物理と対称性　レポート課題 [ver1.1.1]

ミスプリ等を見つけたら連絡して下さい。

第○回は○回目の授業に関する問題で，特に指示のないものは証明せよという問題。

第 1 回

1. 質点系において，Noether の定理
2. $e^A B e^{-A} = e^{\mathrm{ad} A} B$
3. $\big[[A,B],A\big] = \big[[A,B],B\big] = 0 \Rightarrow e^A e^B = e^{[A,B]} e^B e^A$
4. $e^A e^B = e^C$ (Campbell-Baker-Hausdorff の公式)

第 2 回

1. 位数が 4 の有限群を決定せよ。
2. S_3 の部分群に対して，左剰余類・右剰余類を求めよ。
3. S_4 の共役類を求めよ。
4. 剰余群の定義と性質を述べ，S_3 の不変部分群とそれによる剰余群を求めよ。
5. 有限群について，群の準同型定理

第 3 回

1. ユニタリ表現は完全可約
2. 有限群の表現はユニタリ表現に同値
3. 有限群について，Schur の補題 1,2,Cor.

第 4 回

1. 有限群について，表現行列の直交性，指標の第 1 直交関係
2. 有限群について，指標の第 2 直交関係
3. S_3 について，既約表現・既約指標を求め，指標の直交関係を確かめよ。
4. S_4 について，既約指標を求め，指標の直交関係を確かめよ。
5. 点群・空間群について述べよ。
6. 対称群について述べよ。

