# 力学 III (小竹)　授業促進のためのノート [ver.1.2.2.4]

全部板書したいところであるが，時間が不足する事と，説明を聞いてもらうために，板書の一部を配布する．$\boxed{\text{板書}}$ と書いた部分では板書するので書き写す様に．このノートを見れば話の順序が分かるので予習に役立ててもらいたい．十分な予習と徹底的な復習をする事．このノートは重要な事柄をまとめたものではない．ミスプリを見つけたら連絡して下さい．

教科書：現在執筆中。来年度には間に合わせたい
準教科書：(←これに沿って進む訳ではない)
・講談社基礎物理学シリーズ 5「解析力学」
　伊藤 克司 著，講談社 (2009 年)
参考書
・ランダウ＝リフシッツ理論物理学教程「力学」
　(増訂第 3 版)
　エリ・デ・ランダウ，イェ・エム・リフシッツ 著
　(広重 徹，水戸 巌 訳)，東京図書 (1974 年)
・裳華房フィジックスライブラリー「解析力学」
　久保 謙一 著，裳華房 (2001 年)
・物理学基礎シリーズ 1「力学」
　米谷 民明 著，培風館 (1993 年)
・現代物理学叢書「力学」
　大貫 義郎，吉田 春夫 著，岩波書店 (2001 年)
・「一般力学」(増訂第 3 版)
　山内 恭彦 著，岩波書店 (1959 年)
・「微分形式による解析力学」(改訂増補版)
　木村 利栄，菅野 礼司 著，吉岡書店 (1996 年)
・新物理学シリーズ 23「ゲージ場の量子論 I」
　九後 汰一郎 著，培風館 (1989 年)
を挙げておくが，数多くの本が出版されているので，本屋や図書館で分かり易そうな本を見つけたらそれを使えばよい。

## この授業で学ぶ事 $\boxed{\text{板書}}$

## 第 1 部：基礎編

## §1　力学 I・II の復習

### §1.1　質点の力学

◎ 質点：質量はあるが大きさのない理想的な物体
● いつ使えるか → 考えている現象に対して大きさを無視できる場合は質点とみなしてよい．
● 注意：何かおかしな事が起こったら，質点と近似した事が良かったのかどうかを吟味する．
● 注意：同じ物体でも考える運動によって質点とみなせたりみなせなかったりする．
例．地球：公転と自転．野球ボール：直球とカーブ．
○ 力：物体 A が物体 B に及ぼす作用
● 何が何に及ぼすものか，大きさ，向き，作用線の位置 (作用点)
● 力はベクトルである．

○ 質点の位置を指定
位置ベクトル $\vec{r} = \vec{r}(t)$ $\boxed{\text{板書 1}}$
自由度 3 (平面上では 2，直線上では 1)
○ 速度・加速度
$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$，速さ $v = |\vec{v}|$
$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$
◎ 運動の法則
○ 第一法則 (慣性の法則)
力が働かない時 (合力がゼロの時)，物体は静止又は等速度運動を続ける．
● 注：慣性の法則が成立する座標系を慣性系という．
● いつ使えるか → 地球表面上の狭い範囲内で起こる運動を取り扱う場合には，地表面に固定した座標系を近似的に慣性系であるとみなしてよい．(厳密には慣性系ではない．フーコーの実験)
○ 第二法則 (運動の法則)
$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ ：(Newton の) 運動方程式
加速度は力に比例する (比例定数が (慣性) 質量)．
● 注：微分方程式である！
● 注：ベクトルの式である！
・運動の独立性：加速度・力を勝手な方向に分解して，それぞれの方向に独立に第二法則を用いてよい．
・空間の等方性：座標軸の向きはどう取ってもよい (自分で都合の良い座標軸を選んでよい)．
● $\vec{F} = \vec{0}$ とすると $m\ddot{\vec{r}} = \vec{0}$. $\therefore \vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$
　つまり第一法則？？
疑問：第一法則は第二法則に含まれてしまうのか？
答：第二法則は慣性系において成立する．
第一法則は第二法則の成立する系を選択する判定条件を述べている．
○ 第三法則 (作用・反作用の法則)
2 つの物体 A，B が力を及ぼし合っている時，A が B から受ける力 $\vec{f}_{\rm AB}$ と B が A から受ける力 $\vec{f}_{\rm BA}$ を比べてみると，大きさは等しく向きは反対 ($\vec{f}_{\rm AB} = -\vec{f}_{\rm BA}$)，作用線は共通 (質点なら直線 AB)．$\boxed{\text{板書 2}}$
○ $\vec{r}$：自由度 3．$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$：3 成分．⇒ OK
$\vec{F}$ が与えられると運動が決まる．
◎ 運動量と角運動量
運動量 $\vec{p} = m\vec{v}$：物体がどの位の勢いで飛んでいるか．
角運動量 $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$：物体がどの位の勢いで回っているか．$\boxed{\text{板書 3}}$
○ 時間変化　$\dot{\vec{p}} = \vec{F}$，$\dot{\vec{l}} = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{N}$.
　$\vec{N}$：(原点に関する) 力のモーメント．
○ 保存則
● $\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p} =$ 一定：運動量保存則
　($\vec{F}$ のある成分 $= 0 \Rightarrow \vec{p}$ のその成分 $=$ 一定)
● $\vec{N} = \vec{0} \Rightarrow \vec{l} =$ 一定：角運動量保存則

($\vec{N}$ のある成分 $=0 \Rightarrow \vec{l}$ のその成分 $=$ 一定)
◎ 仕事と運動エネルギー
○ 仕事 $\boxed{\text{板書 4}}$
○ 仕事率：単位時間当たりの仕事 $P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$
○ 運動エネルギー：$T = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2$
○ 運動エネルギーと仕事の関係式
$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ に $\dot{\vec{r}}\cdot$ して $\int_{t_1}^{t_2} dt$ すると $\boxed{\text{板書 5}}$
◎ 保存力と位置エネルギー
$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ とする．$W = \int_{\mathrm{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ が $\vec{r}_1$，$\vec{r}_2$ だけに依り，途中の道 C に依らない時，$\vec{F}$ を保存力．
$\boxed{\text{板書 6}}$ $U(\vec{r})$：位置エネルギー．
$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(\vec{r}) = -\mathrm{grad}U(\vec{r})$.
$T(t_2) - T(t_1) = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2)$，よって，
$T(t_2) + U(\vec{r}(t_2)) = T(t_1) + U(\vec{r}(t_1))$.
○ $E = T + U$：力学的エネルギー
$E(t_2) = E(t_1)$：エネルギー保存則
もう一度確認 $\boxed{\text{板書 7}}$
● エネルギー積分：$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ に $\dot{\vec{r}}\cdot$ して $\int dt$ する．
◎ 保存則
$\frac{d}{dt}A(t) = 0 \Rightarrow A(t_2) = A(t_1)$
途中の具体的運動を知らなくてよい．
◎ 運動の解析手順
(1) 図を描き，力を書き込む．(大きさ及び向きの分からない力があれば，自分で文字でおく．)
(2) 図を見て，(都合の良い座標軸を決めて) 運動方程式を書き下す．(時間について 2 階の微分方程式である．)
(3) (与えられた初期条件の下で) 運動方程式を解く．(簡単な場合は単純に 2 回積分すればよい．)

