

Ruijsenaars 模型の古典平衡点と変形された直交多項式

信州大学理学部 小竹 悟

1 序論

(y_1, \dots, y_r) に対する連立方程式

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^r \frac{1}{y_j - y_k} = y_j, \quad (j = 1, \dots, r) \quad (1.1)$$

の解を御存じであろうか。この問題は 19 世紀に Stieltjes によって既に調べられており、その答えは Hermite の多項式 $H_r(x)$ の r 個の零点で与えられる。それではこの方程式を (1 パラメータ) 変形した次の方程式 (パラメータ $\delta \rightarrow 0$ の極限で上の方程式に帰着する)

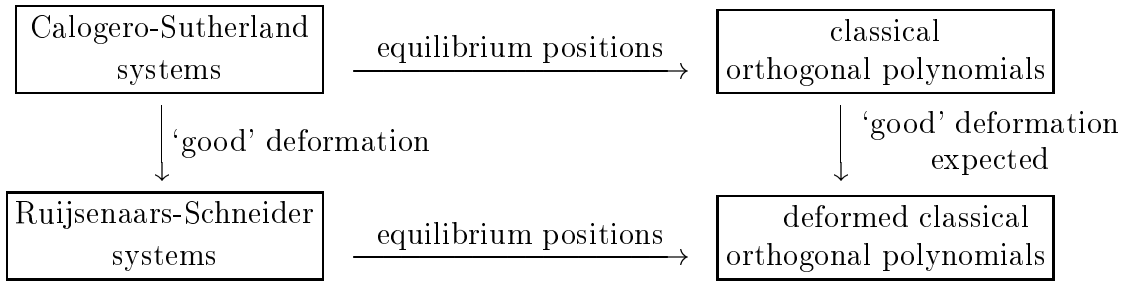
$$\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^r \frac{y_j - y_k - i\sqrt{\delta}}{y_j - y_k + i\sqrt{\delta}} = \frac{1 - i\sqrt{\delta} y_j}{1 + i\sqrt{\delta} y_j}, \quad (j = 1, \dots, r) \quad (1.2)$$

の解はどうなるであろうか。(1.1) の解が Hermite 多項式の零点であり、(1.2) が (1.1) の変形である事から、(1.2) の解は ‘変形された Hermite 多項式’ の零点で与えられると考えるのは自然である。そして (1.1)→(1.2) が ‘良い変形’ であるならば、この変形された Hermite 多項式は ‘性質良く変形されている’ と期待できる。何故物理屋の私がこの様な方程式を考えてみるかと言うと、(1.1), (1.2) はそれぞれ Calogero-Sutherland-Moser 模型、Ruijsenaars-Schneider 模型と呼ばれる力学系の古典平衡点の式だからである。

Calogero-Sutherland-Moser 模型とは、長距離相互作用 (ポテンシャルは $\frac{1}{r^2}$, $\frac{1}{\sin^2 r}$, $\wp(r)$ など、近距離では $\frac{1}{r^2}$) を持つ、1 次元 (量子) 可積分多体系である。この Calogero-Sutherland-Moser 模型はルート系に付随する模型で、ハミルトニアンはルート系の Coxeter 群の作用の下で不変になっている。Ruijsenaars-Schneider 模型とは、この Calogero-Sutherland-Moser 模型の ‘変形版’ (‘相対論版’, ‘離散化版’) である。ハミルトニアンの運動項は p_j^2 の代わりに $\sim \cosh p_j$ となっている。あるパラメータを特別な値に近づけると (例えば ‘光速度’ を無限大にすると)、Ruijsenaars-Schneider 模型は Calogero-Sutherland-Moser 模型に帰着する。これらの模型と (数理) 物理学との関係は、例えば、分数排他統計、量子 Hall 効果との関連などの元々の物性理論との関係の他に、超対称ゲージ理論の厳密解を与える Seiberg-Witten 理論との関連、2 次元共形場理論で重要な役割を果たす (変形) Virasoro 代数や (変形) W_N 代数との関連など、多岐にわたっており、古典論・量子論共に大変興味深い模型となっている。

本講演では、古典ルート系 (A, B, C, D, BC) に付随する、有理関数または三角関数のポテンシャルを持つ、Ruijsenaars-Schneider 模型の古典平衡点についての研究結果を報告す

