

博士学位論文

超共形代数とその拡張について

昭和63年12月

小竹 悟

目次

1	序論	1
2	超共形代数のフェルミオンによる実現	4
2.1	共形代数と Kac-Moody 代数 (基本的事項)	4
2.2	共形代数のフェルミオンによる実現	8
2.3	N=1 共形代数のフェルミオンによる実現	9
2.4	N=2 共形代数のフェルミオンによる実現	11
2.5	議論	16
3	超共形代数の W 代数的拡張	17
3.1	W 代数とは	17
3.2	N=1 W_3 代数	22
3.3	N=2 W_3 代数	24
3.4	議論	26
4	Calabi-Yau コンパクト化に関連する N=2 超共形代数の W 代数的拡張	27
4.1	Calabi-Yau コンパクト化に関連する N=2 超共形代数の拡張	27
4.2	表現論	33
4.3	指標公式	36
4.4	Ricci 平坦 Kähler 多様体上の非線型 σ 模型	42
4.5	議論	43
5	まとめ	45
	謝辞	46
	補遺	47
	補遺 A 演算子積展開の性質	47
	補遺 B N=2 W_3 代数の演算子積展開	48
	補遺 C 有用な公式	50
	補遺 D (4.39) 式の証明	51
	補遺 E N=2 超共形代数の指標公式 ($c \geq 3$)	54
	参考文献	56

1 序論

自然界の基本的相互作用を重力迄含めて統一する理論として絃理論がここ数年来精力的に研究されているが [1], 大統一理論の陽子崩壊の様な直接検証出来る実験が考えられず, 絃理論は専ら理論の整合性及び数学的美しさを頼りに構築されてきている。一般相対性理論を導き出した等価原理の様な指導原理が絃理論に於いては何であろうかという問には未だ答える事は出来ないが, 理論の整合性を支える基盤は(超)共形不変性である事が分かってきた。二次元時空(世界面)に於ける共形代数は他の次元と異なり無限次元である為, 共形不変性は理論に強い制約を課す事になるのである [2]。絃理論に限らずもっと一般に二次元時空に於ける共形不変な理論(又は二次元空間に於ける統計臨界現象)を調べる為には, 理論のもつ対称性である共形代数の性質を深く理解しておく必要がある。

本論文で考察する話題の一つは共形代数及び $N = 1, 2$ 超共形代数のフェルミオンによる実現(模型)に付いてである [3]。(超)共形代数を実現する方法としては自由ボソン, 自由フェルミオン, 自由ボソンと自由フェルミオン, パラフェルミオンと自由ボソン, ... を用いるものがある。何故フェルミオンによる実現を考えたかという点, フェルミオンによる実現は Feigin-Fuchs 法等に比べユニタリ性が明白であり, 歴史的にみて重要な模型がフェルミオンを用いて構成されてきたので [4, 5, 6], フェルミオンを用いてどの位広い範囲で実現が得られるかを調べてみようと考えたのが第一の理由である。フェルミオンの模型は適当に射影してセクターを選ぶ事によりボソンなどでは実現しにくい模型を得る事が出来る [7]。絃理論は従来ゴーストの共形異常項を打ち消す為の共形異常項の出所を全て絃の住む時空の座標と解釈した為 26 次元ないしは 10 次元でのみ矛盾なく定式化出来ると言われてきたが, この解釈を改めて時空は初めから 4 次元であって他の共形異常項の出所を(特に座標としての幾何学的解釈を要求しない)ゲージ対称性を生み出す内部自由度であると考えた事により 4 次元絃理論が構成された [8]。この理論では内部自由度をフェルミオンを用いて構成しており, フェルミオンによる(超)共形代数の実現を数多く用意しておく事が有益であると考えた訳である。

もう一つの話は共形代数を拡張する事であり, 先ず代数を拡張する事の意義に付いて述べておく。理論が共形不変性に加えて更に新しい対称性を持ったとすると, 全体の対称性を表す代数は共形代数を部分代数として含む様に拡張されたものになる。例として超対称性を考えてみる。超対称性はボソンとフェルミオンの寄与を相殺し合って発散を大幅に軽減するものであるから現実の模型では不可欠なものである。超共形不変な理論に現れる場には超変換で移り合える相棒がいて, 理論の中にはこれらが二重項と成ってまとまって現れて来る。共形代数しか知らない人がこれを見たならば, これらは独立な 2 つの既約表現であり, 何故対に成って

現れて来るかが理解出来ずにただ不思議な現象として自分を納得させるしかなく、又見通しも悪い。ところが共形代数に超対称性を加えて拡張した超共形代数の立場でこれを見たならば、共形代数では2つの既約表現だったものが組み合わせあって超共形代数の1つの既約表現を形成している事が分かり、理論全体をすっきりと見通し良く見渡す事が出来る様になるのである。これらの事柄は指標公式及びモジュラー不変な分配関数に於て最も明確に見て取る事が出来る。共形代数の minimal 模型ではモジュラー不変な分配関数は ADE 型に分類されている [9, 10]。このうち A 型は正則・反正則部分を単純に組み合わせる素直な型だが、DE 型では一部の指標公式が組に成っており、超共形代数より大きな対称性が存在しその代数で見れば A 型に帰着するだろうと考えられている。minimal 模型の持つ良い性質を備えている理論は一般に rational な共形不変な場の理論と呼ばれている [11]。もう少し正確に言うと rational な共形不変な理論とは、理論の Hilbert 空間がカイラル代数と呼ばれるある代数に従う正則・反正則な Hilbert 空間の有限個（一見無限個の場が現われる様に見えても適当にまとめる事により有限個に出来るものも含む。）の直和に分解される様な理論の事である。この rational な共形不変な理論でもモジュラー不変な分配関数は、カイラル代数を最大限に拡張する事により、A 型に帰着されるだろう、つまり理論の Hilbert 空間が A 型になるであろうと考えられている。この様に理論が共形不変性に加えて別の対称性を備えていたならば、代数をその対称性が反映する様に拡張する事により理論の構造を見通し良く調べる事が出来るのである。

代数の拡張には幾つかの方法があるが本論文では超共形代数の W 代数的拡張に付いて考察する。 W 代数は交換関係として書き表せるもので、Lie 代数にはなっていないがその交換関係は Jacobi 律を満たしているので包絡代数として矛盾なく定義されている [12]。超共形代数にそのプライマリー場を添加して、代数が閉じる事と Jacobi 律を要請して代数がどの様に拡張されるかを決定する。その中で特に §4 で考察する代数は超弦理論の Calabi-Yau コンパクト化に関係しているので興味深いものである。これは $K3$ 曲面（複素2次元）コンパクト化の場合に現われる $N = 4$ 超共形代数の複素3次元版である [13]。その着想は、時空に $N = 1$ 超対称性が存在した場合にその超変換を世界面に於ける $N = 2$ 超共形代数のスペクトラルフローと考えようというものである [14, 15, 16, 17]。超変換を2回行なうと元に戻るの、世界面で見てそれに対応するスペクトラルフローを行なった場合に表現が元に戻る様に $N = 2$ 超共形代数を拡張する必要がある。この場合中心荷 c が9で連続系列に属している為、 $N = 2$ 超共形代数の既約表現を無限個用意して初めてこの性質を持たせる事が出来る。拡張された代数はこの無限個の表現を1つの既約表現として持つものである。この代数は $N = 2$ 超共形代数に、Calabi-Yau 多様体の言葉で言って3階の（反）正則微分形式に相当する場を添加する事によっ

て得られるのである。

§2 ではフェルミオンによる (超) 共形代数の実現について考察する。§3 で共形代数の W 代数的拡張について述べ、§4 で Calabi-Yau コンパクト化に関連した代数について考察する。§5 でまとめを行ない、補遺には公式や証明を載せてある。

2 超共形代数のフェルミオンによる実現

本節では先ず共形代数と Kac-Moody 代数の基本的性質について本論文に關係のある範囲内で簡単に復習し [2, 18], 次に共形代数及び $N = 1, 2$ 超共形代数のフェルミオンによる実現について考察する [3]。

2.1 共形代数と Kac-Moody 代数 (基本的事項)

共形変換とは角度を保つ変換の事であるが, その変換群の Lie 代数は 3 次元以上の時空に対しては有限次元であるのに対して 2 次元時空 (世界面) に対しては無次元である為, 2 次元での共形不変な理論は強い制約を被る事になる [2]。共形変換の生成元はエネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}(x^0, x^1)$ であり, 保存 ($\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$)・対称 ($T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$)・トレースレス ($T^\mu_\mu = 0$) を用いると, 2 つの独立成分 $T_{00} \pm T_{01}$ は, それぞれ $x^0 \pm x^1$ のみの関数になる。時空を Euclid 化 ($x^0_E = ix^0$) すると複素関数論 ($z = x^0_E + ix^1, \bar{z} = x^0_E - ix^1$) が使えるようになりエネルギー運動量テンソルは正則 $T(z)$ ・反正則 $\bar{T}(\bar{z})$ に分かれるので以下では正則部分のみを考える。更に円筒から平面へ共形変換 ($z \mapsto e^z$) して, z と言えば“時間” τ と“空間” σ が $z = e^{\tau+i\sigma}$ の様に定義されているものとし, 演算子形式をとり 2 つの場の積は τ に付いての時間順序積 (動径順序積) が施されているものとする。

共形変換はエネルギー運動量テンソル $T(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} L_n z^{-n-2}$ によって生成されその代数, すなわち共形代数 (Virasoro 代数) は交換関係で書けば

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2 - 1)\delta_{n+m,0} \quad (2.1)$$

である。 c は中心荷 (central charge) と呼ばれ全ての元と可換で 1 つの既約表現内では一定の数である。(2.1) 式は演算子積展開

$$T(z)T(w) = \frac{c}{2(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} + \text{regular 項} \quad (2.2)$$

と同等である。何故なら (2.2) 式の両辺を積分 $\oint_0 \frac{dw}{2\pi i} w^{m+1} \oint_w \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1}$ すると右辺は (2.1) 式の右辺を与え, 左辺は積分路を $\oint_{0,w} \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} \oint_0 \frac{dw}{2\pi i} w^{m+1} - \oint_{0,z} \frac{dw}{2\pi i} w^{m+1} \oint_0 \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1}$ と変形する事により (2.1) 式の左辺を与えるからである。この例から分かるように交換関係には演算子積展開の regular 項は効かないので singular 項のみ問題にすればよい。実自由ボソン $\phi(z)$,

$$\phi(z) = q - ip \log z + i \sum_{n \in \mathbf{Z}, n \neq 0} \frac{\alpha_n}{n} z^{-n}$$

$$[\alpha_n, \alpha_m] = n\delta_{n+m,0}, \quad \alpha_n^\dagger = \alpha_{-n}, \quad p = \alpha_0$$

$$[q, p] = i, \quad q^\dagger = q$$

正規順序化 : : は 正の添字を右に負の添字を左に
p を右に q を左に 並べ替える.