第 5 回

1. $Sp(2n)$ と正準変換の関係について述べよ。

第 6 回

1. 紹介した群 G の Lie 代数 $\mathcal{G}$ の例

第 7 回

1. スピン j 表現の表現行列を具体的に書き，$\vec{J}^2$ を計算せよ。

第 8 回

1. $\chi_{j_1}(\theta)\chi_{j_2}(\theta) = \sum_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \chi_j(\theta)$ を直接計算で示せ。
2. $\frac{1}{2} \otimes 1$ の既約分解を，状態を具体的に調べる事によって行え。
3. Wigner-Eckart の定理
4. 3 次元 Laplacian と球面調和関数について，表現論の観点から述べよ。
5. 古典論　$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{A}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$ $(r = |\vec{r}|,\ A = Gm_1m_2)$ に対し，$\vec{p} = m\dot{\vec{r}}$, $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, $L = |\vec{L}|$, $\vec{e} = \frac{1}{A}(\dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \frac{A}{r}\vec{r})$, $e = |\vec{e}|$, $E = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - \frac{A}{r}$, $\ell = \frac{L^2}{Am}$ とおく。
   (1) $\vec{L} \perp \vec{r}, \dot{\vec{r}}$, $\dot{\vec{L}} = \vec{0}$. (つまり $\vec{L}$ は定数ベクトル)　(2) $\dot{E} = 0$. (つまり E は定数)
   (3) $\vec{e} \perp \vec{L}$, $\dot{\vec{e}} = \vec{0}$. (つまり $\vec{e}$ は定数ベクトル)　(4) e を m, A, L, E で表せ。
   (5) $\vec{r} \cdot \vec{e} = \ell - r$.　(6) $\vec{r}$ と $\vec{e}$ のなす角を θ とする時，$r = \ell/(1 + e\cos\theta)$。
6. 量子論　$H = \frac{1}{2m}\vec{p}^2 - \frac{A}{r}$ $(r = |\vec{r}|,\ A = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0})$ に対し，$\vec{L} = \frac{1}{2}(\vec{r} \times \vec{p} - \vec{p} \times \vec{r})$, $\vec{M} = \frac{1}{2m}(\vec{p} \times \vec{L} - \vec{L} \times \vec{p}) - \frac{A}{r}\vec{r}$ とおく。
   (1) $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.　(2) $[L_i, L_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}L_k$.　(3) $[H, \vec{L}] = 0$ (つまり $\vec{L}$ は保存量).
   (4) $[H, \vec{M}] = 0$ (つまり $\vec{M}$ は保存量).　(5) $\vec{L} \cdot \vec{M} = \vec{M} \cdot \vec{L} = 0$.
   (6) $\vec{M}^{\,2} = \frac{2}{m}H(\vec{L}^{\,2} + \hbar^2) + A^2$.　(7) $[L_i, M_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}M_k$.
   (8) $[M_i, M_j] = -i\hbar\varepsilon_{ijk}L_k\frac{2}{m}H$.
7. 前問の続き　以下 $H = E < 0$ なる固有空間上で考える。
   $\vec{M}' = \sqrt{\frac{m}{-2E}}\,\vec{M}$, $\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{L} + \vec{M}')$, $\vec{B} = \frac{1}{2}(\vec{L} - \vec{M}')$ とおく。
   (1) $\vec{A}^{\,2} - \vec{B}^{\,2} = 0$.　(2) $\vec{A}^{\,2} + \vec{B}^{\,2} = -\frac{mA^2}{4E} - \frac{1}{2}\hbar^2$. (注：$A$ と $\vec{A}$ は無関係)
   (3) $[A_i, A_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}A_k$, $[B_i, B_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}B_k$, $[A_i, B_j] = 0$.
   (4) (3) から $\vec{A}^2$, $\vec{B}^{\,2}$ の固有値が分かり，(1) からその関係が分かり，それを (2) に入れるとエネルギー E が分かる。エネルギー準位とその縮退度を求めよ。
8. d 次元表現の表現行列 $t^a = (t^a_{\alpha\beta})$, $[t^a, t^b] = i\varepsilon^{abc}t^c$ と d 個の振動子 c^α, $c^{\alpha\dagger}$ $(\alpha = 1, \ldots, d)$, $[c^\alpha, c^{\beta\dagger}] = \delta^{\alpha\beta}$, $[c^\alpha, c^\beta] = [c^{\alpha\dagger}, c^{\beta\dagger}] = 0$ を考える。$J^a = c^\dagger t^a c = c^{\alpha\dagger}t^a_{\alpha\beta}c^\beta$, $J = c^\dagger \mathbf{1} c = c^{\alpha\dagger}c^\alpha$ とおく。$[J^a, J^b]$, $[J, J^a]$ を計算せよ。
9. 前問で，振動子がフェルミオン的な場合 ($\{c^\alpha, c^{\beta\dagger}\} = \delta^{\alpha\beta}$, $\{c^\alpha, c^\beta\} = \{c^{\alpha\dagger}, c^{\beta\dagger}\} = 0$)，同じ計算を行え。

10. 2 次元の等方的調和振動子 $H = \frac{1}{2m}\vec{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\vec{x}^2 = \hbar\omega(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + 1)$ を考える。前々問で，$t^a = \frac{1}{2}\sigma^a$ (2 次元表現) とする事で $\mathfrak{u}(2)$ が得られるが，Fock 空間 F を $\mathfrak{u}(2)$ で既約分解せよ。また，$\mathrm{tr}_F\, y^J e^{i\theta J^3}$ を計算し，既約分解の様子を見よ。

11. 前問で振動子がフェルミオン的な場合に，同じ計算を行え。

12. $N = 2$ に対して，$H = J\sum_{j=1}^{N-1}\vec{s}_j \cdot \vec{s}_{j+1}$ ($\vec{s} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$, $\vec{\sigma}$ は Pauli 行列，J は定数) の固有値と固有関数を求めよ。$\vec{S} = \sum_{j=1}^{N}\vec{s}_j$ と H が交換する事を示せ。また，固有関数が $S^\pm = S^x \pm iS^y$ の作用でどの様に移り合うかを調べよ。$N = 3$ に対してもやれ。$N = 4, 5, \ldots$ に対しても。