る．古典ルート系に付随する Calogero 模型 (有理関数ポテンシャル)・Sutherland 模型 (三角関数ポテンシャル) の古典平衡点は, Hermite, Laguerre, Chebyshev, Legendre, Gegenbauer, Jacobi の多項式の零点になっている．Calogero-Sutherland 模型・Ruijsenaars-Schneider 模型と (変形)Virasoro 代数・(変形) W_N 代数との関係を見出した時の経験などから, Ruijsenaars-Schneider 模型は Calogero-Sutherland 模型の ‘良い’ 変形になっている事を知っているのので, Ruijsenaars-Schneider 模型の古典平衡点は Hermite, Laguerre, Jacobi 等の多項式を ‘性質良く’ 変形した多項式の零点になっている事が期待される．



例えば, Hermite, Laguerre, Jacobi 等の多項式は古典直交多項式として知られているが, この直交性という性質は変形後も保持される事が期待され, 実際その様になっている．

紙面の都合で省略した部分も多々あるが, 詳細については文献 [1] を参照して頂きたい．

2 ポテンシャルと平衡点

先ず, 模型の定義と古典平衡点の式を与えておく．

古典ハミルトニアン $H(p, q)$ で定まる古典力学を考える． $\{q_j | j = 1, \dots, r\}$ は座標で, $\{p_j | j = 1, \dots, r\}$ は共役運動量である．これらを \mathbb{R}^r のベクトル $q = {}^t(q_1, \dots, q_r)$, $p = {}^t(p_1, \dots, p_r)$ として表しておく． r は粒子数である (A 型を除き, ルート系 Δ のランクでもある)．時間発展を表す正準運動方程式は

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H(p, q)}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H(p, q)}{\partial q_j} \quad (2.1)$$

で, 古典平衡点はその停留解である:

$$p = 0, \quad q = \bar{q}, \quad \text{s.t.} \quad \left. \frac{\partial H(0, q)}{\partial q_j} \right|_{q=\bar{q}} = 0, \quad (j = 1, \dots, r). \quad (2.2)$$

2.1 Calogero 系と Sutherland 系

古典ルート系に付随する Calogero 系, Sutherland 系の古典ハミルトニアンは

$$H_{CS}(p, q) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r p_j^2 + V_C(q), \quad V_C(q) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r \left(\frac{\partial W(q)}{\partial q_j} \right)^2 \quad (2.3)$$

という形をしており，古典平衡点の式 (2.2) は

$$\left. \frac{\partial W(q)}{\partial q_j} \right|_{q=\bar{q}} = 0, \quad (j = 1, \dots, r) \quad (2.4)$$

と簡単化される．‘prepotential’ $W(q)$ の具体形は

$$\text{Calogero 系} : W(q) = -\frac{\omega}{2} \sum_{j=1}^r q_j^2 + \sum_{\rho \in \Delta_+} g_\rho \log |(\rho \cdot q)|, \quad (2.5)$$

$$\text{Sutherland 系} : W(q) = \sum_{\rho \in \Delta_+} g_\rho \log |\sin(\rho \cdot q)| \quad (2.6)$$

で， Δ_+ は正ルートの集合である．結合定数 ω 及び g_ρ は正の実数で， g_ρ はルートの長さで決まっている： A_{r-1}, D_r の時は全てのルートに対して g ； B_r, C_r の時は long ルートに対しては g_L ，short ルートに対しては g_S ； BC_r の時は long ルートに対しては g_L ，middle ルートに対しては g_M ，short ルートに対しては g_S ．

平衡点の式 (2.4) は

$$\text{Calogero } A_{r-1} : \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^r \frac{1}{\bar{q}_j - \bar{q}_k} = \frac{\omega}{g} \bar{q}_j, \quad (2.7)$$

$$\text{Calogero } C_r : \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^r \frac{2\bar{q}_j}{\bar{q}_j^2 - \bar{q}_k^2} = \frac{\omega}{g_S} \bar{q}_j - \frac{g_L}{g_S} \frac{1}{\bar{q}_j}, \quad (2.8)$$

$$\text{Sutherland } A_{r-1} : \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^r \cot(\bar{q}_j - \bar{q}_k) = 0, \quad (2.9)$$

$$\text{Sutherland } BC_r : \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^r \left(\cot(\bar{q}_j - \bar{q}_k) + \cot(\bar{q}_j + \bar{q}_k) \right) = -\frac{g_S}{g_M} \cot \bar{q}_j - 2\frac{g_L}{g_M} \cot 2\bar{q}_j \quad (2.10)$$

