の求め方

例)

宿 5-1, 4~6

Def　n次正方行列 $A=(a_{ij})$ のトレース(跡, 固有和)　$\mathrm{tr}\,A=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

Prop　$\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}A+\mathrm{tr}B$, $\mathrm{tr}(kA)=k\,\mathrm{tr}A$, $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$ ☺〜//

Prop　$\mathrm{tr}(P^{-1}AP)=\mathrm{tr}A$, $\det(P^{-1}AP)=\det A$

◎ 行列の基本変形と階数

Prop [定理 9-2]

Thm　$m\times n$ 行列 A は 行と列の基本変形を有限回行って

$$\begin{array}{r} r\{ \\ m-r\{ \end{array}\left(\begin{array}{c:c} \overbrace{\begin{matrix}1 & & O\\ & \ddots & \\ O & & 1\end{matrix}}^{r} & \overbrace{O}^{n-r} \\ \hdashline O & O \end{array}\right)$$

に変形できる。つまり m次正則行列 B, n次正則行列 C が存在して $BAC=\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}$

rはAのみによって決まり, 基本変形の仕方に依らない ☺〜//

Def　上のrをAの階数(ランク)といい, $\mathrm{rank}\,A=r$ と書く

例)

$BAC=\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}$ となるB, Cも求めるなら　$(A\,\vdots\,E_m\,\vdots\,E_n)\xrightarrow{\text{行のみ}\quad\text{列のみ}}(BAC\,\vdots\,B\,\vdots\,C)$

注) B, Cは一意的ではない.

- Def　$A: m\times n$　　$A=(a_1\cdots a_n)=\begin{pmatrix}a'_1\\ \vdots\\ a'_m\end{pmatrix}$

　Aの列階数 = Aの一次独立な列ベクトル(a_j達)の最大数

　Aの行 〃 = 〃 行ベクトル(a'_i達) 〃

例)

- Def [定義 9-7]

例)

- Thm　階数 = 列階数 = 行階数 = 0でない小行列式の最大次数

　☺〜//

㊀ 9-4〜5

◎ 像と核

Def [定義 8-2]

例)

Prop [定理 8-4~5]

例)

Thm [定理 8-6]

宿 8-3~5
12-1

◎ 連立一次方程式

[P96] $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ $(A \vdots \mathbf{b})$ を掃き出し法で解けばよい

Thm [定理 10-1]

Thm $A: m\times n$, $\mathrm{rank}A=r$, $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ が解 $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0$ を持つとき

$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ の解は $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0+(A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ の解$)$

$=\mathbf{x}_0+c_1\mathbf{x}_1+\cdots+c_{n-r}\mathbf{x}_{n-r}$ $(c_1,\cdots,c_{n-r}$ は任意$)$

☺ ~〃 $(\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_{n-r}$ は一次独立で $A\mathbf{x}_i=\mathbf{0})$

$\mathbf{x}_0$ を特(殊)解という。 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ を斉次方程式といい, $\mathbf{x}=\mathbf{0}$ という自明な解がある。

Thm [定理 10-3]

Thm $A: n\times n$

$A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ が自明でない解 $(\mathbf{x}\neq\mathbf{0})$ を持つ $\Longleftrightarrow$ $|A|=0$ ☺ ~〃

Thm [定理 5-2]

(注) クラメルの公式より掃き出し法が実用的

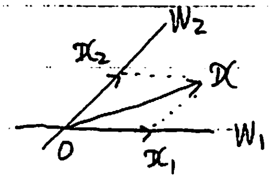
例)

宿 10-1~3
5-2~3

◎射影

Def. $\mathbb{R}^n = W_1 \oplus W_2$ $\quad$ $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ をW₁への射影という。

$\qquad\quad x = x_1 + x_2 \qquad\qquad x \mapsto x_1$



特に $W_2 = W_1^\perp$ の時 正射影という。

Prop. 射影は線型写像 ☺ ～//

Prop. $\mathbb{R}^n = W_1 \oplus W_2$, $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$: 線型 $T \leftrightarrow P$

(1) T: W_1への射影 $\Rightarrow P^2 = P$, $Q = E - P$ は W_2への射影, $Q^2 = Q$, $PQ = QP = O$