Fock 空間の真空 $|0\rangle$ は $\alpha_n|0\rangle = 0 \quad (n \geq 0)$

$$\text{伝播関数 は } \langle \phi(z)\phi(w) \rangle = -\log(z-w) \quad (2.3)$$

に対しては $T(z) = \frac{1}{2} : (i\partial\phi(z))^2 :$ が $c = 1$ の, (NS セクターの) 実自由フェルミオン $\psi(z)$,

$$\psi(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z} + 1/2} \psi_n z^{-n-1/2}$$

$$\{\psi_n, \psi_m\} = \delta_{n+m,0}, \quad \psi_n^\dagger = \psi_{-n}$$

正規順序化 : : は 正の添字を右に負の添字を左に
符号を付けて並べ替える.

Fock 空間の真空 $|0\rangle$ は $\psi_n|0\rangle = 0 \quad (n > 0)$

$$\text{伝播関数 は } \langle \psi(z)\psi(w) \rangle = \frac{1}{z-w} \quad (2.4)$$

に対しては $T(z) = \frac{1}{2} : \partial\psi(z)\psi(z) :$ が $c = \frac{1}{2}$ の Virasoro 代数 の実現を与える。この手の計算では交換関係で計算するよりも演算子積展開 (自由場に対しては通常の Wick の定理) を用いる方が計算が簡単になる。

真空 $|0\rangle$ は $z = 0$ (時間 $\tau = -\infty$) で $T(z)$ が singular にならない事から $L_n = 0 \quad (n \geq -1)$ なる性質を持ち, L_0 と $L_{\pm 1}$ から生成される $SL(2, \mathbf{C})$ で不変である。 L_0 がエネルギーに相当するので (ハミルトニアン = $L_0 + \bar{L}_0$, 運動量 = $L_0 - \bar{L}_0$), Virasoro 代数の表現は L_0 に付いて下限が存在する最高重み表現

$$L_0|h\rangle = h|h\rangle$$

$$L_n|h\rangle = 0 \quad (n > 0) \quad (2.5)$$

を考える事にする。確率解釈を許すためにユニタリ表現 (即ち表現空間が正定値内積を持つ) が我々にとって重要である。最高重み状態を作り出す場 $\phi(z)$ (即ち $\lim_{z \rightarrow 0} \phi(z)|0\rangle = |h\rangle$) を ($T(z)$ に関する) 共形重み h のプライマリー場と言い, 交換関係

$$[L_n, \phi(w)] = w^n(w\partial + h(n+1))\phi(w) \quad (2.6)$$

で特徴付けられる。これは演算子積展開で書けば

$$T(z)\phi(w) = \frac{h\phi(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial\phi(w)}{z-w} + \text{reg.} \quad (2.7)$$

である。(2.6) 式は共形変換 ($z \mapsto w$) に対して ϕ が h 階のテンソルとして振舞う事 ($\phi(w)dw^h = \phi(z)dz^h$) を表している。(2.1) 式は T が 2 階のテンソルから異常項の分だけずれて変換する事, 即ち $T(w)dw^2 = T(z)dz^2 - \frac{c}{12}\{w, z\}dz^2$ を表している (但し $\{w, z\} = \frac{d^3w/dz^3}{dz} - \frac{3}{2}(\frac{d^2w/dz^2}{dz})^2$)。 $\phi(z) = \sum_n \phi_n z^{-n-h}$ と展開すると (h を引いているのは円筒から平面へ共形変換したため), (2.6) 式は

$$[L_n, \phi_m] = ((h-1)n - m)\phi_{n+m} \quad (2.8)$$

となる。

最高重み状態に生成演算子 L_n ($n > 0$) を順次掛けて得られる空間 (Verma 加群) が正定値な内積を備えているかを調べるのに有効な道具の一つが Kac 行列式である [19]。Kac 行列式とは L_0 の各レベルに於て状態間の内積を計算しその行列式をとったもので, 零ノルム状態を関知でき更に詳細な考察により既約ユニタリ表現として許され得る c 及び h の値を特定する事が出来る。Virasoro 代数に対しては

$$\begin{cases} c \geq 1, & h \geq 0 \\ c = 1 - \frac{6}{m(m+1)} & m = 2, 3, 4, \dots \\ h_{pq} = \frac{((m+1)p - mq)^2 - 1}{4m(m+1)} & 1 \leq q \leq p \leq m-1, \quad p, q \in \mathbf{Z} \end{cases} \quad (2.9)$$

であり [20], それぞれ連続系列, 1 に集積する離散系列と呼ばれ後者に於ては各 c に対して有限個の h が定まってしまう所が共形不変性が理論に課す制約の強さである。(2.9) 式の c, h が実際に存在する事は [4, 5] によって (フェルミオンを用いた模型により) 示された。Verma 加群内に, $c > 1$ では $h = 0$, $c = 1$ では $h = \frac{p^2}{4}$ ($p \in \mathbf{Z}$), $c < 1$ では (2.9) 式の場合に零ノルム状態が現れ, これは相関関数に対する微分方程式に置き換えられる。特に (2.9) 式ではこの微分方程式系は過剰決定系になるためやはり強い制約が課せられる事になり minimal 模型と呼ばれる [2]。

表現論に於てもう一つの大切な道具である指標公式 (L_0 の各レベルの状態数をまとめて表わしたもの) は零ノルム状態がどの様に埋め込まれているかを調べる事により求められる [21]。実際の世界面上での共形不変な模型を作るには, 正則・反正則部分の指標公式を大域的な共形変換であるモジュラー変換に対して不変になるように組み合わせる必要があり, Virasoro 代数の minimal 模型に対しては分類 (ADE 型) が完全に行なわれている [9, 10]。

理論が共形代数を含み更に大きな対称性, 例えば $N = 1, 2$ 超対称性, W_3 対称性 [12], を持つ場合にも c の値には離散と連続が存在し, 離散系列では minimal 模型となって上記の事項が調べられている。

単純コンパクト Lie 代数 \mathfrak{g}

$$[J_0^i, J_0^j] = if^{ijk} J_0^k \quad (2.10)$$

に対して Kac-Moody 代数 (アフィン Lie 代数) $\hat{\mathfrak{g}}$ とはカレント $J^i(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n^i z^{-n-1}$ ($J_n^{\dagger} = J_{-n}^i$) によって生成される代数で, その交換関係は

$$[J_n^i, J_m^j] = i f^{ijk} J_{n+m}^k + kn \delta_{n+m,0} \delta^{ij} \quad (2.11)$$

で与えられる [22, 18]。ここで k は全ての元と可換で一つの既約表現内では一定の数である。(2.11) 式は演算子積展開では

$$J^i(z) J^j(w) = \frac{k \delta^{ij}}{(z-w)^2} + \frac{i f^{ijk} J^k(w)}{z-w} + \text{reg.} \quad (2.12)$$

である。やはり最高重みユニタリ表現を考える事にする。 $\hat{\mathfrak{g}}$ の最高重み状態 $|\lambda\rangle$ とは, J_0^i については通常の Lie 代数 \mathfrak{g} の意味で最高重み状態であって J_n^i については $J_n^i (n > 0)$ で消される状態である。以下規格化として \mathfrak{g} の長いルートのノルムを 2 とする事にする。 λ がユニタリ表現となる条件は k が正整数値をとり (k は表現のレベルと呼ばれる), λ が \mathfrak{g} の全てのルート α に対し $|\alpha \cdot \lambda| \leq k$ を満たす事である。 $\hat{\mathfrak{g}}$ に対しても Kac 行列式・指標公式が分かっている [23]。

アフィン Lie 代数 $\hat{\mathfrak{g}}$ に対して Virasoro 代数を菅原形式 [24] によって構成する事が出来る [18]。 $J^i(z)$ に対して菅原形式 $T^G(z)$ とは

$$T^G(z) = \frac{1}{2(k+h^\vee)} \circ J^i(z) J^i(z) \circ \quad (2.13)$$

であり, その中心荷は $c^G = \frac{k \dim \mathfrak{g}}{k+h^\vee}$ となる。ここで h^\vee は双対 Coxeter 数 (\mathfrak{g} の随伴表現に対する 2 次の Casimir 作用素の固有値/2) で, $\circ \circ$ は $J^i(z)$ に対する正規順序化で $\circ J_n^i J_{-n}^i \circ = J_{-n}^i J_n^i (n > 0)$ とする。菅原形式 $T^G(z)$ が Virasoro 代数を実現する事は交換関係を注意深く計算する事により確かめる事が出来る。演算子積展開を用いる方法は § 3 で示すが, $J^i(z)$ が自由場でないため通常の Wick の定理は使えない事を注意しておく。勿論 $J^i(z)$ が自由場で構成されている場合には Wick の定理を用いて演算子積展開を計算すればよく, この節で考察するのはそういう場合のみである。 $J^i(z)$ は $T^G(z)$ に関して $h = 1$ のプライマリー場になっており, アフィン Lie 代数 $\hat{\mathfrak{g}}$ と菅原形式の Virasoro 代数は半直積となる。 $\hat{\mathfrak{g}}$ の最高重み状態 $|\lambda\rangle$ は, \mathfrak{g} の表現 λ に対する 2 次の Casimir 作用素の固有値を c_λ とすると, $T^G(z)$ について $h = \frac{c_\lambda}{2(k+h^\vee)}$ の最高重み状態である。

菅原形式に関する重要な性質は, \mathfrak{g} に対する菅原形式 $T^G(z)$ と \mathfrak{g} の部分代数 \mathfrak{h} に対する菅原形式 $T^H(z)$ との差 $T^{G/H}(z) = T^G(z) - T^H(z)$ が $\hat{\mathfrak{h}}$ と可換な Virasoro 代数を与えるという事である [4]。その中心荷は $c^{G/H} = c^G - c^H$ で, この方法は剰余類構成法 (coset construction) と呼ばれる。この剰余類構成法によって Virasoro 代数の離散系列の実現が与えられた。

$\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(1)$ の場合には, $\hat{\mathfrak{g}}$ は $U(1)$ Kac-Moody カレント $I(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} I_n z^{-n-1}$ ($I_n^\dagger = I_{-n}$) によって生成され, その交換関係は

$$[I_n, I_m] = kn\delta_{n+m,0} \quad (2.14)$$

で与えられ規格化 k (正の実数) を除いて実自由ボソン $i\partial\phi(z)$ と一致する。(2.14) 式は演算子積展開では

$$I(z)I(w) = \frac{k}{(z-w)^2} + \text{reg.} \quad (2.15)$$

である。 $I(z)$ に対する菅原形式は $T(z) = \frac{1}{2k} : I^2(z) :$ で $c = 1$ である。

\mathfrak{g} が単純 Lie 代数及び $u(1)$ Lie 代数のいくつかの直和でも上に述べた事は同様に成立する。 $\hat{\mathfrak{g}}$ に対応する模型では Wess-Zumino-Witten 模型があり [25], 剰余類構成法に対応する模型も考えられている [26]。

2.2 共形代数のフェルミオンによる実現

ここ (§2.2-4) で言うフェルミオンとは (NS セクターの) 自由フェルミオンの事であり, その Fock 空間に働く演算子として代数の実現を与える。計算は全て演算子積展開 (Wick の定理) の方法で行なう。