### § 1.2　質点系の力学

◎ 質点系
質点を $N$ 個 $\boxed{\text{板書 8}}$
運動方程式 (連立の微分方程式) $\boxed{\text{板書 9}}$ (勿論慣性系)
○ 全運動量と全角運動量
全運動量 $\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$ , $\vec{p}_i = m_i\dot{\vec{r}}_i$
(原点に関する) 全角運動量 $\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{l}_i$ , $\vec{l}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$
● 時間変化は外力 (のモーメント) で決まる．
$\dot{\vec{P}} = \vec{F}$, $\dot{\vec{L}} = \vec{N}$ [レポート 1]．$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{f}_i$：外力，
$\vec{N} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{f}_i$ ：(原点に関する) 外力のモーメント
○ 重心 (質量中心)
重心 G：$\vec{r}_{\mathrm{G}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$ , 全質量：$M = \sum_{i=1}^{N} m_i$
● 重心の運動方程式と全運動量
$M\ddot{\vec{r}}_{\mathrm{G}} = \vec{F}$, $\vec{P} = M\dot{\vec{r}}_{\mathrm{G}}$．[レポート 2]
1 質点と同じ形！
◎ 重心系：重心を原点とし，重心と共に動く座標系．
$\boxed{\text{板書 10}}$
注：重心は加速度運動していても構わない．その場合は重心系は慣性系ではない．
○ $\vec{L} = \vec{L}_{\mathrm{G}} + \vec{L}'$ [レポート 3]
$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i\dot{\vec{r}}_i$：原点に関する全角運動量
$\vec{L}' = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}'_i \times m_i\dot{\vec{r}}'_i$：重心に関する全角運動量
$\vec{L}_{\mathrm{G}} = \vec{r}_{\mathrm{G}} \times M\dot{\vec{r}}_{\mathrm{G}}$：重心の原点に関する全角運動量
○ $\dot{\vec{L}}' = \vec{N}'$, $\vec{N}' = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}'_i \times \vec{f}_i$ [レポート 4]
(重心に関する) 外力のモーメント
注：重心系は (一般には) 慣性系ではないにも拘わらず，$\dot{\vec{L}} = \vec{N}$ と同じ形！
○ 運動エネルギー
$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}m_i\dot{\vec{r}}_i^2 = \frac{1}{2}M\dot{\vec{r}}_{\mathrm{G}}^2 + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}m_i\dot{\vec{r}}_i'^2$ [レポート 5]
第 1 項は重心の運動エネルギー，第 2 項は重心に対する相対運動の運動エネルギー．

### § 1.3　剛体の力学

◎ 剛体：質量と大きさを持つが変形しない理想的な物体
● いつ使えるか → 考えている現象に対して変形を無視できる場合は剛体とみなしてよい．
● 注意：何かおかしな事が起こったら，剛体と近似した事が良かったのかどうかを吟味する．現実の物体は必ず変形する．
● 注意：剛体を細かく分割すると質点系とみなせる．剛体は，質点間の相対距離が不変に保たれた特殊な質点系である．
○ 自由度 $\boxed{\text{板書 11}}$
別法：3 点 A,B,C を指定：$3 \times 3 = 9$．長さ AB,BC,CA は一定：$9 - 3 = 6$.
● 剛体の平面運動 (剛体の各点の運動曲線が定平面に平行な面内に限られる時) $\boxed{\text{板書 12}}$
別法：2 点 A,B を指定：$2 \times 2 = 4$．長さ AB は一定：$4 - 1 = 3$.
◎ 剛体の運動方程式
自由度 6 → 6 つ式が欲しい．剛体は特殊な質点系
○ 並進運動：$M\ddot{\vec{r}}_{\mathrm{G}} = \vec{F} \cdots$ (1)
$M$：剛体の質量，$\vec{r}_{\mathrm{G}}$：剛体の重心，$\vec{F}$：剛体に働く外力
○ 回転運動：$\dot{\vec{L}} = \vec{N} \cdots$ (2)　又は $\dot{\vec{L}}' = \vec{N}' \cdots (2)'$
$\vec{L}$：慣性系の原点に関する角運動量
$\vec{N}$：慣性系の原点に関する外力のモーメント
$\vec{L}'$：重心に関する角運動量
$\vec{N}'$：重心に関する外力のモーメント
○ $\left\{\begin{smallmatrix}(1)\\(2)\end{smallmatrix}\right.$ 又は $\left\{\begin{smallmatrix}(1)\\(2)'\end{smallmatrix}\right.$　式の数は成分で $3 + 3 = 6 \Rightarrow$ OK
$\vec{F}$ と $\vec{N}$ (又は $\vec{N}'$) が与えられると運動が決まる．
○ 剛体に働く一様な重力
剛体に働く一様な重力は，重心に働く全重力 $M\vec{g}$ と等価である．$\boxed{\text{板書 13}}$ [レポート 6]
◎ § 1 で覚える事 $\boxed{\text{板書 14}}$

## § 2　運動の法則の別な表現

### § 2.1　仮想仕事の原理

○ 平衡 (つり合い) $\boxed{\text{板書 1}}$
● $\vec{r}_0$ から微小に任意に $\delta\vec{r}$ だけ動かしたとすると，$\vec{F} = \vec{0}$ より $\vec{F}\cdot\delta\vec{r} = 0$．逆にこの式で $\delta\vec{r}$ は任意なので $\vec{F} = \vec{0}$.
● $\delta\vec{r}$ は，運動方程式に従って $dt$ 後に得られる $d\vec{r} = \dot{\vec{r}}dt$ とは異なり，勝手に取ったものであるから，仮想変位と呼ばれる．$\vec{F}\cdot\delta\vec{r}$ は $\vec{F}$ が仮想変位 $\delta\vec{r}$ に対してなす仕事であり，仮想仕事と呼ばれる．
○ 仮想仕事の原理：$\boxed{\text{板書 2}}$

注：質点系でも同様である．
注：力を束縛力と束縛力でない力に分けて考える事もできるが，変位を束縛条件に矛盾しない様に取れば，(滑らかな) 束縛力は仕事をしないので，力の中に束縛力を含める必要がない．
∘ 保存力を考える．$\vec{F} = -\vec{\nabla}U$.
つり合いは $-\vec{\nabla}U = \vec{0}$ (ポテンシャルの傾きが 0).
勝手な点 $\vec{r}$ からの仮想変位 $\delta\vec{r}$ で，$\delta U(\vec{r}) = U(\vec{r}+\delta\vec{r}) - U(\vec{r}) = \vec{\nabla}U(\vec{r})\cdot\delta\vec{r} + O((\delta\vec{r})^2) = -\vec{F}\cdot\delta\vec{r}$.
仮想仕事の原理の言っている事：平衡点 $\vec{r}_0$ は $\delta U(\vec{r}_0) = 0$ となる点である．
∘ 平衡点の安定性 $\boxed{板書\ 3}$
∘ 例 $\boxed{板書\ 4}$

### § 2.2 d'Alembert の原理

∘ $\boxed{板書\ 5}$
「$\vec{F}$ と慣性抵抗 $-m\ddot{\vec{r}}$ がつり合っている」と考える：d'Alembert の原理
1 つの平衡状態が継続するのではなく，次々と変わった平衡状態が実現されて行く．
∘ 仮想仕事の原理と組み合わせて，$\boxed{板書\ 6}$
注：質点系でも同様である．
注：変位を束縛条件に矛盾しない様に取れば，(滑らかな) 束縛力は仕事をしないので，力の中に束縛力を含める必要がない．
∘ 例：円錐振り子 $\boxed{板書\ 7}$