(2) $P^2 = P \Rightarrow T$: W_1への射影, $W_1 = \{Px \mid x \in \mathbb{R}^n\}$, $W_2 = \{(E-P)x \mid x \in \mathbb{R}^n\}$

☺ ～//

Prop $\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$, $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$: 線型, $T \leftrightarrow P$

(1) T: Wへの正射影 $\Rightarrow P^2 = P$, ${}^tP = P$, $Q = E - P$ は $W^\perp$への正射影, $Q^2 = Q$, ${}^tQ = Q$, $PQ = QP = O$

(2) $P^2 = P$, ${}^tP = P \Rightarrow T$: Wへの正射影, $W = \{Px \mid x \in \mathbb{R}^n\}$, $W^\perp = \{(E-P)x \mid x \in \mathbb{R}^n\}$

☺ ～//

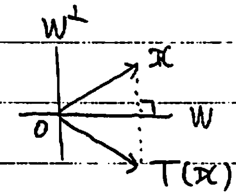
Prop $\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$, T: Wへの正射影 $T \leftrightarrow P$, $u_1, \cdots, u_r$: Wの正規直交基底

$\Rightarrow T(x) = (u_1, x)u_1 + \cdots + (u_r, x)u_r$, $P = u_1\,{}^tu_1 + \cdots + u_r\,{}^tu_r$ ☺ ～//

例)

・Def $\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$ $\quad$ $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ をWに関する鏡映という。

$\qquad\quad x = x' + x'' \qquad\qquad x \mapsto x' - x''$



Prop 鏡映は線型写像

T: Wへの正射影, $T \leftrightarrow P$, S: Wに関する鏡映 $S \leftrightarrow R$

$\Rightarrow S = 2T - I$, $R = 2P - E$ ☺ ～//

例)

・$\mathbb{C}^n$ では ${}^tA$ の代わりに $A^\dagger$

◎直交変換とユニタリ変換

・$\mathbb{R}^n$ の内積　$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$　$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n = {}^t\mathbf{a}\mathbf{b}$

Prop　$A: m \times n$ 実，$x \in \mathbb{R}^m$，$y \in \mathbb{R}^n \Rightarrow (x, Ay) = ({}^tAx, y)$

$\mathbb{R}^m$ の内積　$\mathbb{R}^n$ の内積

☺ ～//

Def　$A: n \times n$ 実

${}^tAA = E$ を満たす時 A を直交行列という　$(\Rightarrow A{}^tA = E)$

${}^tA = A$ を 〃 A を実対称行列という

Prop　$A: n \times n$ 実　次は同値

(1) A：直交行列

(2) $\|Ax\| = \|x\|$　$\forall x \in \mathbb{R}^n$

(3) $(Ax, Ay) = (x, y)$　$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

(4) $A = (\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n)$　$(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = \delta_{ij}$

☺ ～//

㊢ 11-7~10

・$\mathbb{C}^n$ の内積　$\mathbb{C}^n \ni \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$　$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \bar{a}_1 b_1 + \cdots + \bar{a}_n b_n = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{b}$

Prop　$A: m \times n$ 複素，$x \in \mathbb{C}^m$，$y \in \mathbb{C}^n \Rightarrow (x, Ay) = (A^\dagger x, y)$

$\mathbb{C}^m$ の内積　$\mathbb{C}^n$ の内積

☺ ～//

Def.　$A: n \times n$ 複素

$A^\dagger A = E$ を満たす時 A をユニタリ行列という．$(\Rightarrow AA^\dagger = E)$

$A^\dagger = A$ を 〃 A をエルミート行列という．

Prop.　$A: n \times n$ 複素　次は同値

(1) A：ユニタリ行列

(2) $\|Ax\| = \|x\|$　$\forall x \in \mathbb{C}^n$

(3) $(Ax, Ay) = (x, y)$，$\forall x, y \in \mathbb{C}^n$

(4) $A = (\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n)$　$(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = \delta_{ij}$