である．(2.7) の解に対して， $\bar{q}_j = \sqrt{\frac{g}{\omega}} y_j$ とおくと， $\{y_j\}$ を零点として持つ多項式は Hermite の多項式 $H_r(x)$ である：

$$2^r \prod_{j=1}^r (x - y_j) = r! \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \frac{(-1)^j (2x)^{r-2j}}{j!(r-2j)!} \stackrel{\text{def}}{=} H_r(x). \quad (2.11)$$

(2.8) の解に対して， $\bar{q}_j = \sqrt{\frac{g_S}{\omega}} y_j$ ， $\alpha = \frac{g_L}{g_S} - 1$ とおくと， $\{y_j^2\}$ を零点として持つ多項式は Laguerre の多項式 $L_r^{(\alpha)}(x)$ である：

$$\frac{(-1)^r}{r!} \prod_{j=1}^r (x - y_j^2) = \sum_{j=0}^r \binom{r+\alpha}{r-j} \frac{(-x)^j}{j!} \stackrel{\text{def}}{=} L_r^{(\alpha)}(x). \quad (2.12)$$

(2.9) の解は並進不変で，重心座標が 0 になるように $\bar{q}_j = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi(2j-1)}{2r}$ と選ぶと， $\{\sin \bar{q}_j\}$ を零点として持つ多項式は第 1 種の Chebyshev の多項式 $T_n(x)$ である：

$$2^{r-1} \prod_{j=1}^r (x - \sin \bar{q}_j) = 2^{r-1} \prod_{j=1}^r \left(x - \cos \frac{\pi(2j-1)}{2r} \right) \stackrel{\text{def}}{=} T_r(x). \quad (2.13)$$

(2.10) の解に対して， $\alpha = \frac{g_S}{g_M} + \frac{g_L}{g_M} - 1$ ， $\beta = \frac{g_L}{g_M} - 1$ とおくと， $\cos 2\bar{q}_j$ を零点として持つ多項式は Jacobi の多項式 $P_r^{(\alpha, \beta)}(x)$ である：

$$2^{-r} \binom{\alpha+\beta+2r}{r} \prod_{j=1}^r (x - \cos 2\bar{q}_j) = \sum_{j=0}^r \binom{\alpha+r}{r-j} \binom{\alpha+\beta+r+j}{j} 2^{-j} (x-1)^j \stackrel{\text{def}}{=} P_r^{(\alpha, \beta)}(x). \quad (2.14)$$

2.2 Ruijsenaars 系

古典ルート系に付随する Ruijsenaars 系の古典ハミルトニアンは

$$H(p, q) = \sum_{j=1}^r \left(\cosh p_j \sqrt{V_j(q) V_j^*(q)} - \frac{1}{2} (V_j(q) + V_j^*(q)) \right) \quad (2.15)$$

で，関数 $V_j = V_j(q)$ とその複素共役 V_j^* の形はルート系 Δ によって決まっている：

$$A_{r-1} : V_j(q) = w(q_j) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^r v(q_j - q_k), \quad (j = 1, \dots, r), \quad (2.16)$$

$$B_r, C_r, D_r, BC_r : V_j(q) = w(q_j) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^r v(q_j - q_k) v(q_j + q_k), \quad (j = 1, \dots, r). \quad (2.17)$$

関数 v と w の具体形は下で与える．ハミルトニアンを平衡点の回りで展開して考察する事により，古典平衡点の式 (2.2) が次の様に簡単化される：

$$V_j(\bar{q}) = V_j^*(\bar{q}) > 0, \quad (j = 1, 2, \dots, r). \quad (2.18)$$

2.2.1 Ruijsenaars-Calogero 系

極限で Calogero 系に帰着する模型を Ruijsenaars-Calogero 系と呼ぶ事にする．これには閉じ込めのポテンシャルが 1 次で増大するものと，2 次で増大するものがある．

Linear Confining Potential Case

関数 v と w は

$$A, D : v(x) = 1 - i \frac{g}{x}, \quad w(x) = 1 + i \frac{x}{a}, \quad (2.19)$$

$$B : v(x) = 1 - i \frac{g_L}{x}, \quad w(x) = \left(1 + i \frac{x}{a}\right) \left(1 - i \frac{g_S}{2x}\right)^2, \quad (2.20)$$

$$C : v(x) = 1 - i \frac{g_S}{x}, \quad w(x) = \left(1 + i \frac{x}{a}\right) \left(1 - i \frac{g_L}{x}\right), \quad (2.21)$$

$$\widetilde{BC} : v(x) = 1 - i \frac{g_0}{x}, \quad w(x) = \left(1 + i \frac{x}{a}\right) \left(1 - i \frac{g_1}{x}\right) \left(1 - i \frac{g_2}{x}\right) \quad (2.22)$$