### § 2.3 Hamilton の原理

∘ 運動方程式 $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ を満たす実際に起こる運動 $\vec{r}(t)$. $\boxed{板書\ 8}$
$T = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2$. $\int_{t_1}^{t_2} T dt$ はある決まった値になる．
$C$ を少しずらす (仮想変位)：$\vec{r}' = \vec{r}+\delta\vec{r}$. 但し $\delta\vec{r}(t_1) = \delta\vec{r}(t_2) = \vec{0}$. $\boxed{板書\ 9}$
$T' = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}'^2$, $\int_{t_1}^{t_2} T' dt$ を考える．その差は $\boxed{板書\ 10}$
注：束縛条件がある場合でも，仮想変位を束縛条件を満たす様に取れば，(滑らかな) 束縛力は仕事をしないので，同じ形の式が成立する．
∘ 今示したのは，運動方程式 ⇒ Hamilton の原理
∘ 逆に，Hamilton の原理 ⇒ 運動方程式
$\because$ $\delta\vec{r}(t_1) = \delta\vec{r}(t_2) = \vec{0}$ なる仮想変位に対して，
$\int_{t_1}^{t_2} \delta T dt = -\int_{t_1}^{t_2} m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\cdot\delta\vec{r}\,dt$ なので，$\boxed{板書\ 11}$
$\delta\vec{r}$ は任意なので $m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$. □
注：束縛条件がある場合も示す事ができる．
∘ よって，運動方程式 ⇔ Hamilton の原理
注：Newton の運動方程式は時間に関する微分方程式であり，それは各時刻毎の速度変化率から運動を決める．一方 Hamilton の原理は有限の時間間隔の間の軌道の全体について述べている．
∘ 保存力の場合 $\boxed{板書\ 12}$
注：後で説明する Maupertuis の原理を最小作用の原理と呼ぶ本もある．この授業では Hamilton の原理を作用原理と呼ぶ．
∘ $\delta S = 0$ ⇒ 運動方程式
ある関数の積分に対して，仮想変位を考えて，微分方程式を得る．変分原理と言う．
∘ Hamilton の原理 (作用原理) ⇒ 運動方程式 ⇒ 運動が決まる，$\vec{r}(t)$：(i) 軌道の形，(ii) 時間依存性．
軌道の形だけを求めたい場合 (時間依存性を問わない)：Maupertuis の原理 (⇒ 後で)
◎ § 2 で覚える事 $\boxed{板書\ 13}$

## § 3 数学的準備：変分法

### § 3.1 汎関数

◎ 写像：集合 $A$ から集合 $B$ への対応の規則で，集合 $A$ の各要素に対して集合 $B$ の要素が各々 1 つ定まるもの．
$\boxed{板書\ 1}$
◎ 関数：数の集合から数の集合への写像のこと．
$\boxed{板書\ 2}$
∘ 例 ・$\boxed{板書\ 3}$ この $f$ は連続関数.
・$\boxed{板書\ 4}$ この $f$ は無理数で連続，有理数で不連続.
◎ 汎関数：関数の集合から数の集合への写像のこと．
$\boxed{板書\ 5}$
注：$f(x)$ は関数エフエックスという意味と，$x$ を関数 $f$ で写した値という意味がある．前者の意味では $x$ はダミーな変数であり，対応の規則という関数自体を表すためには $x$ と書かない方がよく，$f(\cdot)$ と書いている．
・汎関数は"関数の関数"である．
∘ 例 ・$C([a,b]) = \{[a,b]$ 上の実数値連続関数 $\}$ $\boxed{板書\ 6}$
・$\boxed{板書\ 7}$
∘ 汎関数は「関数の形」に数を対応させる規則である．
・関数と汎関数の記号の区別をハッキリさせない本が多いが (よく理解していればどちらを扱っているかが分かり混乱する事は無いので，簡単の為にそうしているのであり，目クジラを立てる程の事ではない)，(よく理解せずにいい加減にされると困るので) この授業では (出来るだけ) しっかりと使い分けて行く．

### § 3.2 変分法

◎ 関数の変化，変化率 (微分)
$y = f(x)$
変数の値を少し変化させる：$x + \Delta x$ ($\Delta x$：微小)
その時，$y$ の変化は $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$.
$\Delta x$ の 1 次まで残す．2 次以上は十分に小さいので無視する．
∘ 例
• $f(x) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$
$\Delta y = 2(x-1)\Delta x + (\Delta x)^2 = 2(x-1)\Delta x + \cdots$. $\Delta y = 0$ となるのは $x = 1$. $\boxed{板書\ 8}$
$(\Delta x)^2$ まで残すと，$x = 1$ で $\Delta y = (\Delta x)^2 > 0$.
• $f(x) = x^3 - 3x$
$\Delta y = 3(x^2-1)\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 = 3(x^2-1)\Delta x + \cdots$. $\Delta y = 0$ となるのは $x = \pm 1$. $\boxed{板書\ 9}$
$(\Delta x)^2$ まで残すと, $x = 1$ で $\Delta y = 3(\Delta x)^2 > 0$, $x = -1$ で $\Delta y = -3(\Delta x)^2 < 0$.
• $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2-1)^2$
$\Delta y = 4x(x^2-1)\Delta x + 2(3x^2-1)(\Delta x)^2 + 4x(\Delta x)^3 + (\Delta x)^4 = 4x(x^2-1)\Delta x + \cdots$. $\Delta y = 0$ となるのは $x = \pm 1, 0$. $\boxed{板書\ 10}$
$(\Delta x)^2$ まで残すと，$x = \pm 1$ で $\Delta y = 4(\Delta x)^2 > 0$,
$x = 0$ で $\Delta y = -2(\Delta x)^2 < 0$.
• $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = (x-1)^3 + 2$
$\Delta y = 3(x-1)^2\Delta x + 3(x-1)(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 = 3(x-1)^2\Delta x + \cdots$. $\Delta y = 0$ となるのは $x = 1$. $\boxed{板書\ 11}$
$(\Delta x)^2$ まで残すと，$x = 1$ で $\Delta y = 0$. $(\Delta x)^3$ まで残すと，$x = 1$ で $\Delta y = (\Delta x)^3 \gtrless 0$.

○ 平均の変化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
"瞬間"の変化率 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}$：微分 $\boxed{\text{板書 12}}$
○ 独立変数が複数個ある場合も同様である．
$y=f(x_1,\cdots,x_n)$．微分 → 偏微分
◎ 汎関数の変化，変化率 (汎関数微分)
積分汎関数を考える．
$y=y(x)$, $y'=\frac{dy}{dx}$, $I=\int_a^b F(y(x),y'(x),x)dx$.
$I$ は $y=y(\cdot)$ という関数形によって値が決まるので汎関数：$I=I[y]=I[y(\cdot)]$.
$F$ は，$y$ の $x$ における値 $y(x)$ と，$y'$ の $x$ における値 $y'(x)$ と，$x$ という値，3 つを独立変数とする関数．
○ "変数" $y(\cdot)$ の "値" を少し変化させる：$y+\delta y=y_{\rm new}$ ($\delta y$：微小)．$y_{\rm new}(x)=y(x)+\delta y(x)$．$\delta y$ を変分と言う．
以下では，$\delta y(a)=\delta y(b)=0$ という場合を考える．
その時，$I$ の変化は $\boxed{\text{板書 13}}$
○ $I$ が停留する，つまり $\delta I=0$ となる "点" (今の場合は関数 $y(x)$) は，$\delta y$ が任意であるから，$\boxed{\text{板書 14}}$ (Euler の微分方程式) を満たさなければならない．逆にこれを満たす $y$ に対して $\delta I=0$ となる．
○ 独立 "変数" $y(\cdot)$ が複数個ある場合も同様である．
$\boxed{\text{板書 15}}$
○ $\delta I=0$ は極値や変曲．どれになっているかは $\delta y$ の 2 次 (以上) をみる必要がある．
○ $\delta y$ を微小だが有限として，平均の変化率 $\frac{\delta_{\text{有限}} I}{\delta_{\text{有限}} y}$，"瞬間" の変化率 $\frac{\delta_{\text{有限}} I}{\delta_{\text{有限}} y}\xrightarrow{\delta_{\text{有限}} y\to\text{“0”}}\frac{\delta I}{\delta y}$ ：汎関数微分 $\boxed{\text{板書 16}}$
◎ 例
○ 例 1 平面内にある 2 定点 A, B を結ぶ曲線で長さが極小なもの． $\boxed{\text{板書 17}}$
$x=a$ で $y=c$, $x=b$ で $y=d$ より，$y=\frac{d-c}{b-a}x+\frac{ad-bc}{a-b}$.
○ 例 2 円柱面上にある 2 定点 A, B を結ぶ円柱面上の曲線で長さが極小なもの．円柱座標 $(r,\theta,z)$
$(r,\theta,z)$ と $(r+\Delta r,\theta+\Delta\theta,z+\Delta z)$ の間の距離の 2 乗は $(\Delta\ell)^2=(\Delta r)^2+(r\Delta\theta)^2+(\Delta z)^2$. $\boxed{\text{板書 18}}$
$c_1,c_2$ は A, B の位置を具体的に与えれば定まる．
● 球面上なら大円に沿った 2 つの道が極小値． $\boxed{\text{板書 19}}$
○ 例 3 鉛直面内にある 2 定点 A, B を滑らかな針金で結び，一様な重力の下で，A から初速度 0 で滑らせる時，B に達するまでの時間が最小になる針金の曲線．(最速降下曲線) $\boxed{\text{板書 20}}$
○ '保存則' $\boxed{\text{板書 21}}$
● これを用いると例 3 は $\boxed{\text{板書 22}}$
○ 例 4 一様な重力下で，滑らかな一様なひもの両端を固定する．つり合っている時のひも形．
$\boxed{\text{板書 23}}$ 線密度を $\rho$ とする．
(1) 力のつり合いから求める． $\boxed{\text{板書 24}}$
(2) 変分法を用いる．位置エネルギーが最小になってつり合っていると考える． $\boxed{\text{板書 25}}$ $\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}-\frac{\partial F}{\partial y}=0$ を計算していけばよいが，$F$ が $x$ に陽に依っていないので，$\boxed{\text{板書 26}}$