☺ ～

・例

㊢ 12-5~10

◎基底の取り替え

∘ $e_1, \cdots, e_n$: $\mathbb{R}^n$ の基底

$f_1, \cdots, f_n$: $\mathbb{R}^n$ の基底

$$\begin{cases} f_1 = p_{11} e_1 + p_{21} e_2 + \cdots + p_{n1} e_n \\ \vdots \\ f_n = p_{1n} e_1 + p_{2n} e_2 + \cdots + p_{nn} e_n \end{cases}$$

行列の積の記法で $(f_1 \cdots f_n) = (e_1 \cdots e_n) \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$

$|P| \neq 0$ 　　 $\underset{\displaystyle P}{\shortparallel}$: 基底の取り替え $\left((e_i) \to (f_i)\right)$ の行列.

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n = (e_1 \cdots e_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= y_1 f_1 + \cdots + y_n f_n = (f_1 \cdots f_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_f$$

$$= (e_1 \cdots e_n) P \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad \therefore \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

∘ $e_1', \cdots, e_m'$: $\mathbb{R}^m$ の基底 　　 $(f_1' \cdots f_m') = (e_1' \cdots e_m') P'$

$f_1', \cdots, f_m'$: $\mathbb{R}^m$ の基底

$$x' = (e_1' \cdots e_m')\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_m' \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_m' \end{pmatrix} = P' \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_m' \end{pmatrix}$$

$$= (f_1' \cdots f_m')\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_m' \end{pmatrix}$$

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$: 線型

$$x' = T(x) = T(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n)$$

$$\underset{\displaystyle (e_1' \cdots e_m')\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_m' \end{pmatrix}}{\shortparallel} \qquad = x_1 T(e_1) + \cdots + x_n T(e_n) \qquad T(e_j) = a_j$$

$$= (a_1 \cdots a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad = (e_1' \cdots e_m')\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

$$= (e_1' \cdots e_m')\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_m' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

: 基底 $(e_i), (e_i')$ に関する T の行列

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_m' \end{pmatrix} = P'^{-1} A P \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

∴ 基底 $(f_i), (f_i')$ に関する T の行列 B は $B = P'^{-1} A P$

特に線型変換 $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ のとき $B = P^{-1} A P$

$$\left.\begin{array}{l} \det B = \det A \\ \mathrm{tr} B = \mathrm{tr} A \end{array}\right\} \text{ T に固有の量}$$

§6 固有値と固有ベクトル

$A : n \times n$

- Def. $Ax = \alpha x$ となる $x \neq 0$ が存在する時，
  α を A の固有値，$x(\neq 0)$ を α に対する固有ベクトルという。

Def. α に対する固有ベクトルと 0 からなる集合を α に対する固有空間という。W_α と表す。

Prop. W_α は部分空間 ☺ ~//

Def. $f_A(x) = |xE - A|$ ： A の固有多項式（特性多項式）
$f_A(x) = 0$ ： 〃 方程式（〃 方程式）

例

Thm. α が A の固有値 $\Longleftrightarrow$ α は A の固有方程式の解 ☺ ~//

- 固有値・固有ベクトルの求め方

例

㊝ 13-1

- Prop. A の相異なる固有値に対する固有ベクトルは一次独立 ☺ ~//

Prop. A の相異なる固有値に対する固有空間の和空間は直和。
つまり $W_{\alpha_1} + \cdots + W_{\alpha_s} = W_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus W_{\alpha_s}$ ☺ ~//

Def. $f(A) = O$ となる（スカラー係数の）多項式のうち，次数が最低で，
最高次の係数が 1 であるものを A の最小多項式といい，$\varphi_A(x)$ と表す。

例

Prop. $f(A) = O \Rightarrow f(x)$ は $\varphi_A(x)$ で割り切れる ☺ ~//

Prop. $f_A(x)$ は $\varphi_A(x)$ で割り切れる。
$\varphi_A(x) = 0$ の根は（重複度を無視して）固有値と一致する ☺ ~//

つまり $f_A(x) = \prod_{i=1}^{s} (x - \alpha_i)^{m_i}$ （α_i は相異なる）とすると
$\varphi_A(x) = \prod_{i=1}^{s} (x - \alpha_i)^{m_i'}$ $1 \leq m_i' \leq m_i$