アフィン Lie 代数 $\hat{\mathfrak{g}}$ は, 自由ボソンを用いる場合は頂点演算子 (vertex operator) によって実現されるが (Kac-Frenkel 構成法) [27], フェルミオンを用いる場合はフェルミオンの双線型で実現される (カレント代数) [28, 18]。 \mathfrak{g} の実既約表現 λ に対しその表現行列 $M_{\alpha\beta}^i$ は実反対称で

$$[M^i, M^j] = f^{ijk} M^k, \quad (\text{tr} M^i M^j = -\kappa_\lambda \delta^{ij}, \quad (M^i M^i)_{\alpha\beta} = -c_\lambda \delta_{\alpha\beta}) \quad (2.16)$$

を満たすが, これに従って変換される実フェルミオン $\psi^\alpha(z)$ ($\alpha = 1, \dots, d_\lambda$) ($\langle \psi^\alpha(z) \psi^\beta(w) \rangle = \frac{\delta^{\alpha\beta}}{z-w}$) を考える。フェルミオンの双線型

$$J^i(z) = \frac{i}{2} M_{\alpha\beta}^i \psi^\alpha(z) \psi^\beta(z) = \frac{i}{2} \psi M^i \psi(z) \quad (2.17)$$

はレベル $k = \frac{1}{2}\kappa_\lambda$ の $\hat{\mathfrak{g}}$ の実現を与える。 \mathfrak{g} の既約表現 λ が複素の場合は (2.16) 式を満たす表現行列 M^i は反エルミートで, 複素フェルミオン $\psi^\alpha(z)$ ($\alpha = 1, \dots, d_\lambda$) ($\langle \bar{\psi}^\alpha(z) \psi^\beta(w) \rangle = \frac{\delta^{\alpha\beta}}{z-w}$) の双線型

$$J^i(z) = i M_{\alpha\beta}^i : \bar{\psi}^\alpha(z) \psi^\beta(z) := i : \bar{\psi} M^i \psi : (z) \quad (2.18)$$

がレベル $k = \kappa_\lambda$ の $\hat{\mathfrak{g}}$ の実現を与える。

このカレント $J^i(z)$ から作られる菅原形式 $T^G(z)$ は、特別な \mathfrak{g} に対しては自由なエネルギー運動量テンソル $\frac{1}{2} : \partial\psi^a\psi^a : (z)$ となるが [29], 一般にはフェルミオンについて4次の項を含んでいる。そこで更に群 G には拘らずに実フェルミオン $\psi^a(z)$ ($a = 1, \dots, n$) に対し次の形のエネルギー運動量テンソル

$$T(z) = A_{ab} \frac{1}{2} : \partial\psi^a\psi^b : (z) + A_{abcd}\psi^a\psi^b\psi^c\psi^d(z) \quad (2.19)$$

を考えてみる。ここで A_{ab}, A_{abcd} は実数で $A_{abcd} = A_{[abcd]}$ を満たすとする。[] は添字の反対称化で、例えば $A_{[ab]} = \frac{1}{2}(A_{ab} - A_{ba})$ である。同様に () は添字の対称化とする。これはナイーブな次元勘定から考えられる最も一般的な局所的な形である。(2.19) 式が共形代数を実現する必要十分条件は演算子積展開により

$$\begin{cases} c = \frac{1}{2}\text{tr}A + \frac{3}{4}\text{tr}A({}^tA - A) \\ A_{ab} = \frac{1}{2}(({}^tA + A)A)_{ab} - 12A_{abcd}A_{cd} + 96A_{acde}A_{bcde} \\ A_{abcd} = 2A_{e[a}A_{bcd]e} - 36A_{ef[a}A_{cd]ef} \end{cases} \quad (2.20)$$

である。 $A_{ab} = \delta_{ab}$, $A_{abcd} = 0$ としたものが自由なエネルギー運動量テンソルである。菅原形式が共形代数の実現を与える事は (2.20) 式に代入すれば確かめられる。これについては多くの解が知られていて、例えば剰余類構成法 $\hat{s}\mathfrak{u}(2)_k \oplus \hat{s}\mathfrak{u}(2)_1/\text{diagonals}\hat{s}\mathfrak{u}(2)_{k+1}$ (添字はレベル) が離散系列 $c = 1 - \frac{6}{(k+2)(k+3)}$ を与える [5]。(2.20) 式を直接解く事は難しいので (2.20) 式の新しい解については超共形代数の節で与える事にする。(2.20) 式の連続媒介変数を含む解を見い出せば理論を変形出来る事になるので興味深いであろう。

2.3 N=1 共形代数のフェルミオンによる実現

超共形代数はエネルギー運動量テンソル $T(z)$ と $T(z)$ に関して $h = \frac{3}{2}$ のプライマリ場である超カレント $G(z) = \sum_n G_n z^{-n-\frac{3}{2}}$ ($G_n^\dagger = G_{-n}$) で生成され、その交換関係は (2.1) 式, (2.8) 式 及び

$$\{G_n, G_m\} = \frac{c}{3}(n^2 - \frac{1}{4})\delta_{n+m,0} + 2L_{n+m} \quad (2.21)$$

で与えられる。(2.21) 式を演算子積展開で書けば

$$G(z)G(w) = \frac{2c}{3(z-w)^3} + \frac{2T(w)}{z-w} + \text{reg.} \quad (2.22)$$

である。\$G_n\$ はフェルミオン性のため境界条件の取り方が2通りあり、円筒でみて反周期的な \$n \in \mathbf{Z} + \frac{1}{2}\$ の場合は Neveu-Schwarz (NS) セクター、円筒でみて周期的な \$n \in \mathbf{Z}\$ の場合は Ramond (R) セクターと呼ばれる。最高重み表現

$$\begin{aligned} L_0|h\rangle &= h|h\rangle \\ L_n, G_n|h\rangle &= 0 \quad (n > 0) \end{aligned} \quad (2.23)$$

の離散系列は

$$c = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{8}{m(m+2)}\right), \quad m = 3, 4, \dots \quad (2.24)$$

で与えられる [20]。一組の実自由ボソン \$\phi(z)\$ と実自由フェルミオン \$\psi(z)\$ によって実現される \$N = 1\$ 超共形代数 \$T(z) = \frac{1}{2} : (i\partial\phi)^2 : (z) + \frac{1}{2} : \partial\psi\psi : (z)\$, \$G(z) = \sqrt{2}\psi i\partial\phi(z)\$ は (2.24) 式の集積値 \$c = \frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}\$ を持つ。

実フェルミオン \$\psi^a(z)\$ (\$a = 1, \dots, n\$) に対し、超カレント \$G(z)\$ としてフェルミオンの3重線型

$$G(z) = -i\eta_{abc}\psi^a\psi^b\psi^c(z) \quad (2.25)$$

の形を考えてみる。ここで \$\eta_{abc}\$ は実数で \$\eta_{abc} = \eta_{[abc]}\$ を満たす。次元勘定からは \$i\partial\psi^a(z)\$ なる項も考えられるが、これについては後で述べる。\$\eta_{abc}\eta_{a'bc}\$ は半正定値実対称行列なので適当な実対称行列で対角化する事が出来る。それ故一般性を失う事なく \$\eta_{abc}\eta_{a'bc} = x_a\delta_{aa'}\$ としてよい。更に、ある \$a\$ について \$x_a = 0\$ とすると全ての \$b, c\$ について \$\eta_{abc} = 0\$ となり \$\psi^a\$ が分離するので、\$x_a > 0\$ としてよい。

\$GG\$ の演算子積展開 (2.22) 式によって \$T(z)\$ を定義すると、\$T(z)\$ は (2.19) 式の形をとり

$$\begin{aligned} A_{ab} &= 18x_a\delta_{ab} \\ A_{abcd} &= -\frac{9}{2}\eta_{ea[b}\eta_{cd]e} \end{aligned} \quad (2.26)$$

となる。共形代数の場合と違って \$A_{ab}, A_{abcd}\$ は一つの \$\eta_{abc}\$ で書かれてしまうのである。そして \$T(z), G(z)\$ が超共形代数になる必要十分条件は

$$\begin{cases} \frac{2}{3}c = 6\sum_a x_a \\ \eta_{abc} = 18(x_a + x_b + x_c)\eta_{abc} - 72\eta_{ade}\eta_{bdf}\eta_{cef} \end{cases} \quad (2.27)$$

である。第2式の右辺は恒等的に \$6(x_a + x_b + x_c)\eta_{abc} - 24A_{de[ab}\eta_{c]de}\$ に等しい。(2.27) 式の一連の解が

$$\eta_{abc} = Af_{abc}, \quad \eta_{a\alpha\beta} = BM_{\alpha\beta}^a \quad (2.28)$$

によって与えられる。ここで f_{abc} は単純 Lie 代数 \mathfrak{g} の構造定数で ($a = 1, \dots, d_G$, $f_{abc}f_{a'bc} = c_{adj}\delta_{ab}$), $M_{\alpha\beta}^a$ は (2.16) 式を満たす実反対称な \mathfrak{g} の表現行列で (2.28) 式の第 2 式は $\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\beta\alpha} = \eta_{\beta\alpha\alpha} = -\eta_{\alpha\alpha\beta} = -\eta_{\beta\alpha\alpha} = -\eta_{\alpha\beta\alpha} = BM_{\alpha\beta}^a$ の意味である。 $A = \frac{1}{3\sqrt{2c_{adj}}}$, $B = 0$ では $\frac{2}{3}c = \frac{d_G}{3}$ で $T(z)$ は自由なエネルギー運動量テンソルとなる [7]。 $A = \frac{\kappa_\lambda}{3\sqrt{2c_{adj}(\kappa_\lambda+c_{adj})(\kappa_\lambda+2c_{adj})}}$, $B = \frac{c_{adj}}{3\sqrt{2c_{adj}(\kappa_\lambda+c_{adj})(\kappa_\lambda+2c_{adj})}}$ の場合は $\frac{2}{3}c = \frac{\kappa_\lambda(\kappa_\lambda+3c_{adj})d_G}{3(\kappa_\lambda+c_{adj})(\kappa_\lambda+2c_{adj})}$ を与え, $T(z)$ は菅原形式の差で書かれる [5]。例えば \mathfrak{g} として $su(2)$, 表現 λ として定義表現の k 個の直積をとると, 離散系列の $\frac{2}{3}c = 1 - \frac{8}{(k+2)(k+4)}$ が得られる [5]。 $A = 0$, $B = \frac{1}{3\sqrt{2(\kappa_\lambda+2c_{adj})}}$ では $\frac{2}{3}c = \frac{\kappa_\lambda d_G}{\kappa_\lambda+2c_{adj}}$ で $T(z)$ はカレントで書く事が出来る。

超カレントが次元勘定から考えられる $i\partial\psi^a(z)$ なる項を含む場合には, ユニタリ性 ($G_n^\dagger = G_{-n}$) を満たす為には $\frac{1}{2}iz^{-1}\psi(z)$ と言う項を付け加えなければならない。この様な z のべきが現れる項があるとエネルギー運動量テンソルは (2.19) 式の形をはみ出す事になるので, 本論文ではこの項は考えない事にする。