で与えられる．結合定数 $a, g, g_L, g_S, g_0, g_1, g_2$ は正の実数である．平衡点の式 (2.18) は Bethe 仮設方程式に似た形に書き表される (B, C, D は \widetilde{BC} から得られる) :

$$A_{r-1} : \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^r \frac{\bar{q}_j - \bar{q}_k - ig}{\bar{q}_j - \bar{q}_k + ig} = \frac{a - i\bar{q}_j}{a + i\bar{q}_j}, \quad (2.23)$$

$$\widetilde{BC}_r : \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^r \frac{\bar{q}_j - \bar{q}_k - ig_0}{\bar{q}_j - \bar{q}_k + ig_0} \frac{\bar{q}_j + \bar{q}_k - ig_0}{\bar{q}_j + \bar{q}_k + ig_0} = \frac{a - i\bar{q}_j}{a + i\bar{q}_j} \frac{\bar{q}_j + ig_1}{\bar{q}_j - ig_1} \frac{\bar{q}_j + ig_2}{\bar{q}_j - ig_2}. \quad (2.24)$$

Quadratic Confining Potential Case

関数 v は前と同じだが，関数 w には一つ因子が掛かって，

$$A, D : v(x) = 1 - i \frac{g}{x}, \quad w(x) = \left(1 + i \frac{x}{a}\right) \left(1 + i \frac{x}{b}\right), \quad (2.25)$$

$$B : v(x) = 1 - i \frac{g_L}{x}, \quad w(x) = \left(1 + i \frac{x}{a}\right) \left(1 + i \frac{x}{b}\right) \left(1 - i \frac{g_S}{2x}\right)^2, \quad (2.26)$$

$$C : v(x) = 1 - i \frac{g_S}{x}, \quad w(x) = \left(1 + i \frac{x}{a}\right) \left(1 + i \frac{x}{b}\right) \left(1 - i \frac{g_L}{x}\right), \quad (2.27)$$

$$\widetilde{BC} : v(x) = 1 - i \frac{g_0}{x}, \quad w(x) = \left(1 + i \frac{x}{a}\right) \left(1 + i \frac{x}{b}\right) \left(1 - i \frac{g_1}{x}\right) \left(1 - i \frac{g_2}{x}\right) \quad (2.28)$$

で与えられる．結合定数 $a, b, g, g_L, g_S, g_0, g_1, g_2$ は正の実数である．平衡点の式 (2.18) は Bethe 仮設方程式に似た形に書き表される (B, C, D は \widetilde{BC} から得られる) :

$$A_{r-1} : \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^r \frac{\bar{q}_j - \bar{q}_k - ig}{\bar{q}_j - \bar{q}_k + ig} = \frac{a - i\bar{q}_j}{a + i\bar{q}_j} \frac{b - i\bar{q}_j}{b + i\bar{q}_j}, \quad (2.29)$$

$$\widetilde{BC}_r : \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^r \frac{\bar{q}_j - \bar{q}_k - ig_0}{\bar{q}_j - \bar{q}_k + ig_0} \frac{\bar{q}_j + \bar{q}_k - ig_0}{\bar{q}_j + \bar{q}_k + ig_0} = \frac{a - i\bar{q}_j}{a + i\bar{q}_j} \frac{b - i\bar{q}_j}{b + i\bar{q}_j} \frac{\bar{q}_j + ig_1}{\bar{q}_j - ig_1} \frac{\bar{q}_j + ig_2}{\bar{q}_j - ig_2}. \quad (2.30)$$

2.2.2 Ruijsenaars-Sutherland 系

極限で Sutherland 系に帰着する模型を Ruijsenaars-Sutherland 系と呼ぶ事にする．関数 v と w は

$$A, D : v(x) = 1 - i \tanh g \cot x, \quad w(x) = 1, \quad (2.31)$$

$$B : v(x) = 1 - i \tanh g_L \cot x, \quad w(x) = (1 - i \tanh \frac{g_S}{2} \cot x)^2, \quad (2.32)$$

$$B' : v(x) = 1 - i \tanh g_L \cot x, \quad w(x) = 1 - i \tanh g_S \cot x, \quad (2.33)$$

$$C : v(x) = 1 - i \tanh g_S \cot x, \quad w(x) = 1 - i \tanh 2g_L \cot 2x, \quad (2.34)$$

$$C' : v(x) = 1 - i \tanh g_S \cot x, \quad w(x) = (1 - i \tanh g_L \cot 2x)^2, \quad (2.35)$$

$$B'C : v(x) = 1 - i \tanh g_M \cot x, \\ w(x) = (1 - i \tanh g_S \cot x)(1 - i \tanh 2g_L \cot 2x) \quad (2.36)$$