Prop. $f_{P^{-1}AP}(x) = f_A(x)$
$\varphi_{P^{-1}AP}(x) = \varphi_A(x)$ ☺ ~//

（注） $xE - A$ の余因子行列の n^2 個の成分の（x の多項式としての）最大公約数を
$\psi(x)$ とおくと，$\varphi_A(x) = \dfrac{f_A(x)}{\psi(x)}$

§7 対角化とスペクトル分解

$A: n \times n$

§7-1 対角化とスペクトル分解

◎ Def. $P^{-1}AP = B$ となる正則行列 P が存在する時，A と B は相似であるという。

Def. A が対角行列 $D = \begin{pmatrix} d_1 & & & O \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & d_n \end{pmatrix}$ に相似な時，A は対角化可能という。

例)

Thm $A: n \times n$ $\quad f_A(x) = \prod_{i=1}^{s} (x - \alpha_i)^{m_i}$ $\quad$ (α_i は相異なる) $\quad \sum_{i=1}^{s} m_i = n$

(1) A は対角化可能

$\Leftrightarrow$ (2) $\mathbb{R}^n$ (又は $\mathbb{C}^n$) は固有空間の直和に分解される。つまり n 個の一次独立な固有ベクトルが存在。

$\Leftrightarrow$ (3) $\varphi_A(x) = 0$ は重根を持たない。

☺ ～//

(注) (1) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \overbrace{\alpha_1 \cdots \alpha_1}^{m_1} & & & & \\ & \overbrace{\alpha_2 \cdots \alpha_2}^{m_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \overbrace{\alpha_s \cdots \alpha_s}^{m_s} \end{pmatrix}$

(2) $\mathbb{R}^n$ (又は $\mathbb{C}^n$) $= W_{\alpha_1} \oplus W_{\alpha_2} \oplus \cdots \oplus W_{\alpha_s}$, $\quad \dim W_{\alpha_i} = m_i$

(3) $\varphi_A(x) = \prod_{i=1}^{s} (x - \alpha_i)$

Cor 固有値が全て異なる $\Rightarrow$ 対角化可能

- 対角化の方法

例)

◎ スペクトル分解

Thm $A: n \times n$ 対角化可能 つまり $\mathbb{R}^n$ (又は $\mathbb{C}^n$) $= W_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus W_{\alpha_s}$ とする。

W_{α_i} への射影を P_i とすると，$P_i P_j = \delta_{ij} P_i$

$A = \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_s P_s$ ($\leftarrow$ スペクトル分解という)

☺ ～//

(注) $A^k = \alpha_1^k P_1 + \cdots + \alpha_s^k P_s$

- スペクトル分解の方法

例)

§7-2 実対称行列

◎ Prop $A : n \times n$ 実対称

(1) Aの固有値は実数で，固有ベクトルとして実ベクトルをとれる．

(2) 異なる固有値に対する固有ベクトルは直交する

Thm 実対称行列は対角化可能

より詳しく Thm 実対称行列 $\Longleftrightarrow$ 直交行列で対角化可能な実行列

∘ 対角化の方法 (実対称行列を直交行列で対角化せよ。)

例

演 13-2

◎ Thm $A : n \times n$ 実対称

$\mathbb{R}^n = W_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus W_{\alpha_s}$ (直交)

W_{α_i} への正射影を P_i とすると $P_i P_j = \delta_{ij} P_i$, ${}^t P_i = P_i$

$A = \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_s P_s$ (スペクトル分解)

例

§7-3 正規行列

◎ Def $A : n\times n$ 複素 $A^\dagger A = AA^\dagger$ を満たす時，A を正規行列という.