2.4 N=2 共形代数のフェルミオンによる実現

$N = 2$ 超共形代数はエネルギー運動量テンソル $T(z)$ と 2つの実超カレント $G^i(z)$ ($i = 1, 2$) と, この2つの超カレントを回転させる $T(z)$ について $h = 1$ のプライマリー場である $SO(2)$ Kac-Moody カレント J^{ij} , 即ち $U(1)$ Kac-Moody カレント $I(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} I_n z^{-n-1}$ ($I_n^\dagger = I_{-n}$) で生成され, その交換関係は (2.1) 式, (2.8) 式及び

$$\begin{aligned} \{G_n^i, G_m^j\} &= \delta^{ij} \left(\frac{c}{3} \left(n^2 - \frac{1}{4} \right) \delta_{n+m,0} + 2L_{n+m} \right) + i\varepsilon^{ij} (n-m) I_{n+m} \\ [I_n, I_m] &= kn \delta_{n+m,0} \quad (k = \frac{c}{3}) \\ [I_n, G_m^i] &= i\varepsilon^{ij} G_{n+m}^j \quad (\varepsilon^{12} = -\varepsilon^{21} = 1) \end{aligned} \quad (2.29)$$

で与えられる。(2.29) 式を演算子積展開で書けば

$$\begin{aligned} G^i(z)G^j(w) &= \delta^{ij} \left(\frac{2c}{3(z-w)^3} + \frac{2T(w)}{z-w} \right) + i\varepsilon^{ij} \left(\frac{2I(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial I(w)}{z-w} \right) + \text{reg.} \\ I(z)I(w) &= \frac{c}{3(z-w)^2} + \text{reg.} \\ I(z)G^i(w) &= \frac{1}{z-w} i\varepsilon^{ij} G^j(w) + \text{reg.} \end{aligned} \quad (2.30)$$

である。又は $U(1)$ 電荷が見易いように超カレントを複素に組むと $(G(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(G^1 + iG^2)(z), \bar{G}(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(G^1 - iG^2)(z))$, (2.29) 式, (2.30) 式は

$$\begin{aligned}
\{G_n, \bar{G}_m\} &= \frac{c}{3}(n^2 - \frac{1}{4})\delta_{n+m,0} + (n-m)I_{n+m} + 2L_{n+m} \\
[I_n, I_m] &= \frac{c}{3}n\delta_{n+m,0} \\
[I_n, G_m] &= G_{n+m}, \quad [I_n, \bar{G}_m] = -\bar{G}_{n+m} \\
\{G_n, G_m\} &= \{\bar{G}_n, \bar{G}_m\} = 0 \\
G(z)\bar{G}(w) &= \frac{2c}{3(z-w)^3} + \frac{2I(w)}{(z-w)^2} + \frac{1}{z-w}(\partial I(w) + 2T(w)) + \text{reg.} \\
I(z)I(w) &= \frac{c}{3(z-w)^2} + \text{reg.} \\
I(z)G(w) &= \frac{1}{z-w}G(w) + \text{reg.}, \quad I(z)\bar{G}(w) = \frac{-1}{z-w}\bar{G}(w) + \text{reg.} \\
G(z)G(w) &= \text{reg.}, \quad \bar{G}(z)\bar{G}(w) = \text{reg.}
\end{aligned} \tag{2.31}$$

となる。この場合の最高重み表現

$$\begin{aligned}
L_0|h Q\rangle &= h|h Q\rangle, \quad I_0|h Q\rangle = Q|h Q\rangle \\
L_n, I_n, G_n, \bar{G}_n|h Q\rangle &= 0 \quad (n > 0)
\end{aligned} \tag{2.32}$$

は h と $U(1)$ 電荷 Q で特徴付けられ、離散系列は

$$c = 3(1 - \frac{2}{m}), \quad m = 3, 4, \dots \tag{2.34}$$

で与えられる [30, 6]。一組の複素自由ボソン $\phi(z)$ と複素自由フェルミオン $\psi(z)$ によって実現される $N = 2$ 超共形代数 $T(z) =: i\partial\bar{\phi}i\partial\phi : (z) + \frac{1}{2} : (\partial\bar{\psi}\psi - \bar{\psi}\partial\psi) : (z)$, $G(z) = \sqrt{2}\psi i\partial\phi(z)$ は (2.34) 式の集積値 $c = 3 = 1 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2$ を持つ。

実フェルミオン $\psi^a(z)$ ($a = 1, \dots, n$) に対し、実超カレント $G^i(z)$ ($i = 1, 2$) としてフェルミオンの 3 重線型

$$G^i(z) = -i\eta_{abc}^{(i)}\psi^a\psi^b\psi^c(z) \tag{2.35}$$

の形を考へてみる。ここで $\eta_{abc}^{(i)}$ は実数で $\eta_{abc}^{(i)} = \eta_{[abc]}^{(i)}$ を満たす。これはフェルミオンの 3 重線型として最も一般的な形であり、 $i\partial\psi^a$ の項は前節同様考へない事にす。前と同様に $\eta_{abc}^{(1)}\eta_{a'bc}^{(1)} = x_a\delta_{aa'}$ で $x_a > 0$ とすよ。 $G^{(1)}G^{(i)}$ の演算子積展開 (2.30) 式によつて、 $T(z)$ は (2.19) 式の形で

$$\begin{aligned}
A_{ab} &= 18x_a\delta_{ab} \\
A_{abcd} &= -\frac{9}{2}\eta_{ea[b}\eta_{cd]e}^{(1)}
\end{aligned} \tag{2.36}$$

に, $I(z)$ は

$$I(z) = B_{ab}\psi^a\psi^b(z), \quad B_{ab} = B_{[ab]} = -9i\eta_{cd[a}\eta_{b]cd}^{(2)} \quad (2.37)$$

に定まる。そして $T(z), G^i(z), I(z)$ が $N = 2$ 超共形代数になる必要十分条件は

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{c}{3} = 3\sum_a x_a = 2\text{tr}B^2 \\ \eta_{abc}\eta_{a'bc}^{(2)} = x_a\delta_{aa'} \\ \eta_{ea[b}\eta_{cd]e}^{(1)} = \eta_{ea[b}\eta_{cd]e}^{(2)} \\ \eta_{e[ab}\eta_{cd]e}^{(1)} = 0, \quad \eta_{cd(a}\eta_{b)cd}^{(2)} = 0 \\ \eta_{abc}B_{bc} = 0, \quad \eta_{abc} + 6i\varepsilon^{ij}B_{d[a}\eta_{bc]d}^{(j)} = 0 \\ A_{e[abc}B_{d]e} = 0 \\ B_{ab} = 9(x_a + x_b)B_{ab} + 12A_{abcd}B_{cd} \\ x_a B_{ab} = x_b B_{ab} \end{array} \right. \quad (2.38)$$

及び $\eta_{abc}^{(i)}$ に対する条件 (2.27) 式である。これは余りにも複雑なので、次に複素フェルミオンを用いてみる事にする。

複素フェルミオン $\psi^a(z)$ ($a = 1, \dots, n$) に対し, 超カレント $G(z)$ としてフェルミオンの3重線型

$$G(z) = -i\eta_{abc}\psi^a\psi^b\psi^c(z) \quad (2.39)$$

の形を考えてみる。ここで η_{abc} は複素数で $\eta_{abc} = \eta_{[abc]}$ を満たす。 $\eta_{abc}\eta_{a'bc}$ は半正定値エルミート行列なので適当なユニタリ行列によって対角化出来る。よって前と同様に $\eta_{abc}\eta_{a'bc} = x_a\delta_{aa'}$ で $x_a > 0$ としてよい。(2.39) 式に対しては GG の演算子積展開は自明に満たされている。 G と $\bar{G}(z) = -i\bar{\eta}_{abc}\bar{\psi}^a\bar{\psi}^b\bar{\psi}^c(z)$ の演算子積展開から $T(z)$ と $I(z)$ は

$$\begin{aligned} T(z) &= 9x_a L^a(z) - \frac{9}{2}\eta_{abc}\bar{\eta}_{ab'c'} : \psi^b\psi^c\bar{\psi}^{b'}\bar{\psi}^{c'} : (z) \\ I(z) &= 9x_a : \psi^a\bar{\psi}^a : (z) \end{aligned} \quad (2.40)$$

によって定まる。ここで $L^a(z)$ は自由なエネルギー運動量テンソル $L^a(z) = \frac{1}{2} : (\partial\bar{\psi}^a\psi^a - \bar{\psi}^a\partial\psi^a) : (z)$ である。そして T, G, \bar{G}, I が $N = 2$ 超共形代数になる必要十分条件は

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{c}{3} = 3\sum_a x_a = 81\sum_a x_a^2 \\ \eta_{abc} = 9(x_a + x_b + x_c)\eta_{abc} \end{array} \right. \quad (2.41)$$

である。この最初の式は共形代数と $U(1)$ Kac-Moody 代数の中心の関係 ($k = \frac{c}{3}$) に由来し, 次の式は G が $U(1)$ 電荷 1 を持つ事を意味する。この式は (2.38) 式に比べて遙かに簡単である。

(2.28) 式は (2.41) 式の解になっている。 $2d_G \geq d_\lambda$ と仮定して $A = \frac{\sqrt{2d_G - d_\lambda}}{3\sqrt{6d_G c_{adj}}}$, $B = \frac{1}{3\sqrt{6c_\lambda}}$ は中心荷 $\frac{c}{3} = \frac{d_G + d_\lambda}{9}$ を与える。 $A = \frac{1}{3\sqrt{3c_{adj}}}$, $B = 0$ とすると $\frac{c}{3} = \frac{d_G}{9}$ であって $T(z)$ は $\sum_a L^a$ - 菅原形式で書かれる [30, 31]。 $A = 0$ については次の段落で考察する。

(2.39) 式の特別な場合として

$$G(z) = -i\eta_{\alpha\beta}\psi^a\chi^\alpha\chi^\beta(z) \quad (2.42)$$

を考えてみる。ここで $\eta_{a\alpha\beta}$ ($a = 1, \dots, n$; $\alpha = 1, \dots, m$) は複素数で $\eta_{a\alpha\beta} = \eta_{a[\alpha\beta]}$ を満たす。やはり対角化して $\eta_{a\alpha\beta}\bar{\eta}_{a'\alpha\beta} = x_a\delta_{aa'}$, $\eta_{a\alpha\beta}\bar{\eta}_{a\alpha'\beta} = y_\alpha\delta_{\alpha\alpha'}$ で, $x_a, y_\alpha > 0$ とする。すると (2.41) 式は

$$\begin{cases} \frac{c}{3} = \sum_a x_a = \sum_\alpha y_\alpha = \sum_a x_a^2 + 4\sum_\alpha y_\alpha^2 \\ \eta_{a\alpha\beta} = (x_a + 2(y_\alpha + y_\beta))\eta_{a\alpha\beta} \end{cases} \quad (2.43)$$

となる。

これに対する十分条件を考えてみる。もし x_a, y_α が a, α に依らなければ, つまり

$$\begin{cases} \eta_{a\alpha\beta}\bar{\eta}_{a'\alpha\beta} = \frac{m}{4n+m}\delta_{aa'} \\ \eta_{a\alpha\beta}\bar{\eta}_{a\alpha'\beta} = \frac{n}{4n+m}\delta_{\alpha\alpha'} \end{cases} \quad (2.44)$$