で与えられる．結合定数 g, g_L, g_M, g_S は正の実数である．平衡点の式 (2.18) は Bethe 仮設方程式に似た形に書き表される (B', C は $B'C$ から, D は B から得られる) :

$$A_{r-1} : \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^r \frac{\tan(\bar{q}_j - \bar{q}_k) - i \tanh g}{\tan(\bar{q}_j - \bar{q}_k) + i \tanh g} = 1, \quad (2.37)$$

$$B_r : \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^r \frac{\tan(\bar{q}_j - \bar{q}_k) - i \tanh g_L}{\tan(\bar{q}_j - \bar{q}_k) + i \tanh g_L} \frac{\tan(\bar{q}_j + \bar{q}_k) - i \tanh g_L}{\tan(\bar{q}_j + \bar{q}_k) + i \tanh g_L} = \left(\frac{\tan \bar{q}_j + i \tanh \frac{g_S}{2}}{\tan \bar{q}_j - i \tanh \frac{g_S}{2}} \right)^2, \quad (2.38)$$

$$C'_r : \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^r \frac{\tan(\bar{q}_j - \bar{q}_k) - i \tanh g_S}{\tan(\bar{q}_j - \bar{q}_k) + i \tanh g_S} \frac{\tan(\bar{q}_j + \bar{q}_k) - i \tanh g_S}{\tan(\bar{q}_j + \bar{q}_k) + i \tanh g_S} = \left(\frac{\tan 2\bar{q}_j + i \tanh g_L}{\tan 2\bar{q}_j - i \tanh g_L} \right)^2, \quad (2.39)$$

$$B'C_r : \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^r \frac{\tan(\bar{q}_j - \bar{q}_k) - i \tanh g_M}{\tan(\bar{q}_j - \bar{q}_k) + i \tanh g_M} \frac{\tan(\bar{q}_j + \bar{q}_k) - i \tanh g_M}{\tan(\bar{q}_j + \bar{q}_k) + i \tanh g_M} \\ = \frac{\tan \bar{q}_j + i \tanh g_S}{\tan \bar{q}_j - i \tanh g_S} \frac{\tan 2\bar{q}_j + i \tanh 2g_L}{\tan 2\bar{q}_j - i \tanh 2g_L}. \quad (2.40)$$

2.3 直交多項式と三項関係式

ここで直交多項式と三項関係式についての基礎事実を思い出しておく．

$\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ を実係数の直交多項式の系列とする． $f_n(x)$ は次数 n の x の多項式で (正定値) 内積 $(f, g) = \int f(x)g(x)w(x)dx$ ($w(x)$ は重み関数) に関して直交している, $(f_n, f_m) = h_n \delta_{n,m}$ ($h_n > 0$) . $f_n^{\text{monic}}(x)$ をモニック多項式 $f_n(x) = c_n f_n^{\text{monic}}(x) = c_n(x^n + \dots)$ とする．すると, $f_n^{\text{monic}}(x)$ は次の三項関係式を満足する ($f_{-1}^{\text{monic}}(x) = 0$ とおく) :

$$f_{n+1}^{\text{monic}}(x) - (x - a_n)f_n^{\text{monic}}(x) + b_n f_{n-1}^{\text{monic}}(x) = 0, \quad (n \geq 0). \quad (2.41)$$

a_n ($n \geq 0$) と b_n ($n \geq 1, b_0$ は不要, $b_n > 0$) は実数である．

面白いのはこの逆が成立する事である． $\{f_n(x)\}$ を三項関係式 (2.41) (つまり, 実数 a_n ($n \geq 0$), b_n ($n \geq 1, b_n > 0$), c_n ($n \geq 0, c_n \neq 0$)) を与える) で定義された多項式とすると, $\{f_n(x)\}$ は何らかの (正定値) 内積に関する直交多項式である．

3 Ruijsenaars 模型の古典平衡点を零点とする多項式

最初は，古典平衡点の式 (2.23)–(2.24), (2.29)–(2.30), (2.38)–(2.40) を数值的に解いて，その古典平衡点を零点とする多項式を計算する作業を繰り返し，それらを眺めて多項式が満たしている三項関係式を見出したのであるが，古典平衡点の式と (ほぼ) 等価な関数方程式を考えればよい事が分かったので，多項式に対する関数方程式を解く事によって，変形された Hermite, Laguerre, Jacobi の直交多項式の具体形を決定した．以下では多項式の定義と (あまり長くない場合に) 三項関係式の係数を具体的に与える．