Prop エルミート行列，ユニタリ行列は正規行列 ☺ ~//

Prop A : 正規

(1) $A\mathbf{p} = \alpha\mathbf{p}$ $(\mathbf{p}\neq \mathbf{0}) \Rightarrow A^\dagger\mathbf{p} = \bar{\alpha}\mathbf{p}$

(2) 異なる固有値に対する固有ベクトルは直交する ☺ ~//

Thm 正規行列 $\Longleftrightarrow$ ユニタリ行列で対角化可能

☺ ~//

◦ 対角化の方法 (正規行列をユニタリ行列で対角化せよ。)

例)

◎ Thm $A : n\times n$ 正規

$\mathbb{C}^n = W_{\alpha_1}\oplus\cdots\oplus W_{\alpha_s}$ (直交)

W_{α_i} への正射影を P_i とすると，$P_iP_j = \delta_{ij}P_i$ ，$P_i^\dagger = P_i$

$A = \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_s P_s$ (スペクトル分解)

☺ ~//

例)

◎ Prop (1) エルミート行列 $\Rightarrow$ 全ての固有値が実数 ☺ ~//

(2) ユニタリ行列 $\Rightarrow$ 〃 絶対値が1の複素数

(注) 正規行列に限れば逆がいえる.

Thm A, B $n\times n$ 正規

同時対角化可能 (つまり $U^\dagger AU$, $U^\dagger BU$ が共に対角行列)

$\Longleftrightarrow AB = BA$

☺ ~//

(注) 実対称行列でも同様

§7-4 ジョルダン標準形

Def. $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & & O \\ & \alpha & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ O & & & \alpha \end{pmatrix} = J(\alpha : k)$ ← $k \times k$ 　　k次 Jordan細胞

$J = \begin{pmatrix} J(\alpha_1, k_1) & & O \\ & \ddots & \\ O & & J(\alpha_t, k_t) \end{pmatrix}$ 　　Jordan行列

Thm (Jordan標準形)

任意の正方行列は，(Jordan細胞の並べ方を除いて) 唯1つのJordan行列に相似である。

例)

Def. mを十分大として

$\widetilde{W}_{\alpha_i} = \{x \mid (A - \alpha_i E)^m x = 0\}$：一般固有空間 　　$\left(\begin{array}{l} \widetilde{W}_{\alpha_i} \supset W_{\alpha_i} \\ m \geqq m_i \text{ ならOK} \end{array} \right)$

Thm. (Jordan分解，一般スペクトル分解)

$A : n \times n$ 　$f_A(x) = \prod_{i=1}^{s} (x - \alpha_i)^{m_i}$ 　　$\frac{1}{f_A(x)} = \sum_{i=1}^{s} \frac{g_i(x)}{(x - \alpha_i)^{m_i}}$

$\varphi_A(x) = \prod_{i=1}^{s} (x - \alpha_i)^{m_i'}$ 　　$\frac{1}{\varphi_A(x)} = \sum_{i=1}^{s} \frac{\tilde{g}_i(x)}{(x - \alpha_i)^{m_i'}}$

$\widetilde{W}_{\alpha_i}$への射影 P_i

$\Rightarrow$ $\mathbb{R}^n$ (又は $\mathbb{C}^n$) $= \widetilde{W}_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus \widetilde{W}_{\alpha_s}$, 　$P_1 + \cdots + P_s = E$, 　$P_i P_j = \delta_{ij} P_i$

$A = S + N$ (一意的)

$S = \alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_s P_s$ (対角化可能)

$N = (A - \alpha_1 E) P_1 + \cdots + (A - \alpha_s E) P_s$ (巾零 つまり $\exists m$ $N^m = O$) $(m = \max_i m_i')$

$SN = NS$

$P_i = g_i(A) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{s} (A - \alpha_j E)^{m_j} = \tilde{g}_i(A) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{s} (A - \alpha_j E)^{m_j'}$

例)

~~○ 宿題提出~~

~~場所：小竹研究室前の入れ物~~

~~各週の締切：1〜6問　6日後 17:00 まで　例) 木曜授業なら 次週水曜 17:00~~

~~7〜12問　13 〃　例) 〃　次々週 〃~~

~~13〜 問　20 〃　例) 〃　次々々週 〃~~

~~返却：小竹研究室前の入れ物~~

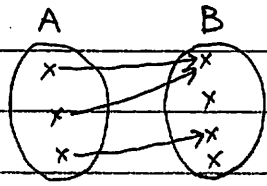
No1-3

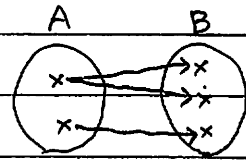
◎ 集合Aから集合Bへの写像 f とは、Aの各要素にBの要素を1つ対応させる対応規則