を満たす $\eta_{a\alpha\beta}$ を見つけられたならば, それは (2.43) 式の解であって

$$\frac{c}{3} = \frac{nm}{4n+m} \quad (2.45)$$

を与える。(2.44) 式から n と m は $n \leq \frac{1}{2}m(m-1)$ を満たさなければならない。例えば, $M_{\alpha\beta}^a$ を (2.16) 式を満たす実反対称行列とすると, $\eta_{a\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{\kappa_\lambda + 4c_\lambda}}M_{\alpha\beta}^a$ は (2.44) 式を満たしており, $\frac{c}{3} = \frac{d_G d_\lambda}{4d_G + d_\lambda}$ を与える。特に随伴表現を取れば ($\eta_{abc} = \frac{-1}{\sqrt{5c_{adj}}}f_{abc}$), $\frac{c}{3} = \frac{d_G}{5}$ である。 $n = 1$ の場合には, m は偶数で $\eta_{a\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{m+4}} \times$ (ユニタリ反対称行列) $_{\alpha\beta}$ と成る事が簡単な考察で分かる。例えば

$$\eta_{1\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{m+4}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1}_{\frac{m}{2}} \\ -\mathbf{1}_{\frac{m}{2}} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{\alpha\beta} \quad (2.46)$$

にとると, 剰余類構成法 $\hat{su}(2)_{\frac{m}{2}} \oplus \hat{u}(1)/\hat{u}(1)$ に成り全ての離散系列 $\frac{c}{3} = 1 - \frac{2}{\frac{m}{2}+2}$

が得られる [6]。 $n = 2$ で m が 4 以上の偶数に対しては、

$$\eta_{1\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{m+8}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1}_{\frac{m}{2}} \\ -\mathbf{1}_{\frac{m}{2}} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{\alpha\beta}, \quad \eta_{2\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{m+8}} \begin{pmatrix} i\sigma_2 & & & 0 \\ & 0 & & i\sigma_2 \\ & & \ddots & \\ 0 & i\sigma_2 & & 0 \end{pmatrix}_{\alpha\beta} \quad (2.47)$$

は $\frac{c}{3} = \frac{2m}{m+8}$ を与える。

更に (2.42) 式の特別な場合として

$$G(z) = -i\eta_{a\alpha p} \psi^a \chi^\alpha \varphi^p(z) \quad (2.48)$$

を考えてみる。ここで $\eta_{a\alpha p}$ ($a = 1, \dots, n$; $\alpha = 1, \dots, m$; $p = 1, \dots, l$) は複素数である。やはり対角化して $\eta_{a\alpha p} \bar{\eta}_{a'\alpha p} = x_a \delta_{aa'}$, $\eta_{a\alpha p} \bar{\eta}_{a\alpha' p} = y_\alpha \delta_{\alpha\alpha'}$, $\eta_{a\alpha p} \bar{\eta}_{a\alpha p'} = z_p \delta_{pp'}$ で、 $x_a, y_\alpha, z_p > 0$ とする。すると (2.41) 式は

$$\begin{cases} \frac{c}{3} = \frac{1}{2} \sum_a x_a = \frac{1}{2} \sum_\alpha y_\alpha = \frac{1}{2} \sum_p z_p \\ = \frac{1}{4} (\sum_a x_a^2 + \sum_\alpha y_\alpha^2 + \sum_p z_p^2) \\ \eta_{a\alpha p} = \frac{1}{2} (x_a + y_\alpha + z_p) \eta_{a\alpha p} \end{cases} \quad (2.49)$$

となる。

再びこれに対する十分条件を考えてみる。もし x_a, y_α, z_p が a, α, p に依らなければ、つまり

$$\begin{cases} \eta_{a\alpha p} \bar{\eta}_{a'\alpha p} = \frac{2ml}{nm+ml+ln} \delta_{aa'} \\ \eta_{a\alpha p} \bar{\eta}_{a\alpha' p} = \frac{2ln}{nm+ml+ln} \delta_{\alpha\alpha'} \\ \eta_{a\alpha p} \bar{\eta}_{a\alpha p'} = \frac{2nm}{nm+ml+ln} \delta_{pp'} \end{cases} \quad (2.50)$$

を満たす $\eta_{a\alpha p}$ を見つけれられたならば、それは (2.49) 式の解であって

$$c = \frac{3}{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{l}} \quad (2.51)$$

を与える。(2.50) 式から n, m, l は $n \leq ml, m \leq ln, l \leq nm$ を満たさなければならぬ。例えば、 $n = d_G, m = l = d_\lambda$ に対して $M_{\alpha\beta}^a$ を (2.16) 式を満たす反エルミート行列とすると、 $\eta_{a\alpha\beta} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\kappa_\lambda + 2c_\lambda}} M_{\alpha\beta}^a$ は (2.50) 式を満たしており、 $\frac{c}{3} = \frac{d_G d_\lambda}{2d_G + d_\lambda}$ を与える。特に随伴表現を取れば ($\eta_{abc} = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3c_{adj}}} f_{abc}$), $\frac{c}{3} = \frac{d_G}{3}$ である。 $l = 1$ の場合には、 $n = m$ と成る事が簡単な考察で分かり、 $\eta_{ab1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n+2}} \delta_{ab}$ とした

ものが前段落で得られた (2.46) 式 $\frac{c}{3} = 1 - \frac{2}{n+2}$ である。 $l = 2$ で $n = m \geq 2$ に対しては, $\eta_{ab1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n+4}}\delta_{ab}$, $\eta_{ab2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n+4}} \times (\text{トレースレスユニタリ行列})_{ab}$ にとると $\frac{c}{3} = \frac{2n}{n+4}$ を与える。 $l = 2$ で $n \neq m$ に対しては, 例えば $\eta_{a\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{5}}\sigma_{\alpha\beta}^a$ ($\sigma_{\alpha\beta}^4 = \delta_{\alpha\beta}$, $n = 4, m = 2$) が $\frac{c}{3} = \frac{4}{5}$ の解を与える。他にも $n = m = l$ に対して $\frac{c}{3} = \frac{n}{3}$ を与える $\eta_{abc} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3n^3}} \sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i \frac{k}{n}(a+b+c-3)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3n}} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{a+b+c-3, kn}$ や, m と l とが互いに素で $n = ml$ の場合に $\frac{c}{3} = \frac{ml}{m+l+1}$ を与える $\eta_{a\alpha p} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m+l+1}} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i \frac{k}{n}(a-1+l(\alpha-1)+m(p-1))}$ 等の解が存在する。

2.5 議論

この節でやった事は, フェルミオンによって (超) 共形代数が実現される条件を $T(z)$ や $G(z)$ の係数に対する条件として書き下したという事である。これによって (超) 共形代数の実現を求める問題が, 代数方程式 (2.20) 式, (2.27) 式, (2.41) 式 等の解を求める問題に帰着されたわけである。特に $N = 2$ 超共形代数で複素フェルミオンを (2.39) 式のように用いた場合は条件式が簡単になり, いくつかの新しい解を見つける事が出来た。しかしながらその理論にどのようなプライマリー場が存在するかは各々の場合に個別に考察しなければならず, しかも簡単ではない。この点について群に基礎を置く模型は優れている。それはアフィン Lie 代数の表現にどのようなものが存在するかが知られており, アフィン Lie 代数の最高重み状態から (超) 共形代数の最高重み状態を §2.1 で述べた様に構成できるからである。又, 指標公式についてもアフィン Lie 代数の指標公式から (超) 共形代数の指標公式を引き出す事が出来るのである [5]。 [5] では共形及び $N = 1$ 超共形代数について調べている。 [32] では超 Kac-Moody 代数に基礎を置いて, エルミート対称空間の分類を用いて $N = 2$ 超共形代数を調べている。剰余類構成法の最高重み状態を調べる事はこれで良いのだが, その状態を作り出すプライマリー場を演算子として具体的に書けるかという又別問題である [33]。もしこれが何かまとまった形で書ければ演算子積展開の係数 [34, 35] を求める別の方法を与える事が出来るであろう。

3 超共形代数の W 代数的拡張

共形代数の拡張としては超共形代数の様な Lie 代数的拡張と、パラフェルミオン [36, 37] のような非局所的な演算子積展開を持つ為に通常の交換関係としては書き表されない様な拡張と、交換関係として書き表せるが Lie 代数的でない W 代数的拡張 [12] が知られている。本節では結合律を手掛かりにして W 代数的拡張について考察する。

3.1 W 代数とは

交換関係を実際に計算するよりもそれと同等な演算子積展開を用いる方が計算が容易になる事は §2 で述べたのだが、§2 では自由場に対する場合 (Wick の定理) しか扱っていなかった。§3,4 では一般の場合が必要になるので、まず演算子積展開についての復習から始める。演算子積展開としてはカットが現れないもの、言い替えると交換関係で書き表せるものだけを考える事にする。共形重み $h (\in \frac{1}{2}\mathbf{Z})$ を持つ場 $A(z)$ (プライマリー場でなくてもよい) に対して、モード展開を

$$A(z) = \sum_n A_n z^{-n-h} \quad \begin{cases} n \in \mathbf{Z} & \begin{cases} h \in \mathbf{Z} \\ h \in \mathbf{Z} + \frac{1}{2} \text{ で R セクター} \end{cases} \\ n \in \mathbf{Z} + \frac{1}{2} & h \in \mathbf{Z} + \frac{1}{2} \text{ で NS セクター} \end{cases} \quad (3.1)$$

とし (例外 $T(z) = \sum_n L_n z^{-n-2}$), $A_n^\dagger = \bar{A}_{-n}$ とする。2つの場 $A(z), B(z)$ の演算子積展開を“等式”として

$$A(z)B(w) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{\{AB\}_n(w)}{(z-w)^n} \quad (3.2)$$

と書く事にし、正規順序積 $(AB)(z)$ を

$$(AB)(z) = \oint_z \frac{dx}{2\pi i} \frac{1}{x-z} A(x)B(z) \quad (3.3)$$

で定義する [38]。これは $(AB)(z) = \{AB\}_0(z)$ という事で、通常の正規順序化 $::$ とは必ずしも一致しないが、演算子積展開の観点からは自然な定義である。以下では NS セクターのみを考える事にする。 $(AB)(z)$ のモード展開は (3.1) 式, (3.3) 式で積分路を変形し $\frac{1}{x-z}$ をべき展開する事により

$$(AB)_n = \sum_{p \leq -h_A} A_p B_{n-p} + (-1)^{AB} \sum_{p > -h_A} B_{n-p} A_p \quad (3.4)$$

となる。

交換関係が矛盾なく定義される為には Jacobi 律が満たされなければならないが、これを演算子積展開の言葉で言うと演算子積の結合律が満たされるという事である。つまり3つの場の積 $A(x)B(z)C(w)$ が引数の近づけ方に依らず定義されているという事である。この情報を引き出す際に、 $A(x)B(z)C(w)$ が引き数の差（例えば $x-w, z-w$ ）2つの関数である為に安易にやると間違えてしまうが、積分すれば正しい結果が得られる。例えば $A(x)B(z)C(w)$ を積分 $\oint_{z,w} \frac{dx}{2\pi i} (x-w)^n \oint_w \frac{dz}{2\pi i} (z-w)^m$ して積分路を変形

$$(3.5)$$

すると、左辺が右辺の2項に等しいという結合律の式が得られる。この結果に付いては補遺 A にまとめてある。例として菅原形式を確かめてみる事にする。(2.12) 式は本節の記号で

$$\{J^i J^j\}_2(z) = k\delta^{ij}, \quad \{J^i J^j\}_1(z) = i f^{ijk} J^k(z) \quad (3.6)$$