3.1 Hermite の多項式の変形

3.1.1 Linear Confining Potential Case

方程式 (2.23) の解 $\{\bar{q}_j\}$ に対して

$$\bar{q}_j = \sqrt{ag} y_j, \quad \delta = \frac{g}{a} \quad (3.1)$$

と定義し， $\{y_j\}$ を零点として持つ次数 r の x の多項式を導入する：

$$H_r(x, \delta) \stackrel{\text{def}}{=} 2^r \prod_{j=1}^r (x - y_j). \quad (3.2)$$

これは Hermite の多項式 (2.11) を変形したもので， $\lim_{\delta \rightarrow 0} H_r(x, \delta) = H_r(x)$ である． $H_r(x, \delta)$ が満たす三項関係式 (2.41) の係数は

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{n}{2} \left(1 + \frac{n-1}{2} \delta \right). \quad (3.3)$$

3.1.2 Quadratic Confining Potential Case

方程式 (2.29) の解 $\{\bar{q}_j\}$ に対して

$$\bar{q}_j = \sqrt{ag} y_j, \quad \delta = \frac{g}{a}, \quad \varepsilon = \frac{a}{b} \quad (3.4)$$

と定義し， $\{y_j\}$ を零点として持つ次数 r の x の多項式を導入する：

$$H_r(x, \delta, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} 2^r \prod_{j=1}^r (x - y_j). \quad (3.5)$$

これは上の変形 Hermite 多項式を更に変形したもので， $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_r(x, \delta, \varepsilon) = H_r(x, \delta)$ である． $H_n(x, \delta, \varepsilon)$ が満たす三項関係式 (2.41) の係数は

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{n}{2} \left(1 + \frac{n-1}{2} \delta \right) \left(1 + \frac{n-1}{2} \delta \varepsilon \right) \frac{d_n}{d_{2n-1} d_{2n+1}}, \quad d_m = 1 + \left(1 + \frac{m-2}{2} \delta \right) \varepsilon. \quad (3.6)$$

3.2 Laguerre の多項式の変形

3.2.1 Linear Confining Potential Case

方程式 (2.24) の解 $\{\bar{q}_j\}$ に対して

$$\bar{q}_j = \sqrt{ag_0} y_j, \quad \delta = \frac{g_0}{a}, \quad \alpha = \frac{g_1 + g_2}{g_0} - 1, \quad \gamma = \frac{g_1 g_2}{g_0^2} \quad (3.7)$$

と定義し, $\{y_j^2\}$ を零点として持つ次数 r の x の多項式を導入する:

$$L_r^{(\alpha)}(x, \gamma, \delta) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(-1)^r}{r!} \prod_{j=1}^r (x - y_j^2). \quad (3.8)$$

これは Laguerre の多項式の 2 パラメータ変形で, $\lim_{\delta \rightarrow 0} L_r^{(\alpha)}(x, \gamma, \delta) = L_r^{(\alpha)}(x)$ である. $L_n^{(\alpha)}(x, \gamma, \delta)$ が満たす三項関係式 (2.41) の係数は

$$a_n = 2n + \alpha + 1 + (n(2n + 1) + 2n\alpha + \gamma)\delta, \quad (3.9)$$

$$b_n = n(n + \alpha) \left(1 + (2n + \alpha - 1)\delta + ((n - 1)(n + \alpha) + \gamma)\delta^2 \right). \quad (3.10)$$

3.2.2 Quadratic Confining Potential Case

方程式 (2.30) の解 $\{\bar{q}_j\}$ に対して

$$\bar{q}_j = \sqrt{ag_0} y_j, \quad \delta = \frac{g_0}{a}, \quad \varepsilon = \frac{b}{a}, \quad \alpha = \frac{g_1 + g_2}{g_0} - 1, \quad \gamma = \frac{g_1 g_2}{g_0^2} \quad (3.11)$$

と定義し, $\{y_j^2\}$ を零点として持つ次数 r の x の多項式を導入する:

$$L_r^{(\alpha)}(x, \gamma, \delta, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(-1)^r}{r!} \prod_{j=1}^r (x - y_j^2). \quad (3.12)$$

これは上の変形 Laguerre 多項式を更に変形したもので, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L_r^{(\alpha)}(x, \gamma, \delta, \varepsilon) = L_r^{(\alpha)}(x, \gamma, \delta)$ である. $L_n^{(\alpha)}(x, \gamma, \delta, \varepsilon)$ が満たす三項関係式 (2.41) の係数は少し長いので省略する.