### § 3.3 Lagrange の未定乗数の方法

◎ 条件付きの極値
$x,y$：独立変数．$f=f(x,y)$ の極値を求める．
但し $x$ と $y$ に $\phi(x,y)=0$ という拘束条件を付ける．
○ 例 $f=f(x,y)=x+y$, 条件 $x^2+y^2=1$ ($\phi(x,y)=x^2+y^2-1$)
● 方法 (1)：拘束条件を明からさまに解く． $\boxed{\text{板書 27}}$
拘束条件が簡単な場合にはこの様に拘束条件を解けるが，一般には解けない．
● 方法 (2)：拘束条件を明からさまに解かない．
・図を使ってみる． $\boxed{\text{板書 28}}$
しかしこれも拘束条件 $\phi=0$ や関数 $f$ が簡単な場合にしか実行できない．
・Lagrange の未定乗数の方法
$\boxed{\text{板書 29}}$ とおくと，$\phi(x,y)=0$ を満たす $(x,y)$ に対して，$f(x,y)$ がある点で極値を取るならば，その点で $\boxed{\text{板書 30}}$ を満たす．
上の例では $\boxed{\text{板書 31}}$
○ 独立変数の数, 拘束条件の数が複数個ある場合も同様である．独立変数 $x_1,\ldots,x_n$，拘束条件 $\phi_i(x_1,\ldots,x_n)=0$ ($i=1,\ldots,m$) に対して，$f(x_1,\ldots,x_n)$ が極値を取る点では $\boxed{\text{板書 32}}$
○ 汎関数でも同様である．
例：$y=y(x)$, $I=I[y]=\int_a^b F(y,y',x)dx$ の停留値を求める．但し，$y$ は $J[y]=c$(定数) を満たすという条件を付ける．ここで $J[y]=\int_a^b G(y,y',x)dx$ とする．
$K=K[y]=I[y]+\lambda J[y]=\int_a^b(F+\lambda G)dx$ とおくと，$J[y]=c$ を満たす $y$ に対して，$I$ がある "点" $y$ で停留値を取るならば，その "点" で $\delta K=0$ を満たす．
($K'=K-\lambda c=I[y]+\lambda(J[y]-c)$ とおくと，$\delta K'=0$ 及び $\frac{\partial K'}{\partial\lambda}=0$．)
● 例：前にやったひもの形で，ひもの長さを $\ell$ とする．
$\boxed{\text{板書 33}}$
◎ § 3 で覚える事 $\boxed{\text{板書 34}}$

## § 4 作用原理

◎ 作用原理：(作用と呼ばれる量 (座標の汎関数) が存在し，端点を固定する変分の下で，) 作用が停留値を取る様に運動が起こる．
注：最小作用の原理とよく言うが，要請するのは作用が停留値を取るという事だけで，最小である必要はない．
最小作用の原理と言っていると最小になると誤解する人がいるので，この授業では作用原理と呼ぶ。
○ 様々な物理法則が作用原理の形で述べる事ができる．
(基礎となる物理法則は全てそうである．)
○ 作用はラグランジアンと呼ばれる量を時間で積分したものであり，力学変数の汎関数である． $\boxed{\text{板書 1}}$
○ 作用原理は $\delta S=0$ という事であり，変分法で得られる Euler の微分方程式が運動方程式 (Euler-Lagrange 方程式) を与える．
◎ 例
(1) 力学 (Hamilton の原理) $\boxed{\text{板書 2}}$
(2) 光学 (Fermat の原理)
光は所要時間が停留値を取る径路を通る．
注：所要時間が最小となる径路と述べられる事が多いが，最小である必要はない．
$\boxed{\text{板書 3}}$ 光学的距離 = 距離×屈折率, 所要時間 $=\frac{\text{距離}}{\text{速さ}}=\frac{\text{距離}}{\frac{c}{n}}=\frac{\text{光学的距離}}{c}$．よって光は光学的距離が停留値を取る径路を通る．光学的距離 $=\int n d\ell$，$\delta\int n d\ell=0$.
・例：A から B へ向かう光 $\boxed{\text{板書 4}}$
(3) 自由粒子 (相対論)

質点が運動した軌跡は線：世界線 $\boxed{\text{板書 5}}$
世界間隔が停留値を取る様に運動が起こる．
平坦な時空 (特殊相対性理論) では直線運動．
曲がった時空 (一般相対性理論の意味で重力を受けている！) では測地線．
(4) 電磁気学
基礎方程式は Maxwell 方程式．
これは電場や磁場などの場 (質点系で言えば無限自由度！) に対する連立の偏微分方程式．
ポテンシャル (ゲージ場) を力学変数として作用を書く事ができて，それから得られる運動方程式 (Euler-Lagrange 方程式) が Maxwell 方程式を与える．
◎ 作用を実際に計算してみる．(1 自由度)
(1) 自由粒子
$t = t_1$ で $x = a$，$t = t_2$ で $x = b$ とする． $\boxed{\text{板書 6}}$
別の関数 $\tilde{x}(t)$ に対して $S$ を計算してみる．
(ア) $\boxed{\text{板書 7}}$ 等号は $c = x_{解}(t_3)$，つまり $\tilde{x}(t) = x_{解}(t)$．
(イ) $\boxed{\text{板書 8}}$ 等号は $c = 0$，つまり $\tilde{x}(t) = x_{解}(t)$．
・この場合，$S[x_{解}]$ は最小値である．
(2) 調和振動子 $\boxed{\text{板書 9}}$
(i) $t = t_1 = 0$ で $x = A$，$t = t_2 = \frac{2\pi}{\omega}$ で $x = A$ とする． $\boxed{\text{板書 10}}$
別の関数 $\tilde{x}(t)$ に対して $S$ を計算してみる．
(ア) $\boxed{\text{板書 11}}$ $S[\tilde{x}] = (\frac{4}{\pi} - \frac{\pi}{3})m\omega A^2 \geq 0 = S[x_{解}]$
(イ) $\boxed{\text{板書 12}}$ $S[\tilde{x}] = -\pi m\omega A^2 \leq 0 = S[x_{解}]$
・この場合，$S[x_{解}]$ は最小値ではなく停留値 (ある方向に対しては極小値) である．
(ii) $t = t_1 = 0$ で $x = 0$，$t = t_2 = \frac{2\pi}{\omega}$ で $x = 0$ とする．
$\boxed{\text{板書 13}}$
別の関数 $\tilde{x}(t)$ に対して $S$ を計算してみる．
(ア) $\boxed{\text{板書 14}}$ $S[\tilde{x}] = (\frac{4}{\pi} - \frac{\pi}{3})m\omega a^2 \geq 0 = S[x_{解}]$
(イ) $\boxed{\text{板書 15}}$ $S[\tilde{x}] = -\frac{3\pi}{8}m\omega a^2 \leq 0 = S[x_{解}]$
・この場合，$S[x_{解}]$ は最小値ではなく停留値 (ある方向に対しては極小値) である．
(iii) $t = t_1 = 0$ で $x = 0$，$t = t_2 = \frac{2\pi}{\omega}$ で $x = A \neq 0$ とする． $\boxed{\text{板書 16}}$
○ 作用原理は，$t = t_1$ と $t = t_2$ での $x$ の値を与えた時に (境界条件を与えるという)，その境界条件を保つ変分に対して作用が停留値を取る様に運動が起こるというものである．その境界条件が実際に実現可能かという事は気にしていない．
◎ § 4 で覚える事 $\boxed{\text{板書 17}}$