と書かれる。菅原形式を $T(z) = \frac{1}{2(k+h^\vee)}(J^i J^i)(z)$ で定義すると、まず J^i と T の演算子積展開は (A.5) 式を用いて

$$\begin{aligned} \{J^i T\}_2 &= \frac{1}{2(k+h^\vee)} \{J^i (J^j J^j)\}_2 \\ &= \frac{1}{2(k+h^\vee)} ((J^j \{J^i J^j\}_2) + \{\{J^i J^j\}_1 J^j\}_1 + (\{J^i J^j\}_2 J^j)) \\ &= J^i \\ \{J^i T\}_1 &= \frac{1}{2(k+h^\vee)} \{J^i (J^j J^j)\}_1 \\ &= \frac{1}{2(k+h^\vee)} ((J^j \{J^i J^j\}_1) + (\{J^i J^j\}_1 J^j)) = 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

となる事、つまり $J^i(z)T(w) = \frac{1}{(z-w)^2} J^i(w) + \text{reg.}$ が分かる。 TT についても同様にして、例えば

$$\begin{aligned} \{TT\}_4 &= \frac{1}{2(k+h^\vee)} \{T(J^i J^i)\}_4 \\ &= \frac{1}{2(k+h^\vee)} (\{\{T J^i\}_1 J^i\}_3 + 3\{\{T J^i\}_2 J^i\}_2) \\ &= \frac{1}{2} \frac{k \dim \mathfrak{g}}{k+h^\vee} \end{aligned} \quad (3.8)$$

の様にして確かめる事が出来る。

これと本質的に同じであるが演算子積展開の式を真空 $|0\rangle$ に掛けて、消滅演算子を演算子積展開から導かれる交換関係を使って右側に移動させて計算する方法があり [2], 実際の計算ではこの方法が一番簡単な様である。真空 $|0\rangle$ は $A_n|0\rangle = 0$ ($n > -h_A$) なる性質を持っており, 恒等関数 $\mathbf{1}(z)$ と真空 $|0\rangle$ を対応させ, 場 $A(z)$ と状態 $|A\rangle = \lim_{z \rightarrow 0} A(z)|0\rangle$ を対応させる。 $A(z)$ に対して作用素 \hat{A}_n を

$$\hat{A}_n B(z) = \oint_z \frac{dx}{2\pi i} (x-z)^{n+h_A-1} A(x) B(z) = \{AB\}_{n+h_A}(z) \quad (3.9)$$

で定義すると, \hat{A}_n は A_n と同じ交換関係を満たすので \hat{A}_n と A_n が対応する事になる。やはり例として菅原形式をとってみると, $|T\rangle = \frac{1}{2(k+h^\vee)} (J^i J^i)_{-2} |0\rangle = \frac{1}{2(k+h^\vee)} J_{-1}^i J_{-1}^i |0\rangle$ なので

$$\begin{aligned} J^i(z)|T\rangle &= (z^{-3} J_2^i + z^{-2} J_1^i + z^{-1} J_0^i) \frac{1}{2(k+h^\vee)} J_{-1}^j J_{-1}^j |0\rangle + \text{reg.} \\ &= z^{-2} J_{-2}^i |0\rangle + \text{reg.} \end{aligned} \quad (3.10)$$

となって $J^i(z)T(w) = \frac{1}{(z-w)^2} J^i(w) + \text{reg.}$ を得る。又は (3.4) 式を用いて

$$\begin{aligned} T(z)|J^i\rangle &= \frac{1}{2(k+h^\vee)} (z^{-3} (J^j J^j)_1 + z^{-2} (J^j J^j)_0 + z^{-1} (J^j J^j)_{-1}) J_{-1}^i |0\rangle + \text{reg.} \\ &= \frac{1}{2(k+h^\vee)} (z^{-3} (J_1^j J_0^j + J_0^j J_1^j) + z^{-2} (2J_{-1}^j J_1^j + J_0^j J_0^j) \\ &\quad + z^{-1} (2J_{-1}^j J_0^j + 2J_{-2}^j J_1^j)) J_{-1}^i |0\rangle + \text{reg.} \\ &= (z^{-2} J_{-1}^i + z^{-1} J_{-2}^i) |0\rangle + \text{reg.} \end{aligned} \quad (3.11)$$

としてもよい。 TT に付いても同様である。(3.11) 式の形の演算子積展開から通常の $T(z)J^i(w) = \frac{1}{(z-w)^2} J^i(w) + \frac{1}{z-w} \partial J^i(w) + \text{reg.}$ を得るには (3.9) 式を用いればよい。

W 代数の話に移る事にする。理論に整数又は半整数の共形重みを持つカイラルプライマリー場が存在すれば, 理論は新たに無限個の保存量を持つ事になる。そこで Zamolodchikov は共形代数に整数又は半整数の共形重みを持つプライマリー場を生成元として添加する事によって代数を拡張する事を考えた [12]。代数を拡張する際には代数が閉じる事と, 代数が矛盾しない様に結合律が要請される。 $h = \frac{1}{2}$ だけを加えた場合には自由フェルミオン, $h = 1$ では Virasoro-Kac-Moody 代数 (半直積), $h = \frac{3}{2}$ では超共形代数, $h = 2$ では共形代数の直和となる。これらの場合では拡張された代数は Lie 代数であるが, $h = \frac{5}{2}$ や $h = 3$ では Lie 代数にならない。この状況を $h = \frac{5}{2}$ ($W_{\frac{5}{2}}$ 代数と呼ぶ) を例にとって説明してみる。

$T(z)$ に関する $h = \frac{5}{2}$ のプライマリー場を $U(z)$ と書く事にする。未知の演算子積展開は UU だけである。代数が T と U だけで閉じるという要請 (つまり (3.12) 式の右辺で L_n と U_n のみ現れる) から, UU の演算子積展開は (真空 $|0\rangle$ に掛けた形で)

$$U(z)|U\rangle = (z^{-5}a_1 + z^{-3}a_2L_{-2} + z^{-2}a_3L_{-3} + z^{-1}(a_4L_{-4} + a_5L_{-2}^2)) |0\rangle + \text{reg.} \quad (3.12)$$

と仮定される。確かめなければならない結合律は TUU と UUU の2つである。 TUU を確かめるには, (3.12) 式に L_1 と L_2 を掛けてみればよい (又は $\{UU\}_n$ に \hat{L}_1, \hat{L}_2 すればよい)。何故なら, L_0 は共形重みを計るものなので (3.12) 式ではうまくいく様に仮定してあり, L_{-1} は微分になるという事を既に知っており, L_n ($n \leq -2$) は新しい状態 (descendants) を作り出す (演算子積展開の regular 項を捨てる) ものなので確かめる必要がなく, L_1 と L_2 が満たされたならば (2.1) 式を用いて L_3, L_4, \dots が満たされるからである。 L_1, L_2 を掛けるとは, (3.12) 式の右辺は直接計算し, 左辺では $U(z)$ との交換関係を用いて計算するという意味である。つまり

$$\begin{aligned} L_1U(z)|U\rangle &= L_1((3.12) \text{ 式の右辺}) \\ &\parallel = (z^{-2}4a_3L_{-2} + z^{-1}(5a_4 + 3a_5)L_{-3}) |0\rangle + \text{reg.} \\ z(z\partial + 5)U(z)|U\rangle + U(z)L_1|U\rangle & \\ = (z^{-2}2a_2L_{-2} + z^{-1}3a_3L_{-3}) |0\rangle + \text{reg.} & \end{aligned} \quad (3.13)$$

という事である。この両辺の各項が等しいとおくと (縮退が無いとする), a_i に対する条件式が得られる。 L_2 についても同様に a_i に対する条件式が得られ, これらを解くと a_i が中心荷 c と規格化 a_1 で

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{5}{c}a_1 & a_4 &= \frac{15(c-1)}{2c(5c+22)}a_1 \\ a_3 &= \frac{5}{2c}a_1 & a_5 &= \frac{135}{2c(5c+22)}a_1 \end{aligned} \quad (3.14)$$

と表される。この内の $2a_3 = a_2$ という関係は (3.12) 式を通常の演算子積展開の形 $U(z)U(w) = \frac{a_1}{(z-w)^5} + \frac{a_2}{(z-w)^3}T(w) + \frac{a_3}{(z-w)^2}\partial T(w) + \frac{1}{z-w}(a_4\frac{1}{2}\partial^2 T(w) + a_5(TT)(w)) + \text{reg.}$ に書いて, $U(z)U(w) = -U(w)U(z)$ に注意すれば得る事が出来る。 $a_1 = 0$ では相互作用しなくなるので以下 $a_1 \neq 0$ とする。次に UUU を確かめるには (3.12) 式に $U_{-\frac{3}{2}}$ を掛ければよい。何故なら前と同様に $U_{-\frac{3}{2}}$ が満たされれば L_1 を掛け

る事によって $U_{-\frac{1}{2}}, U_{\frac{1}{2}}, \dots$ が満たされるからである。(3.12) 式に $U_{-\frac{3}{2}}$ を掛けると

$$\begin{aligned}
U_{-\frac{3}{2}}U(z)|U\rangle &= U_{-\frac{3}{2}}((3.12) \text{ 式 の右辺}) \\
\parallel &= (z^{-3}\frac{3}{2}a_2U_{-\frac{7}{2}} + z^{-2}3a_3U_{-\frac{9}{2}} \\
\parallel &\quad + z^{-1}(3a_5L_{-2}U_{-\frac{7}{2}} + (\frac{9}{2}a_4 - \frac{3}{4}a_5)U_{-\frac{11}{2}})) |0\rangle + \text{reg.} \\
(a_4\frac{1}{2}\partial^2T(z) + a_5(TT)(z))|U\rangle - U(z)U_{-\frac{3}{2}}|U\rangle & \quad (3.15) \\
= (z^{-3}(-\frac{11}{2}a_4 + \frac{3}{4}a_5)U_{-\frac{7}{2}} + z^{-2}(-\frac{11}{2}a_4 + \frac{3}{4}a_5)U_{-\frac{9}{2}} \\
&\quad + z^{-1}(5a_5L_{-3}U_{-\frac{5}{2}} - a_5L_{-2}U_{-\frac{7}{2}} + (-\frac{9}{2}a_4 + \frac{3}{4}a_5)U_{-\frac{11}{2}})) |0\rangle + \text{reg.}
\end{aligned}$$

となり, まず z^{-3} の項を比較する事により中心荷が $c = -\frac{13}{14}$ に決ってしまう ($U_{-\frac{7}{2}}|0\rangle = 0$ とすると全ての n に対して $U_n|0\rangle = 0$ となるので場 $U(z)$ が存在しなくなる)。次に z^{-1} の項を比較するのだが, 各項がそれぞれ等しいとすると $a_1 = 0$ となってしまうので, そうは解釈せず, 縮退

$$(35L_{-3}U_{-\frac{5}{2}} - 28L_{-2}U_{-\frac{7}{2}} + 24U_{-\frac{11}{2}}) |0\rangle = 0 \quad (3.16)$$