3.3 Jacobi の多項式の変形

A_{r-1} : 方程式 (2.37) の解は, 変形前の方程式 (2.9) と同じである. よって第 1 種の Chebyshev の多項式 $T_r(x)$ (2.13) は, ここでの問題設定では, 変形を受けない.

$B'C_r$: 方程式 (2.40) の解 $\{\bar{q}_j\}$ に対して

$$\delta = \tanh^2 g_M, \quad \alpha = \frac{\tanh g_S}{\tanh g_M} + \frac{\tanh 2g_L}{2 \tanh g_M} - 1, \quad \beta = \frac{\tanh 2g_L}{2 \tanh g_M} - 1 \quad (3.13)$$

と定義し, $\{\cos 2\bar{q}_j\}$ を零点とする次数 r の x の多項式を導入する:

$$P_r^{(\alpha,\beta)}(x, \delta) \stackrel{\text{def}}{=} 2^{-r} \binom{\alpha+\beta+2r}{r} \prod_{j=1}^r (x - \cos 2\bar{q}_j). \quad (3.14)$$

これは Jacobi の多項式 (2.14) の変形で, $\lim_{\delta \rightarrow 0} P_r^{(\alpha,\beta)}(x, \delta) = P_r^{(\alpha,\beta)}(x)$ である. $P_n^{(\alpha,\beta)}(x, \delta)$ が満たす三項関係式 (2.41) の係数は少し長いので省略する.

C'_r : 方程式 (2.39) の解 $\{\bar{q}_j\}$ に対して

$$\delta = \tanh^2 g_S, \quad \alpha = \frac{\tanh g_L}{\tanh g_S} - 1 \quad (3.15)$$

と定義し, $\{\cos 2\bar{q}_j\}$ を零点とする次数 r の x の多項式を導入する:

$$\tilde{C}_r^{(\alpha+\frac{1}{2})}(x, \delta) \stackrel{\text{def}}{=} 2^r \binom{\alpha-\frac{1}{2}+r}{r} \prod_{j=1}^r (x - \cos 2\bar{q}_j). \quad (3.16)$$

これは Gegenbauer の多項式 (Jacobi の特別な場合) の変形で, $\lim_{\delta \rightarrow 0} \tilde{C}_r^{(\alpha+\frac{1}{2})}(x, \delta) = C_r^{(\alpha+\frac{1}{2})}(x)$ である. $\tilde{C}_n^{(\alpha+\frac{1}{2})}(x, \delta)$ が満たす三項関係式 (2.41) の係数は少し長いので省略する.

B_r : 方程式 (2.38) の解 $\{\bar{q}_j\}$ に対して

$$\delta = \tanh^2 g_L, \quad \alpha = \frac{2 \tanh \frac{g_S}{2}}{\tanh g_L} - 1 \quad (3.17)$$

と定義し, $\{\cos 2\bar{q}_j\}$ を零点とする次数 r の x の多項式を導入する:

$$\hat{P}_r^{(\alpha)}(x, \delta) \stackrel{\text{def}}{=} 2^{-r} \binom{\alpha-1+2r}{r} \prod_{j=1}^r (x - \cos 2\bar{q}_j). \quad (3.18)$$

これは Jacobi の多項式 (2.14) の変形で, $\lim_{\delta \rightarrow 0} \hat{P}_r^{(\alpha)}(x, \delta) = P_r^{(\alpha,-1)}(x)$ である. $\hat{P}_n^{(\alpha)}(x, \delta)$ が満たす三項関係式 (2.41) の係数は少し長いので省略する.

4 コメント

Ruijsenaars 模型の古典平衡点を零点として持つ多項式として, 変形 Hermite, Laguerre, Jacobi 多項式を定義しその具体形を求めたが, これらは Askey-scheme として知られる超幾何直交多項式 [2] のメンバーになっている事が文献を調べているうちに明らかになった. 最後にその対応を挙げておく.