$f: A \to B$

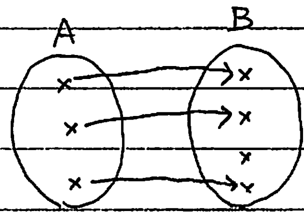
$\quad\ \ \Downarrow \qquad \Downarrow$

$\quad\ \ a \mapsto b = f(a)$

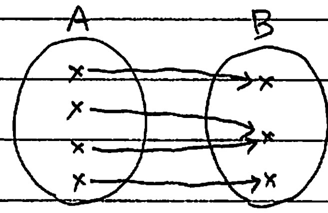




はダメ×

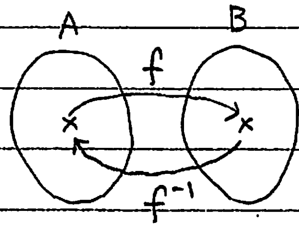


1対1写像
(単射)



上への写像
(全射)

上への1対1写像のとき
(全単射)

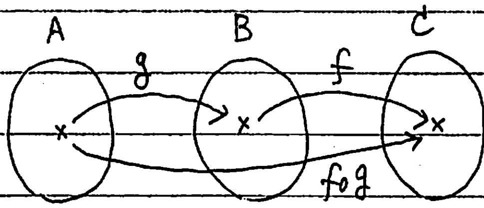


逆写像 $f^{-1}: B \to A$

$\qquad \Downarrow \qquad \Downarrow$

$\qquad f(a) \mapsto a$

合成写像

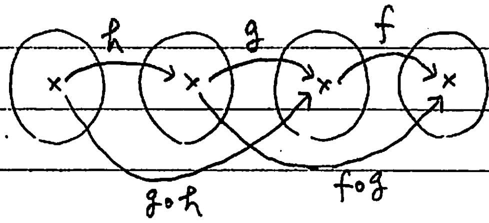


$g: A \to B \quad f: B \to C$

$f \circ g: A \to C$

$(f \circ g)(a) = f(g(a))$

結合律



$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

$f \circ g \circ h$ と書いてよい。

$(f \circ g \circ h)(a) = f(g(h(a)))$

① No4-2

行列式の性質(の一部)

- ある行に他の行の何倍かを加えても、値は変わらない。
- ある行に0でない数cを掛けると、値はc倍になる。
- 2つの行を入れ替えると、値は−1倍になる。

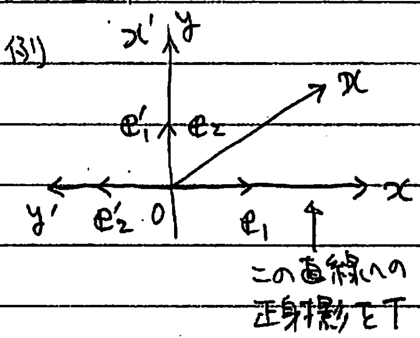
列も同様

第i行に関する展開

第j列 〃

② No.5-7

例)



基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$

$\boldsymbol{x} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 = (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\quad \boldsymbol{x} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$T(\boldsymbol{x}) = x\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\quad T \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

基底 $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'$

$\boldsymbol{x} = x'\mathbf{e}_1' + y'\mathbf{e}_2' = (\mathbf{e}_1'\ \mathbf{e}_2')\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}'$ $\quad \boldsymbol{x} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}'$

$T(\boldsymbol{x}) = y'\mathbf{e}_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}'$ $\quad T \leftrightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2' = -\mathbf{e}_1 \end{cases}$ $\quad (\mathbf{e}_1'\ \mathbf{e}_2') = (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2)\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=P}$

$\boldsymbol{x} = (\mathbf{e}_1'\ \mathbf{e}_2')\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2)P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ $\quad \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y' \\ x' \end{pmatrix}$

$= (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}'$ $\quad$ ex $\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 = 2\mathbf{e}_1' - \mathbf{e}_2'$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}'$

$T(\boldsymbol{x}) = (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1'\ \mathbf{e}_2')P^{-1}AP\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$= (\mathbf{e}_1'\ \mathbf{e}_2')B\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ $\quad \therefore B = P^{-1}AP$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