が起きていると考える。(3.16) 式は矛盾を含まないので結局, $W_{-\frac{5}{2}}$ 代数は $c = -\frac{13}{14}$ で縮退 (3.16) 式を持つ代数と言える。この代数が Lie 代数でないとは, (3.12) 式の右辺に生成元 T, U について線形でない項 L_{-2}^2 が現れるという事, 交換関係で書けば $\{U_n, U_m\}$ に $(TT)_{n+m}$ が現れるという事である。 $(TT)_n$ を新たに L_n, U_n と独立な生成元と思う事により Lie 代数に出来るかというそれは駄目で, 何故なら $(TT)_n$ 同士の交換関係により又新しい複合演算子 $(T(TT))_n$ 等が現れ, これらを再び独立な生成元と思ってもお互いの交換関係により際限なく新しい複合場が現れるからである。この様に交換関係で表せるが Lie 代数でないものを総称して W 代数と呼ぶ事にする。ここでは UUU の結合律を (3.15) 式のように確かめたが, 4点関数 $\langle U(z_1)U(z_2)U(z_3)U(z_4) \rangle$ の交叉対称性 (crossing symmetry) を調べる方法もある [12]。

$W_{-\frac{5}{2}}$ 代数では c が負となるため我々には興味が無いが, $T(z)$ に関する $h = 3$ のプライマリー場 $W(z)$ を添加した W_3 代数ではその様な事は起こらない。代数が T と W だけで閉じるという要請から WW の演算子積展開は

$$\begin{aligned}
W(z)|W\rangle &= (z^{-6}a_1 + z^{-4}a_2L_{-2} + z^{-3}(a_3L_{-3} + b_1W_{-3}) \\
&\quad + z^{-2}(a_4L_{-4} + a_5L_{-2}^2 + b_2W_{-4}) \\
&\quad + z^{-1}(a_6L_{-5} + a_7L_{-2}L_{-3} + b_3L_{-2}W_{-3} + b_4W_{-5})) |0\rangle \\
&\quad + \text{reg.} \quad (3.17)
\end{aligned}$$

と仮定されるが, $W(z)W(w) = W(w)W(z)$ に注意すると $b_i = 0$ となる事が分かる。

L_1, L_2 を掛ける事により, 規格化を $a_1 = \frac{c}{3}$ に取ると, 演算子積展開は

$$\begin{aligned} W(z)|W\rangle &= (z^{-6}\frac{c}{3} + z^{-4}2L_{-2} + z^{-3}L_{-3} \\ &\quad + z^{-2}(\frac{3(c-2)}{5c+22}L_{-4} + \frac{32}{5c+22}L_{-2}^2) \\ &\quad + z^{-1}(\frac{2(c-18)}{5c+22}L_{-5} + \frac{32}{5c+22}L_{-2}L_{-3})) |0\rangle + \text{reg.} \quad (3.18) \end{aligned}$$

となる。これに W_{-2} を掛けると自動的に成立するので, $W_{\frac{5}{2}}$ 代数の時とは違って W_3 代数ではこれ以上何も制限が付かない。(3.18) 式を交換関係で書けば

$$\begin{aligned} [W_n, W_m] &= \frac{16}{5c+22}(n-m)((TT)_{n+m} - \frac{3}{10}(n+m+2)(n+m+3)L_{n+m}) \\ &\quad + (n-m)(\frac{1}{15}(n+m+2)(n+m+3) - \frac{1}{6}(n+2)(m+2))L_{n+m} \\ &\quad + \frac{c}{360}n(n^2-1)(n^2-4)\delta_{n+m,0} \quad (3.19) \end{aligned}$$

である。

W_3 代数のユニタリ最高重み表現

$$\begin{aligned} L_0|h w\rangle &= h|h w\rangle, \quad W_0|h w\rangle = w|h w\rangle \\ L_n, W_n|h w\rangle &= 0 \quad (n > 0) \quad (3.20) \end{aligned}$$

を調べると, 共形代数や $N=1, 2$ 超共形代数と同様に連続系列と離散系列が存在し, 離散系列の中心荷は 2 に集積する

$$c = 2(1 - \frac{12}{m(m+1)}) \quad m = 3, 4, 5, \dots \quad (3.21)$$

で与えられ minimal 模型になっている [39]。 W_3 代数は実自由ボソン 2 つで実現出来る [39]。(3.21) 式は $SU(3)$ の 3 次の Casimir 作用素を用いて $W(z)$ を作る剰余類構成法によっても実現出来, この方法では群に基礎を置いているので指標公式も容易に求める事が出来る [38, 40]。これを $SU(n)$ にした場合には離散系列の中心荷は $c = (n-1)(1 - \frac{n(n+1)}{m(m+1)})$ となる [41]。 $h > 3$ の代数は [42, 43] で考えられているが, h が大きくなるにつれ代数は煩雑なものになる。

3.2 $N=1$ W_3 代数

W 代数の $N=1$ 超版, つまり $N=1$ 超共形代数に, $N=1$ 超共形代数のプライマリー場を添加して代数を拡張する事を考える。[44] では一般の場合について考

察しているが、ここでは $h = \frac{5}{2}, 3$ の超多重項を加える場合を考え、それを $N = 1$ W_3 代数と呼ぶ事にする。

$U(z), W(z)$ を $T(z)$ に関する $h = \frac{5}{2}, 3$ のプライマリー場とし、その超変換を

$$\begin{aligned} G(z)U(w) &= \frac{W(w)}{z-w} + \text{reg.} \\ G(z)W(w) &= \frac{5U(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial U(w)}{z-w} + \text{reg.} \end{aligned} \quad (3.22)$$

とする。つまり $U(z)$ は $N = 1$ 超共形代数の $h = \frac{5}{2}$ のプライマリー場であって、 T, G, U, W で生成される代数が $N = 1$ W_3 代数である。未知の演算子積展開は UU, WU, WW の3つであり、確かめなければならない結合律の条件はこれら3つに $L_1, L_2, G_{-\frac{1}{2}}$ 、及び $U_{-\frac{3}{2}}, W_{-2}$ を掛ける事によって得られる。 $U(z)U(w) = -U(w)U(z)$, $W(z)W(w) = W(w)W(z)$ に注意して、代数が閉じるという要請から UU, WU, WW の演算子積展開の形を仮定し、まず $L_1, L_2, G_{-\frac{1}{2}}$ の条件を課すと、これらの演算子積展開が中心荷 c と W の規格化で書き表される。この計算では WW の演算子積展開が分かればこれを超変換する事により WU, UU の演算子積展開が分かるので WW にのみ注目すればよい。規格化を $W(z)W(w) = \frac{c}{3(z-w)^6} + \dots$ にとる事にする。次に W_{-2} を WW に掛けてみると、まず z^{-4} の項の比較により中心荷が $c = \frac{10}{7}$ に決定される。すると WW の演算子積展開は完全に W_3 代数のものと一致するので WWW の結合律は満足される。次に $U_{-\frac{3}{2}}$ を UU に掛けると、 z^{-1} の項より縮退

$$(70L_{-3}U_{-\frac{5}{2}} - 56L_{-2}U_{-\frac{7}{2}} - 42G_{-\frac{5}{2}}W_{-3} + 21G_{-\frac{3}{2}}W_{-4} + 36U_{-\frac{11}{2}}) |0\rangle = 0 \quad (3.23)$$

が起きていれば、 UUU の結合律が満足される事が分かる。この縮退の下で WWU, WUU の結合律が成立する事は、 W_{-2} をそれぞれ WU, UU に掛ける事により確かめられる。結局 $N = 1$ W_3 代数は $c = \frac{10}{7}$ で、演算子積展開は

$$\begin{aligned} U(z)|U\rangle &= (z^{-5}\frac{2}{21} + z^{-3}\frac{1}{3}L_{-2} + z^{-2}\frac{1}{6}L_{-3} \\ &\quad + z^{-1}(-\frac{6}{17}L_{-4} + \frac{14}{51}L_{-2}^2 + \frac{7}{34}G_{-\frac{3}{2}}G_{-\frac{5}{2}}))|0\rangle + \text{reg.} \\ W(z)|U\rangle &= (z^{-4}\frac{1}{2}G_{-\frac{3}{2}} + z^{-3}\frac{1}{3}G_{-\frac{5}{2}} + z^{-2}(\frac{7}{17}L_{-2}G_{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{17}G_{-\frac{7}{2}}) \\ &\quad + z^{-1}(\frac{28}{51}L_{-2}G_{-\frac{5}{2}} - \frac{12}{17}G_{-\frac{9}{2}}))|0\rangle + \text{reg.} \\ W(z)|W\rangle &= (z^{-6}\frac{10}{21} + z^{-4}2L_{-2} + z^{-3}L_{-3} + z^{-2}(-\frac{1}{17}L_{-4} + \frac{56}{51}L_{-2}^2) \\ &\quad + z^{-1}(-\frac{58}{51}L_{-5} + \frac{56}{51}L_{-2}L_{-3}))|0\rangle + \text{reg.} \end{aligned} \quad (3.24)$$

で、縮退 (3.23) 式を持ち、 $N = 1$ 超共形代数と W_3 代数を部分代数として含んでいる代数であると言える。

$N = 1 W_3$ 代数 (NS セクター) のユニタリ最高重み表現

$$\begin{aligned} L_0|h w\rangle &= h|h w\rangle, & W_0|h w\rangle &= w|h w\rangle \\ L_n, G_n, U_n, W_n|h w\rangle &= 0 \quad (n > 0) \end{aligned} \quad (3.25)$$

を考える。 $c = \frac{10}{7}$ は部分代数の $N = 1$ 超共形代数, W_3 代数どちらでみても離散系列に属しているので取り得る h, w の値が分かっている [20, 39]。 $N = 1 W_3$ 代数の可能な h, w はこれら両方に共通のものであり, 列挙すると $(h, w) = (0, 0), (\frac{1}{14}, 0), (\frac{5}{14}, 0), (\frac{1}{7}, \pm \frac{2}{7\sqrt{102}}), (\frac{6}{7}, \pm \frac{4}{\sqrt{102}}), (\frac{11}{7}, \pm \frac{6}{\sqrt{102}}), (\frac{20}{7}, 0)$ である。 $N = 1 W_3$ 代数は $SU(3)$ の随伴表現に従う 8 つの実フェルミオンで実現出来る [45]。

3.3 $N=2 W_3$ 代数

W 代数の $N = 2$ 超版, つまり $N = 2$ 超共形代数に, $N = 2$ 超共形代数のプライマリー場を添加して代数を拡張する事を考える。 $N = 2$ 超共形代数ではプライマリー場を特徴付ける量子数が共形重み h (L_0 の固有値) と $U(1)$ 電荷 Q (I_0 の固有値) の 2 つである為, 添加するプライマリー場の取り方が複数考えられる。ここでは次のような場合を考え, それを $N = 2 W_3$ 代数と呼ぶ事にする。