$H_n(x, \delta)$ (3.2) は Meixner-Pollaczek 多項式 $P_n^{(\lambda)}(x; \phi)$ ([2] の §1.7) の特別な場合 :

$$H_n(x, \delta) = n! \sqrt{\delta}^n P_n^{(\frac{1}{2})} \left(\frac{x}{\sqrt{\delta}}; \frac{\pi}{2} \right). \quad (4.1)$$

$H_n(x, \delta, \varepsilon)$ (3.5) は連続 Hahn 多項式 $p_n(x; a, b, c, d)$ ([2] の §1.4) の特別な場合 :

$$H_n(x, \delta, \varepsilon) = \frac{2^n n! \sqrt{\delta}^n}{(n-1 + \frac{2}{\delta} + \frac{2}{\delta\varepsilon})_n} p_n \left(\frac{x}{\sqrt{\delta}}; \frac{1}{\delta}, \frac{1}{\delta\varepsilon}, \frac{1}{\delta}, \frac{1}{\delta\varepsilon} \right). \quad (4.2)$$

$L_n^{(\alpha)}(x, \gamma, \delta)$ (3.8) は連続双対 Hahn 多項式 $S_n(x^2; a, b, c, d)$ ([2] の §1.3) をリスケールしたものの (α_1 と α_2 は $x^2 - (\alpha-1)x + \gamma - \alpha = 0$ の2根) :

$$L_n^{(\alpha)}(y^2, \gamma, \delta) = \frac{\delta^n}{n!} S_n \left(\frac{y^2}{\delta}; \frac{1}{\delta}, \alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1 \right). \quad (4.3)$$

$L_n^{(\alpha)}(x, \gamma, \delta, \varepsilon)$ (3.12) は Wilson 多項式 $W(x^2; a, b, c, d)$ ([2] の §1.1) をリスケールしたものの :

$$L_n^{(\alpha)}(y^2, \gamma, \delta, \varepsilon) = \frac{\delta^n}{n!(n + \alpha + \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta\varepsilon})_n} W_n \left(\frac{y^2}{\delta}; \frac{1}{\delta}, \frac{1}{\delta\varepsilon}, \alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1 \right). \quad (4.4)$$

$P_n^{(\alpha, \beta)}(x, \delta)$ (3.14) は Askey-Wilson 多項式 $p_n(x; a, b, c, d|q)$ ([2] の §3.1) の特別な場合 :

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x, \delta) = 2^{-2n} \binom{\alpha + \beta + 2n}{n} (ab^2 q^{n-1}; q)_n^{-1} p_n(x; a, b, -b, -1|q), \quad (4.5)$$

$$q = \frac{1 - \sqrt{\delta}}{1 + \sqrt{\delta}} = e^{-2g_M}, \quad a = \frac{1 - (\alpha - \beta)\sqrt{\delta}}{1 + (\alpha - \beta)\sqrt{\delta}} = e^{-2g_S}, \quad b^2 = \frac{1 - 2(\beta + 1)\sqrt{\delta}}{1 + 2(\beta + 1)\sqrt{\delta}} = e^{-4g_L}. \quad (4.6)$$

$\tilde{C}_n^{(\alpha + \frac{1}{2})}(x, \delta)$ (3.16) も Askey-Wilson 多項式の特別な場合 :

$$\tilde{C}_n^{(\alpha + \frac{1}{2})}(x, \delta) = \binom{\alpha - \frac{1}{2} + n}{n} (a^4 q^{n-1}; q)_n^{-1} p_n(x; a, a, -a, -a|q), \quad (4.7)$$

$$q = \frac{1 - \sqrt{\delta}}{1 + \sqrt{\delta}} = e^{-2g_S}, \quad a^2 = \frac{1 - (\alpha + 1)\sqrt{\delta}}{1 + (\alpha + 1)\sqrt{\delta}} = e^{-2g_L}. \quad (4.8)$$

$\hat{P}_n^{(\alpha)}(x, \delta)$ (3.18) も Askey-Wilson 多項式の特別な場合 :

$$\hat{P}_n^{(\alpha)}(x, \delta) = 2^{-2n} \binom{\alpha - 1 + 2n}{n} (a^2 q^{n-1}; q)_n^{-1} p_n(x; a, a, -1, -1|q), \quad (4.9)$$

$$q = \frac{1 - \sqrt{\delta}}{1 + \sqrt{\delta}} = e^{-2g_L}, \quad a = \frac{1 - \frac{1}{2}(\alpha + 1)\sqrt{\delta}}{1 + \frac{1}{2}(\alpha + 1)\sqrt{\delta}} = e^{-g_S}. \quad (4.10)$$

References

- [1] S. Odake and R. Sasaki, “Equilibria of ‘Discrete’ Integrable Systems and Deformations of Classical Polynomials”, [hep-th/0407155](#).
- [2] R. Koekoek and R. F. Swarttouw, “The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q -analogue”, [math.CA/9602214](#).