第 9 回

1. 構造定数 f^{abc} を具体的に計算せよ。また，H_i, J^α に対して，交換関係を計算せよ。

2. $W \cong S_3$

第 10 回

1. $2\Lambda_1 + \Lambda_2$ を最高重みとして持つ表現のウェイトと多重度を求めよ。

2. $2\Lambda_1 + 2\Lambda_2$ を最高重みとして持つ表現のウェイトと多重度を求めよ。

第 11 回

1. d^{abc} を具体的に計算せよ。$[c_2, J^a]$, $[c_3, J^a]$ を計算せよ。

2. $3, \bar{3}, 6, \bar{6}, 8$ 表現に対して，c_2, c_3 の値を求めよ。

3. ベクトル表現の指標を直接求め，Weyl の指標公式と一致する事を確かめよ。

4. 随伴表現の指標を直接求め，Weyl の指標公式と一致する事を確かめよ。

5. ベクトル表現で，最高重み状態に $J^{-\alpha_1}$, $J^{-\alpha_2}$, $J^{-(\alpha_1+\alpha_2)}$ を何回も掛けた状態を考え，Weyl 指標公式に現れる交代和を考える事により，3 つだけ状態が残る事を確かめよ。

6. 3 次元の等方的調和振動子を考え，フォック空間 F を $\mathfrak{u}(3)$ で既約分解せよ。また，$\mathrm{tr}_F\, y^J e^{i\theta\cdot h}$ を計算し，既約分解の様子を見よ。

7. 前問で振動子がフェルミオン的な場合に，同じ計算を行え。

第 12 回

1. $\mathfrak{su}(N)$ の定義表現で，$\mathbb{R}^N$ の自然基底 e_i のウェイト μ_i を求めよ。単純ルートを $\alpha_i = \mu_i - \mu_{i+1}$ とした時，基本ウェイト Λ_i を求めよ。

2. $\mathfrak{su}(N)$ の $N, \bar{N}$ 表現に対して，$N \otimes N$, $N \otimes \bar{N}$, $N \otimes N \otimes N$ を既約分解せよ。

3. N 次元の等方的調和振動子を考え，フォック空間 F を $\mathfrak{u}(N)$ で既約分解せよ。また，$\mathrm{tr}_F\, y^J e^{i\theta\cdot h}$ を計算し，既約分解の様子を見よ。

4. 前問で振動子がフェルミオン的な場合に，同じ計算を行え。

5. 単純 Lie 代数の分類定理

6. Coxeter 数，双対 Coxeter 数，指数，Casimir 演算子の次数について述べよ。

第 13 回

1. Poincaré 代数を導け。

2. $L(\Lambda)L(\Lambda')$, $T(a)T(b)$, $L(\Lambda)T(a)L(\Lambda)^{-1}$ を計算せよ。

3. Poincaré 群の表現が小群の表現に帰着することを示せ。

4. $[W_\mu, W_\nu]$, $[P_\mu, W_\nu]$, $[J_{\mu\nu}, W_\rho]$ を計算せよ。

5. γ^μ が Clifford 代数 $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$ を満たす時，$S^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ が Lorentz 代数を満たす事を示せ。

第 14 回

1. 非相対論において，電磁場 (外場とする) 中の荷電粒子のラグランジアンとハミルトニアンを求めよ。

2. Yang-Mills 理論の場の強さ $F^a_{\mu\nu}$ のゲージ変換性と Bianchi 恒等式について述べよ。

第 15 回

1. 素粒子の標準模型のラグランジアンを書き (自発的対称性の破れが起こる前とせよ)，Lorentz 変換とゲージ変換の下での不変性を示せ。

2. Einstein-Hilbert 作用に対して Euler-Lagrange 方程式を書き下せ。

3. d 次元 $(d > 2)$Minkowski 空間の共形変換のなす代数が $\mathfrak{so}(d, 2)$ となる事を示せ。