## § 5　Lagrange 形式の力学

### § 5.1　Lagrange 形式

◎ 1 質点 $\boxed{\text{板書 1}}$
● 運動方程式 (Euler-Lagrange 方程式) ⇐ 作用原理より $\boxed{\text{板書 2}}$
● $L = L(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$ の場合 ($t$ に陽に依らない場合) $\boxed{\text{板書 3}}$
◎ 質問：運動方程式として結局，Newton の運動方程式が得られるのであれば，ラグランジアンなどという難しげなものを持ち出さなくてもよいのではないか？
回答：これから説明して行くが，ラグランジアンには御利益が沢山ある．
● 一般化座標を用いる事により
・運動方程式を書き下すのが容易．・近似が容易
● ラグランジアン (作用) には運動方程式以上の情報が含まれている！
・対称性と保存則．・Hamilton 形式へ．・量子論へ
◎ 一般化座標
1 質点 $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ：Descartes 座標．長さの次元．
位置が指定できれば何でもよい．
例：円柱座標 $(r, \theta, z)$，空間極座標 $(r, \theta, \varphi)$
一般に $(q_1, q_2, q_3)$ ：一般化座標 (一般座標，広義座標)．
長さの次元を持っていなくても構わない．
自由度 3(拘束条件があれば自由度の数は減る)
例：単振子 $\boxed{\text{板書 4}}$
○ 空間内の $N$ 質点 $\vec{r}_1, \cdots, \vec{r}_N$ 自由度 $3N$
$\Rightarrow (q_1, \cdots, q_{3N})$
$h$ 個の拘束条件があれば $(q_1, \cdots, q_f)$，$f = 3N - h$
運動方程式を得るには，ラグランジアン (作用) を Descartes 座標ではなく一般化座標を用いて表し，作用原理を用いればよい．
◎ 簡単のために 1 自由度を考えて行くが，多自由度の場合も同様である．
$q = q(t)$, $L = L(q, \dot{q}, t)$，$S = S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt$．
○ 復習のために運動方程式を導いてみる． $\boxed{\text{板書 5}}$
○ 運動方程式 $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \dfrac{\partial L}{\partial q} = 0$ を与えるラグランジアンは一意的ではない．
$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt}W(q, t)$ も同じ運動方程式を与える． ☺ $\boxed{\text{板書 6}}$ $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ という変分に対して，$\delta S' = \delta S$ である．よって，条件 $\delta S' = 0$ と条件 $\delta S = 0$ は一致する． □
別証： $\boxed{\text{板書 7}}$
○ $L = L(q, \dot{q})$ の場合 ($t$ に陽に依らない場合) $\boxed{\text{板書 8}}$
○ 質問：$q = q(t)$ を与えると $\dot{q} = \dot{q}(t)$ も決まるのに，ラグランジアンは何故 $q$ と $\dot{q}$ を独立変数とする関数と思っているのか？
答：Newton の運動方程式 $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ は時間についての 2 階の微分方程式であり，ある時刻での $\vec{r}$ と $\dot{\vec{r}}$ の値 (初期条件) を与えれば ($\vec{r}$ と $\dot{\vec{r}}$ の値は独立に与えられる！)，その後の $\vec{r}(t)$ が決定される．ラグランジアンは各時刻毎にその時刻での位置と速度の関数であり，一つの時刻毎に考えれば位置と速度は初期条件として独立に与えられるからである．
○ 運動エネルギー $T = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2$
$\dot{\vec{r}}^2$ が分かればよい． $\boxed{\text{板書 9}}$
長さの 2 乗が分かればよい． $\boxed{\text{板書 10}}$
○ $L(= T - U)$ の次元 = エネルギーの次元
$x$：長さの次元．$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$：運動量
$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$：一般化運動量．その次元は $\frac{\text{エネルギーの次元}}{\dot{q}\text{ の次元}}$．
$q$ が角度 (無次元) なら $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ は角運動量の次元．実際，角運動量という意味がある．
● $L = L(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t)$ がある $q_j$ に依らなければ ($q_j$ を循環座標という)， $\boxed{\text{板書 11}}$ 一般化運動量の保存則

### § 5.2　具体例

#### § 5.2.1　様々な例

ラグランジアンを書き，Euler-Lagrange 方程式を書き下してみよう．
(1) 自由落下 $\boxed{\text{板書 12}}$

(2) 単振動 $\boxed{板書\ 13}$
(3) 単振子 $\boxed{板書\ 14}$
(4) 2 質点の振り子 $\boxed{板書\ 15}$
(5) 2 重平面振子 $\boxed{板書\ 16}$
(6) 二体問題 $\boxed{板書\ 17}$
(7) 惑星の運動 $\boxed{板書\ 18}$
(8) 実体振り子 $\boxed{板書\ 19}$

#### § 5.2.2 微小振動

◎ 質点系の振動
● 2 質点 $\boxed{板書\ 20}$
$Q_1$ と $Q_2$ が分離した！ それぞれ単振動 (規準振動).
$Q_1, Q_2$：規準座標. $x_1, x_2$ は規準振動の重ね合わせで表される：$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}}(Q_1 + Q_2)$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}}(Q_1 - Q_2)$.
● $n$ 質点 $\boxed{板書\ 21}$ $\alpha_i$ と $P$ は三角関数を用いて具体的に書き下せる．やってみよ．
ここではいきなり対角化の手法を用いたが，次の様に考えて行くのも常套手段. $\boxed{板書\ 22}$
◎ 微小振動
$\boxed{板書\ 23}$
○ 多自由度 $(q_1, \ldots, q_f)$
$q_i = q_{i0}$ で $U$ が極小値を取るとする．$q_i = q_{i0}$ のまわりでの微小な運動 (振動) を考える. $\boxed{板書\ 24}$
$Q_i$ は角振動数 $\omega_i$ の単振動をする．規準振動．規準座標.
● 別法 $\boxed{板書\ 25}$
○ 例：2 重平面振子 (§ 5.2.1 例 (5)) $\boxed{板書\ 26}$
◎ § 5 で覚える事 $\boxed{板書\ 27}$