◦ 宿題提出 (改訂版)

宿題用のノートを1冊準備してそれに書く。

提出：期末試験の時。　確認シートと共に提出

~~確認：小竹研究室前に掲示した紙にやった宿題を記入する。~~

~~1〜6問　6日後 17:00 まで~~

~~7〜12問　13 〃~~

~~13〜 問　20 〃~~

進度予定	ここまで終了
1回目	No 1-3 上
2	No 1-4
3	No 1-8
4	No 2
5	No 3-1-4 上
6	No 3-2
7	No 4-2 下の例途中
8	No 4-2
9	No 5-3
10	No 5-7
11	No 6-1
12	No 7-1
13	No 7-2 (途中まで) No 7-3, No 7-4
14	No 7-2 (つづき)
15	期末試験

[…] は教科書中の番号

◦例 • $V = \{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \}$ $(K = \mathbb{R})$ $\begin{cases} \text{和} & A+B \\ \text{スカラー倍} & kA \end{cases}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ $\dim V = 4$

• $V_1 = \{ x$ の2次以下の多項式$\}$

$= \{ f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$ $(K = \mathbb{R})$ $\begin{cases} \text{和} & f(x) + g(x) \\ \text{スカラー倍} & kf(x) \end{cases}$

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ $\dim V_1 = 3$

• $V_2 = \{ x$ の多項式$\}$

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$ $\dim V_2 = \infty$

• $V_3 = C(I) = \{$区間 I 上の実数値連続関数$\}$ $(K = \mathbb{R})$ $\begin{cases} \text{和} & (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\ \text{スカラー倍} & (kf)(x) = kf(x) \end{cases}$

$\dim V_3 = \infty$

◦例 • 上の V_1 $\frac{d}{dx}$: 線型写像

$\frac{d}{dx}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_1 + 2a_2 x = \begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

• 上の V_2 $f(x) = a_0 + a_1 \frac{x}{1!} + a_2 \frac{x^2}{2!} + a_3 \frac{x^3}{3!} + \cdots \leftrightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$

$\frac{d}{dx} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & & O \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ O & & & \ddots \end{pmatrix} = A$

$\int_0^x dx' \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & & & O \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & \ddots & \\ O & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} = B$ $AB = \begin{pmatrix} 1 & & O \\ & 1 & \\ O & & \ddots \end{pmatrix}$ $BA = \begin{pmatrix} 0 & & & O \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ O & & & \ddots \end{pmatrix}$

◦例 • $V = C([a, b])$ 上の V_3 をみよ

重み w の内積 $(w(x) \geqq 0)$

$f, g \in V$ $(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) w(x) dx$

• $V = C([-\pi, \pi])$

重み $w = 1$ の内積に関して

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx$ $(n = 1, 2, \cdots)$

は正規直交系。 ☺ ~

実は正規直交基底である!

つまり、$[-\pi, \pi]$ での実数値連続関数 $f(x)$ は全て、

$f(x) = a_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx + b_n \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \right)$ (Fourier 級数)

と展開できる! $\left(x = \pm\pi \text{ では } \frac{1}{2}(f(-\pi+0) + f(\pi-0)) \right)$

200 （平成 ）年度 期

小竹

解いた宿題に〇をつける

学籍番号

氏名

問題番号			問題番号		
2-2			12-2		
2-3			12-3		
2-4			12-4		
2-5			2-1		
2-6			4-1		
2-7			4-2		
2-8			4-3		
1-1			4-4		
1-2			4-6		
1-3			5-1		
6-1			5-4		
6-2			5-5		
7-1			5-6		
7-2			9-4		
7-3			9-5		
6-3			8-3		
6-4			8-4		
6-5			8-5		
6-6			12-1		
6-7			10-1		
6-8			10-2		
7-6			10-3		
7-7			5-2		
7-8			5-3		
7-9			11-7		
7-10			11-8		
8-1			11-9		
8-2			11-10		
3-1			12-5		
3-2			12-6		
3-3			12-7		
11-1			12-8		
11-2			12-9		
11-3			12-10		
11-4			13-1		
11-5			13-2		
11-6					