## § 6 Hamilton 形式の力学

### § 6.1 正準方程式

○ $\boxed{板書\ 1}$
速度よりも運動量の方が物理的に重要な意味がある.
例・$\dot{\vec{p}} = \vec{F}$ は質量が変化する場合や相対論でも成立.
・質点系の全運動量 (保存則).
○ $\boxed{板書\ 2}$
$\dot{q}_i$ よりも $p_i$ の方が重要な意味があるので，独立変数として $\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}$ の代わりに $\{q_j\}, \{p_j\}$ を選ぼう.
注：$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right) \neq 0$ の時 ($L$ は非特異という)，$\dot{q}_i$ を $\{q_j\}, \{p_j\}$ の関数として表す事ができる.
$L(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t)$ と書くと面倒なので $L(q, \dot{q}, t)$ と書く事にする.
○ $\boxed{板書\ 3}$
この様な変数の取り換えは Legendre 変換と呼ばれる.
変数を動かしてみると，$\boxed{板書\ 4}$
・$q_i, p_i$ を正準変数といい，互いに正準共役という．$q_i$ は正準座標，$p_i$ は正準運動量または $q_i$ に共役な運動量.
・$p_i, q_i$ を座標とする $2f$ 次元の空間を相空間 (phase space) という．$q_i$ を座標とする $f$ 次元の空間を配位空間 (configuration space) という.
○ $\boxed{板書\ 5}$
・ある時刻での $\{q_j\}$ と $\{p_j\}$ の値が与えられると，その後の $\{q_j\}$ と $\{p_j\}$ は Hamilton の方程式に従って $t$ の関数として決まり，時間の経過と共にこれらは相空間の中に軌跡を描く.
・$\det\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}\right) \neq 0$ の時，$p_i$ を $\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}$ の関数として表す事ができ，Legendre 変換によってラグランジアンに戻れる.
・よって，$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right) \neq 0$, $\det\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}\right) \neq 0$ の下で，Euler-Lagrange 方程式と Hamilton の方程式は運動方程式として同等である！
○ 例：$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r})$ $\boxed{板書\ 6}$
○ $\boxed{板書\ 7}$ $\therefore H$ が $t$ に陽に依っていなければ $\frac{dH}{dt} = 0$, つまり $H =$ 一定. $\boxed{板書\ 8}$
○ $L = L(q, \dot{q}, t)$ がある $q_j$ に依らなければ (循環座標), $H = H(p, q, t)$ もその $q_j$ に依らないので，$\boxed{板書\ 9}$
◎ 具体形
1 質点 $\boxed{板書\ 10}$
○ Descartes 座標 $(x, y, z)$ $\boxed{板書\ 11}$
○ 円柱座標 $(r, \theta, z)$ $\boxed{板書\ 12}$
○ (空間) 極座標 $(r, \theta, \varphi)$ $\boxed{板書\ 13}$
$U = U(r)$ ならば $H = T + U$ で $\varphi$ は循環座標.
$p_\varphi = mr^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi} =$ 一定 $\leftarrow z$ 軸のまわりの角運動量
◎ 具体例
○ ハミルトニアンを導き，正準方程式を書き下してみよう．§ 5.2.1 例 (1)-(8) $\boxed{板書\ 14}$
§ 5.2.2 の 2 質点の例 $\boxed{板書\ 15}$
○ 調和振動子 (1 自由度) $\boxed{板書\ 16}$
◎ Poisson 括弧
○ $f = f(p, q, t)$ に対して $\boxed{板書\ 17}$
$f = f(p, q, t)$ と $g = g(p, q, t)$ に対して，Poisson 括弧を $\boxed{板書\ 18}$ と定義する．すると $\boxed{板書\ 19}$
時間発展はハミルトニアン $H$ で記述される.
注：$\{f, g\}_{\mathrm{PB}} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right)$ と定義 (つまり授業での定義の $-1$ 倍) する方が標準的であろうが，(第 2 部で紹介する理由によって) この定義を採用する.
注：(混乱が生じない場合は)$\{f, g\}_{\mathrm{PB}} = \{f, g\}$ と書く事にする.
○ $f = f(p, q, t)$ が保存量：$\frac{df}{dt} = 0 \Leftrightarrow \{H, f\}_{\mathrm{PB}} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$.
$f$ が時間に陽に依らない場合は，保存量 $\Leftrightarrow \{H, f\}_{\mathrm{PB}} = 0$.
$f = H$ に取ると $\{H, H\}_{\mathrm{PB}} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$ なので，時間に陽に依らない時は $H =$ 一定，エネルギー保存.
○ $\{f, g\}_{\mathrm{PB}}$ の性質
(i) 交代性 $\boxed{板書\ 20}$
(ii) (双) 線型性 $\boxed{板書\ 21}$
(iii) Leibniz 則 $\boxed{板書\ 22}$
(iv) 基本 Poisson 括弧 $\boxed{板書\ 23}$
(v) Jacobi 恒等式 $\boxed{板書\ 24}$
☺ $\boxed{板書\ 25}$ [レポート 7] □
○ $f = f(p, q, t)$, $g = g(p, q, t)$ が保存量 $\Rightarrow \{f, g\}$ も保存量 ☺ $\boxed{板書\ 26}$ □
○ 時間発展をこんな形にも書ける. $\boxed{板書\ 27}$
◎ 具体例
○ 調和振動子 $\boxed{板書\ 28}$
○ 角運動量 $\boxed{板書\ 29}$
◎ 作用原理
簡単のため 1 自由度 $\boxed{板書\ 30}$

### § 6.2 正準変換

○ 板書 31

座標変換を行って方程式を解き易い形に書き換える．

板書 32

$q_i'$ が座標である (つまり位置がこれで指定される) ためには，$\det \frac{\partial q_i'}{\partial q_j} \neq 0$ かつ有限でなければならない．

・Newton の運動方程式は点変換の下で不変ではない (つまり頑張って方程式を書き直さなければならない) が，Euler-Lagrange 方程式は不変である．つまり新しいラグランジアン $L'$ を $L'(q', \dot{q}', t) = L(q, \dot{q}, t)$ と定義すると ($L(q, \dot{q}, t)$ に $q_i$ を $q_j'$ で表した式を代入するという事)，$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} L'(q', \dot{q}', t) dt$ であるから，$\frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i'} - \frac{\partial L'}{\partial q_i'} = 0$ である．

◎ 板書 33

変数は座標 $\{q_i\}$ と運動量 $\{p_i\}$

・$\{q_i\}$ を混ぜる点変換だけではなく，$\{q_i\}$ と $\{p_i\}$ を混ぜる変換をも考える事ができるので，方程式を解き易い形に書き換える可能性が増す． 板書 34

・一般の変換の下では正準方程式は形を変えてしまう (形が変わってしまってもとにかく解ければ構わないのだが，それでは見通しが悪い)．

○ それでは正準方程式が形を変えない様な変換，つまり新しい変数での運動方程式が 板書 35

となるような変換を考えてみる．しかしこれは，上で「点変換で Euler-Lagrange 方程式が不変」と述べた性質に比べて，弱い条件である．点変換では作用が不変で，作用原理から Euler-Lagrange 方程式が同じ形になったのであった．正準方程式が形を変えないというだけでは作用がどうなっているか分からず，$q$ と $p$ が「正準変数」という意味付けがつくかどうか分からないのである．

○ $S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int (\sum_i dq_i p_i - dt\, H)$．$q$ と $p$ の変分で，$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ なるものを考える．

作用原理 $\delta S = 0$ が $(p, q)$ でも $(p', q')$ でも同じ式 ⇔ 板書 36

この様な変換 $(p, q) \to (p', q')$ を正準変換という．

$p, q, p', q'$ があるので色々に思えるが，$F = F(q, q', t)$ と考えると簡単で，その時 板書 37

注：$t$ は変わっていない．$t$ はパラメータとして入っているだけである．つまり正準変換は運動方程式とは無関係な変換である．

注：「正準方程式の形を変えない変換を正準変換という」と書いている本が数多くあるが，それは誤りである．(その様な本では，その直後にもう一度間違えて正しい道筋に戻ってきて，その後の話に影響はない (事が多い)．)

正準変換は「正準方程式の形を変えない変換」の内の特別なものである．例： 板書 38

◎ 変換の母関数 (Legendre 変換で移り合う)

○ $F = F(q, q', t)$ 板書 39

○ $\Phi = \Phi(q, p', t)$ 板書 40

○ $\Psi = \Psi(p, q', t)$ 板書 41

○ $\Theta = \Theta(p, p', t)$ 板書 42

・$(p', q')$ の選びかたによっては，$F, \Phi, \Psi, \Theta$ のうち一部に意味が無いかも知れない．

○ 例

・恒等変換 板書 43

・座標 ↔ 運動量 板書 44

・点変換 板書 45

・(1) $\Phi(q, p') = q_1 p_1' + q_1 p_2' + q_2 p_2'$ の正準変換．(2) $H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$ に対して，$F(q, q') = \frac{1}{2}m\omega q^2 \cot q'$ の正準変換 板書 46

◎ 正準変換と Poisson 括弧

正準変数 $p_i, q_i$ $(i = 1, \ldots, f)$ をまとめて $z = \binom{p}{q}$ と書こう：$z^n$ $(n = 1, \ldots, 2f)$，$z^i = p_i$, $z^{f+i} = q_i$ $(i = 1, \ldots, f)$．すると Poisson 括弧は 板書 47 と表され，基本 Poisson 括弧は $\{p_i, q_j\} = \delta_{ij}$, $\{p_i, p_j\} = \{q_i, q_j\} = 0$ ⇔ $\{z^n, z^m\} = J^{nm}$ である．

$(p, q) \to (p', q')$ 正準変換 板書 48

Poisson 括弧は正準変数 $(p, q)$ の取り方には依存しない！

逆にそうならば， 板書 49 よって ($G_n(z)$ の定義域が単連結ならば) $G_n = \frac{\partial G}{\partial z^n}$ となる $G$ が存在するので，正準変換である．

まとめると，$(p, q) \to (p', q')$ が正準変換 ⇔ 板書 50

○ 例 $q' = \sqrt{2q}\, e^k \cos p$, $p' = \sqrt{2q}\, e^{-k} \sin p$ は正準変換 板書 51

◎ 正準変換群

板書 52 正準変換全体は群をなす．正準変換群．

一次変換を考えてみる． 板書 53

◎ § 6 で覚える事 板書 54

## 第 2 部：発展編

## § 1　端点の座標・時間の関数としての作用

◎ 端点の座標・時間の関数としての作用

簡単のため 1 自由度 板書 1

運動方程式の解 $q_{解}$ に対する作用汎関数の値 $S[q_{解}]$ は，$t_1$, $q^{(1)}$, $t_2$, $q^{(2)}$ の値を与えると決まるので，これらの値の関数である．この関数を (ちょっと紛らわしいが) 再び $S$ と書こう．つまり $S = S(q^{(2)}, t_2; q^{(1)}, t_1)$ と書こう．この $S$ は本当の軌跡に沿った運動を特徴付ける量であると考えられる．

○ $t_1, t_2$ を固定して $q^{(1)}, q^{(2)}$ を変化させる． 板書 2

○ $q^{(1)}, q^{(2)}$ を固定して $t_1, t_2$ を変化させる． 板書 3

○ 合わせて 板書 4

この式は，始点が与えられた時に，終点は右辺が全微分になる様な運動だけが可能である事を示している．

○ 多自由度では 板書 5

○ 始点を固定して終点だけを動かす事が多いが，その場合は $S = S(q^{(2)}, t_2)$ と書こう．更に $q^{(2)} = q$, $t_2 = t$ にして，$S = S(q, t)$ と書く事も多い． 板書 6

○ 例

(1) 自由粒子 板書 7

(2) 調和振動子 板書 8 [レポート 8]

◎ 時間発展と正準変換

$p = p(t)$, $q = q(t)$ の時間発展は正準変換である．

☺ 板書 9 □

## § 2　Hamilton-Jacobi の方程式

運動の積分を系統的に求める最も強力な方法

◎ Hamilton-Jacobi の方程式

○ 第 2 部 § 1 で説明した端点の座標・時間の関数としての作用から 板書 1

1 階の偏微分方程式である．

⇒ 一般解：任意関数を含む解．完全解：独立変数 ($q_i$ と $t$) と同じ数 ($f+1$ 個) の任意定数を含む解．

・Hamilton-Jacobi の方程式では完全解が重要である．

$S$ は導関数として方程式に入って来ているので，$f+1$ 個の任意定数のうち 1 つは加法的に含まれる． 板書 2

注：一般解は必要ではないが，完全解が分かっていると次の様にして一般解が得られる．完全解 $S=S(q,t)=f(t,q\,;\alpha)+A$ に対して $S_g(q,t,\alpha)=f(t,q\,;\alpha)+g(\alpha)$ を考える ($g$ は $\alpha_1,\cdots,\alpha_f$ の任意関数)．条件 $\frac{\partial S_g}{\partial \alpha_i}=0$ ($i=1,\ldots,f$) を課して $\alpha_i$ を $t$ と $q$ の関数として表して $S_g$ に代入したものを $S'=S'(q,t)$ とする．$\frac{\partial S'}{\partial q_i}=\frac{\partial S_g}{\partial q_i}+\sum_k \frac{\partial S_g}{\partial \alpha_k}\frac{\partial \alpha_k}{\partial q_i}=\frac{\partial S_g}{\partial q_i}=\frac{\partial S}{\partial q_i}$, $\frac{\partial S'}{\partial t}=\frac{\partial S_g}{\partial t}+\sum_k \frac{\partial S_g}{\partial \alpha_k}\frac{\partial \alpha_k}{\partial t}=\frac{\partial S_g}{\partial t}=\frac{\partial S}{\partial t}$ となる事から $S'$ も解であり，任意関数 $g$ を含んでいるので一般解である．

○ 板書 3

$f$ 個の条件 $\frac{\partial f}{\partial \alpha_i}=\beta_i$ より，$f$ 個の $q_i$ を $t$ と ($2f$ 個の) 定数 $\alpha_i,\beta_i$ で表す事ができる．

○ 手順 (のまとめ)

板書 4

あとは完全解が求まればよい．⇒ 変数分離

○ $H$ が時間に陽に依らない場合 板書 5

◎ 変数分離

○ ある座標 ($q_1$ としよう) と導関数 $\frac{\partial S}{\partial q_1}$ が $\varphi(q_1,\frac{\partial S}{\partial q_1})$ の形でのみ Hamilton-Jacobi の方程式に入っているとする．つまり方程式が $F(\varphi(q_1,\frac{\partial S}{\partial q_1}),q_2,\frac{\partial S}{\partial q_2},\cdots,q_f,\frac{\partial S}{\partial q_f},t,\frac{\partial S}{\partial t})=0$ の形をしているとする． 板書 6

$S$ が解とするとこの式は恒等式となるから，任意の $q_1$ に対して成立．$q_1$ を変えると $\varphi$ が変わるので，この式が恒等式となるためには $\varphi$ が定数でなければならない．よって 板書 7

・同様に残り全ての座標と時間を分離できるならば，積分する事により，Hamilton-Jacobi の方程式の完全解が得られる．

・$H$ が時間に陽に依らない場合には $S=S_0(q_1,\cdots,q_f)-Et$ なので，$f$ 個の変数を分離すればよい．完全分離の場合には 板書 8

○ 変数分離の特別な場合として循環座標

$q_1$ を循環座標とすると $\varphi(q_1,\frac{\partial S}{\partial q_1})=\frac{\partial S}{\partial q_1}$ である．よって， 板書 9

・$H$ が時間に陽に依らない場合には $t$ は“循環座標”で，$S=S_0-Et$.

◎ 例：$H=\frac{1}{2m}\vec{p}^2+U(\vec{r})\Rightarrow S(q,t)=S_0(q)-Et$

(1) デカルト座標 $(x,y,z)$ 板書 10

(2) 円柱座標 $(r,\theta,z)$ 板書 11

(3)(空間) 極座標 $(r,\theta,\varphi)$ 板書 12

## § 3　Maupertuis の原理

・作用原理 ⇒ 運動方程式 ⇒ 運動が決まる：

　$q_i=q_i(t)$ 軌道の形と時間依存性

○ 軌道の形だけを求めたい場合 (時間依存性を問わない)

・$L$ が時間を陽に含まないとする．従って $H$ も時間を陽に含まず，エネルギーが保存．$H(p,q)=E=$ 一定．

・$q^{(1)}$, $q^{(2)}$, $t_1$ を固定する．$q(t_1)=q^{(1)}$, $q(t_2)=q^{(2)}$.

$$S[q]=\int_{t_1}^{t_2}L(q,\dot q)dt=\int_{t_1}^{t_2}(\textstyle\sum_i p_i\dot q_i-H)dt$$
$$=\int_{q^{(1)}}^{q^{(2)}}\textstyle\sum_i p_i dq_i-\int_{t_1}^{t_2}H dt.$$

・系の全ての仮想的な運動を比較するのではなく，エネルギー保存則を満たす運動だけを比較しよう．時刻 $t_1$ に $q^{(1)}$ を出発し，エネルギーが保存する様に $q^{(2)}$ に到達するまでにかかる時間は軌道 $q(t)$ に依存する．つまり $t_2$ は軌道により変化する．$q(t)$ として $H=$ 一定 $=E$ となるものに制限した $S$ を $\tilde S$ と書く事にしよう．$\tilde S[q]=\int_{t_1}^{t_2}L(q,\dot q)dt=\int_{q^{(1)}}^{q^{(2)}}\sum_i p_i dq_i-E(t_2-t_1)$.

$\tilde S_0[q]=\int_{q^{(1)}}^{q^{(2)}}\sum_i p_i dq_i$ とおき，簡約された作用と呼ぶ．

・$\tilde S[q]=\tilde S_0[q]-E(t_2-t_1)$．$q$ の ($H=E$ となる) 変分に対して，$\delta\tilde S[q]=\delta\tilde S_0[q]-E\delta t_2$.

一般に $\delta S[q_{解}]=-H\delta t_2$ であったから，$\delta\tilde S[q_{解}]=-E\delta t_2$ であり，よって $\delta\tilde S_0[q_{解}]=0$ となる．つまり，$\delta\tilde S_0=0$ によって軌道が決まる．

○ Maupertuis の (最小作用の) 原理：簡約された作用は，エネルギー保存則を満たし，かつ勝手な時刻に終点を通る全ての軌跡に関して最小値 (停留値) を取る，$\delta\tilde S_0=0$.

○ $L=\frac{1}{2}\sum\limits_{i,j}a_{ij}(q)\dot q_i\dot q_j-U(q)$ を考える． 板書 1

・パラメータ $E$ を変える (⇒ 軌道 $q(t)$ が変わり，$t_2$ が変わる)．$\tilde S[q]=\tilde S_0[q]-E(t_2-t_1)$ より $\delta\tilde S[q]=\delta\tilde S_0[q]-\delta E(t_2-t_1)-E\delta t_2$．$q_{解}$ に対して $\delta\tilde S[q_{解}]=\delta\tilde S_0[q_{解}]-\delta E(t_2-t_1)-E\delta t_2$ となるが，$\delta\tilde S[q_{解}]=-E\delta t_2$ であるから，$\delta\tilde S_0[q_{解}]=\delta E(t_2-t_1)$．よって $\frac{\partial\tilde S_0}{\partial E}=t_2-t_1$ となり，これから時間 ($t_2$) 依存性が求まる．

上の $L$ に対しては $\frac{\partial\tilde S_0}{\partial E}=\int\sqrt{\frac{\sum_{i,j}a_{ij}\frac{dq_i}{ds}\frac{dq_j}{ds}}{2(E-U)}}ds$ であり，これは $dt=\sqrt{\frac{\sum_{i,j}a_{ij}dq_idq_j}{2(E-U)}}$ を積分したものである．

## § 4　Liouville の定理

○ ヤコビアンの性質 板書 1

○ $d\Gamma=dq_1\cdots dq_f dp_1\cdots dp_f$：相空間の体積要素

正準変換 $(p,q)\to(p',q')$ に対して 板書 2 $\therefore d\Gamma'=d\Gamma$

$\therefore\int d\Gamma=$ 一定．正準変換の下で不変．時間発展は正準変換としてとらえられたので，時間発展の下でも不変．

○ 他にも $\int\sum\limits_i dq_idp_i=$ 一定,

　$\int\sum\limits_{i\neq j}dq_idp_idq_jdp_j=$ 一定，$\cdots$ 板書 3

## § 5　Lagrange 括弧

○ 2 次元面 $D$ 上で 板書 1 と定義する．前節の計算より $(u,v)^{(p,q)}_{\mathrm{L.B.}}=(u,v)^{(p',q')}_{\mathrm{L.B.}}$ である．

○ 相空間の (正準変数とは必ずしも限らない) 座標を $y^n$ とし，Lagrange 括弧を 板書 2 と定義する．

板書 3 つまり互いに逆行列である．

○ $(p,q)\to(p',q')$ が正準変換 ⇔ 板書 4

## § 6　電磁場中の荷電粒子の運動

Lorentz 力：電荷 $q$ の質点に対して $\vec{F}=q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$.
$m\ddot{\vec{r}}=q(\vec{E}+\dot{\vec{r}}\times\vec{B})$ を与えるラグランジアンは？
ハミルトニアンは？

### § 6.1　Maxwell 方程式とゲージポテンシャル

○ $\vec{E}$ と $\vec{B}$ は場：$\vec{E}(t,\vec{r})$, $\vec{B}(t,\vec{r})$．Maxwell 方程式より，$\vec{E}$ と $\vec{B}$ はベクトルポテンシャル $\vec{A}(t,\vec{r})$ とスカラーポテンシャル $\phi(t,\vec{r})$ を用いて表される． $\boxed{板書 1}$

○ 欲しいラグランジアンとハミルトニアンはこの $\vec{A}$ と $\phi$ を用いて表される．

### § 6.2　荷電粒子のラグランジアン

○ $\boxed{板書 2}$

### § 6.3　荷電粒子のハミルトニアン

○ $\boxed{板書 3}$

○ ゲージ原理 $\boxed{板書 4}$

### § 6.4　ゲージ変換

○ $\boxed{板書 5}$

○ 古典論では $\vec{A}$ と $\phi$ は $\vec{E}$ と $\vec{B}$ を書き表すための単なる道具にしか過ぎないが，量子論では $\vec{A}$ と $\phi$ (2 つを合わせてゲージ場 $A^{\mu}$) は本質的な意味を持つ事になる．

### § 6.5　一様定電磁場中の運動

○ $\vec{B}={}^t(0,0,B)$, $\vec{E}={}^t(0,E,0)$ ($B,E$ は定数．$\vec{p}=m\dot{\vec{r}}$ が成立する範囲内で考え，$|E/B|\ll c$ とする)．初期条件として，$t=0$ で $\vec{r}$, $\dot{\vec{r}}$ は共に $xy$ 平面内とする．
$\boxed{板書 6}$

## § 7　量子論へ向けて

○ $h$：Planck 定数 ($h=6.62607015\times10^{-34}\mathrm{J\cdot s}$),
$\hbar=\frac{h}{2\pi}$．(2019 年 5 月から定義値で，kg を定める．)

○ $q$, $p$, $H$ 等の物理量が (エルミート) 演算子に置き換わる．それらの演算子が作用する相手は状態ベクトルというもの．

○ 時間発展の時間依存性を状態に押し付けるか，演算子に押し付けるか．前者を Schrödinger 表示，後者を Heisenberg 表示という．

・Schrödinger 表示での基礎になる方程式は，状態に対する Schrödinger 方程式： $\boxed{板書 1}$

・Heisenberg 表示での基礎になる方程式は，Heisenberg 演算子に対する Heisenberg 方程式： $\boxed{板書 2}$

○ Heisenberg 方程式は古典論の Poisson 括弧を交換子で置き換える事で得られる． $\boxed{板書 3}$

○ 基本 Poisson 括弧は正準交換関係に置き換わる．
$\boxed{板書 4}$

○ $\hbar\to 0$ で量子論は古典論に帰着する．

時間的余裕があれば以下の話題を紹介.

## § 8　ラグランジアンはどうあるべきか

## § 9　対称性と保存則

## § 10　微分形式

## § 11　拘束系

## § 12　無限自由度系

## § 13　Grassmann 変数を含む拡張

## § 14　スター積