$V(z), U(z), \bar{U}(z), W(z)$ を $T(z)$ に関する $h = 2, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 3$ のプライマリー場とし, その超変換を

$$\begin{aligned} G(z)V(w) &= \frac{U(w)}{z-w} + \text{reg.} \\ G(z)U(w) &= \text{reg.} \\ \bar{G}(z)U(w) &= \frac{4V(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial V(w) + W(w)}{z-w} + \text{reg.} \\ G(z)W(w) &= \frac{5U(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial U(w)}{z-w} + \text{reg.} \end{aligned} \quad (3.26)$$

とし, I との演算子積展開を

$$\begin{aligned} I(z)V(w) &= \text{reg.} \\ I(z)U(w) &= \frac{U(w)}{z-w} + \text{reg.} \\ I(z)W(w) &= \frac{-4V(w)}{(z-w)^2} + \text{reg.} \end{aligned} \quad (3.27)$$

とする。つまり $V(z)$ は $N = 2$ 超共形代数の $(h, Q) = (2, 0)$ のプライマリー場であって, $T, I, G, \bar{G}, V, U, \bar{U}, W$ で生成される代数が $N = 2 W_3$ 代数である。

この様な代数を考察した理由は、第一にこの形が $W_3, N = 1$ W_3 代数の自然な拡張になるであろう、第二に超絨理論の Calabi-Yau コンパクト化に関係するであろうと当初考えた為である。後者に付いては次節で詳しく述べるが、複素 3 次元の Calabi-Yau コンパクト化では 3 階の正則微分形式にあたる場 $X(z)$ を $N = 2$ 超共形代数に添加する事になる。 X と \bar{X} の演算子積展開を考えて $XX\bar{X}$ の結合律を要請すると、縮退が何も起きていないとすると、 $X(z)\bar{X}(w)$ の $\frac{1}{z-w}$ の項に共形重み $h = 2$ を持つ新しい場が現れる事になる。適当に調節する事によってこの新しい場は、 $(h, Q) = (2, 0)$ の $N = 2$ 超共形代数のプライマリー場にとる事が出来るので、上に述べた $N = 2$ W_3 代数を含む状況が現れるのである。 $T, I, G, \bar{G}, X, \bar{X}, Y, \bar{Y}, V, U, \bar{U}, W$ で生成される代数は自由度が実ボソンが 6 つ実フェルミオンが 6 つなので中心荷 c が $1 \times 6 + \frac{1}{2} \times 6 = 9$ に対応して尤らしいと思われたのだが、この代数の結合律を調べてみたところ、縮退が何も起きていないとすると、相互作用を何もしない自明な場合を除いて不可能である事が分かった。そこで縮退がある場合を調べてみたところ、 $T, I, G, \bar{G}, X, \bar{X}, Y, \bar{Y}$ だけで結合律を満たし閉じさせる事が出来、これが Calabi-Yau コンパクト化に関係する事が分かった。よってこの節で述べる $N = 2$ W_3 代数は Calabi-Yau コンパクト化には関係無かった様である。

未知の演算子積展開は $VV, UV, WV, UU, U\bar{U}, UW, WW$ の 7 つであり、確かめなければならない結合律の条件はこれら 7 つに $L_1, L_2, I_1, G_{-\frac{1}{2}}, \bar{G}_{-\frac{1}{2}}$, 及び $V_{-1}, U_{-\frac{3}{2}}, \bar{U}_{-\frac{3}{2}}, W_{-2}$ を掛ける事によって得られる。 $U(1)$ 電荷の保存に注意して、代数が閉じるという要請から $VV, UV, WV, UU, U\bar{U}, UW, WW$ の演算子積展開の形を仮定し、まず $L_1, L_2, I_1, G_{-\frac{1}{2}}, \bar{G}_{-\frac{1}{2}}$ の条件を課すと、これらの演算子積展開が中心荷 c と V の規格化 a と VV に V が現れる係数 b で書き表される。この結果は少し長いので補遺 B に載せてある。 $N = 1$ W_3 代数の時と違うのはこの時点で b という自由度が残っている点である。次に VVV, UUU の結合律を調べてみると、これらは自動的に成立している。次に VUU の結合律を見てみると、 a と b は

$$b^2 = \frac{4(c+3)^2(5c-12)^2}{c(c-1)(c+6)(2c-3)(15-c)}a \quad (3.28)$$

という関係を満たさなければならない事が分かる。この関係があると VUU の結合律が成立している事を確かめる事が出来、他の演算子積展開も同様に縮退無しで成立していると予想している。(3.28) 式 より中心荷は $0 \leq c \leq 1$ 又は $\frac{3}{2} \leq c \leq 15$ を満たしている事が分かる。

3.4 議論

W 代数の $N = 2$ 超版として考えられる他の形は, $N = 2$ 超共形代数の $(h, Q > 0)$ のプライマリー場 $\phi(z)$ と $(h, -Q)$ のプライマリー場 $\bar{\phi}(z)$ を添加するものである [45]。次節で述べる Calabi-Yau コンパクト化に関する代数はこの一例である。 Q が h よりある程度大きければ $U(1)$ 電荷の保存により $\phi\phi$ の演算子積展開は regular となり, $\phi\bar{\phi}$ の演算子積展開には T, I, G, \bar{G} しか現れなくなるので §3.3 で調べた $N = 2 W_3$ 代数より簡単になる事が期待される。 ϕ の超変換は, ϕ^+, ϕ^-, ϕ'' を T に関する共形重み $h + \frac{1}{2}, h + \frac{1}{2}, h + 1$ のプライマリー場として

$$\begin{aligned}
G(z)\phi(w) &= \frac{\phi'^+(w)}{z-w} + \text{reg.} & \bar{G}(z)\phi(w) &= \frac{\phi'^-(w)}{z-w} + \text{reg.} \\
G(z)\phi^+(w) &= \text{reg.} & \bar{G}(z)\phi^-(w) &= \text{reg.} \\
\bar{G}(z)\phi^+(w) &= \frac{2h-Q}{(z-w)^2}\phi(w) + \frac{\partial\phi(w) - (I\phi)(w) + \phi''(w)}{z-w} + \text{reg.} \\
G(z)\phi^-(w) &= \frac{2h+Q}{(z-w)^2}\phi(w) + \frac{\partial\phi(w) + (I\phi)(w) - \phi''(w)}{z-w} + \text{reg.} \\
G(z)\phi''(w) &= \frac{2h+Q}{(z-w)^2}\phi^+(w) + \frac{\partial\phi^+(w) + (I\phi^+)(w) - (G\phi)(w)}{z-w} + \text{reg.} \\
\bar{G}(z)\phi''(w) &= -\frac{2h-Q}{(z-w)^2}\phi^-(w) - \frac{\partial\phi^-(w) - (I\phi^-)(w) - (\bar{G}\phi)(w)}{z-w} + \text{reg.}
\end{aligned} \tag{3.29}$$

で, I との演算子積展開は

$$\begin{aligned}
I(z)\phi(w) &= \frac{Q}{z-w}\phi(w) + \text{reg.} \\
I(z)\phi'^{\pm}(w) &= \frac{Q \pm 1}{z-w}\phi'^{\pm}(w) + \text{reg.} \\
I(z)\phi''(w) &= \frac{-2h + \frac{c}{3}}{(z-w)^2}\phi(w) + \frac{Q}{z-w}\phi''(w) + \text{reg.}
\end{aligned} \tag{3.30}$$

である。 $2h = Q$ の時には $\phi^+ = 0, \phi'' = (I\phi) - \partial\phi$ で $2h = Q = \frac{c}{3}$ の時には $\phi^+ = \phi'' = 0$ となる。これらの式は $Q = 0$ の場合もよいが, $Q = 0$ に対しては $\phi'' - (I\phi)$ を改めて ϕ'' にとる事が出来, (3.26) 式, (3.27) 式はその様にとったものである。この様な拡張に付いては現在研究中である [46]。

4 Calabi-Yau コンパクト化に関連する N=2 超共形代数の W 代数的拡張

本節では $N = 2$ 超共形代数にスペクトラルフローの生成元を添加して代数を拡張する事を考える。特に複素 3 次元 Calabi-Yau 多様体に関連する代数を調べ、その表現論を展開する。Ricci 平坦 Kähler 多様体上の非線型 σ 模型の持つ対称性とこの代数との関連に付いても論ずる [13]。

4.1 Calabi-Yau コンパクト化に関連する N=2 超共形代数の拡張

$N = 2$ 超共形代数の持つ、 $U(1)$ Kac-Moody カレントに起因する 2 つの性質に付いてまず述べておく。その一つは $U(1)$ カレントを次の意味で分離する事が出来るという事である。 $U(1)$ カレント $I(z)$ は実自由ボソン $\phi(z)$ (2.3) 式を用いて

$$I(z) = \sqrt{\frac{c}{3}} i \partial \phi(z) \quad (4.1)$$

と書く事が出来、この時 T, G, \bar{G} は ϕ を含む部分と含まない部分 (\sim を付けて表す) に

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{1}{2} : (i\partial\phi)^2 : (z) + \tilde{T}(z) \\ G(z) &= : e^{i\sqrt{\frac{3}{c}}\phi(z)} : \tilde{G}(z) \\ \bar{G}(z) &= : e^{-i\sqrt{\frac{3}{c}}\phi(z)} : \tilde{\bar{G}}(z) \end{aligned} \quad (4.2)$$

の様に分ける事が出来る。 $\tilde{G}(z)$ はパラフェルミオンと呼ばれる非局所的な演算子積展開を持つ場で中心荷 $\tilde{c} = c - 1$ を持つ共形代数 $\tilde{T}(z)$ に付いて $\tilde{h} = \frac{3}{2}(1 - \frac{1}{c})$ のプライマリー場である。 $U(1)$ 電荷 Q を持つ場 $A(z)$ は、 $P_A(z)$ を $\partial\phi$ に付いての微分が掛かった適当な多項式とすると、 $A(z) = : e^{iQ\sqrt{\frac{3}{c}}\phi(z)} P_A(z) : \tilde{A}(z)$ と表される。もう一つの性質は自己同型があるという事、つまり $N = 2$ 超共形代数 (2.1) 式, (2.8) 式, (2.31) 式は、 η を任意の実数とした時に

$$\begin{cases} L'_n = L_n + \eta I_n + \frac{c}{6} \eta^2 \delta_{n0} \\ I'_n = I_n + \frac{c}{3} \eta \delta_{n0} \\ G'_n = G_{n+\eta} \\ \bar{G}'_n = \bar{G}_{n-\eta} \end{cases} \quad (4.3)$$

なる変換で不変になっているという事である [47]。この変換はスペクトラルフローと呼ばれる。(4.3) 式はユニタリ変換 $U_\eta = e^{i\eta\sqrt{\frac{c}{3}}q}$

$$A'(z) = U_\eta^\dagger A(z) U_\eta \quad A = T, I, G, \bar{G} \quad (4.4)$$

によって引き起こされる。一般に $A(z) = : e^{iQ\sqrt{\frac{3}{c}}\phi(z)} : \tilde{A}(z)$ の形の電荷 Q を持つ場に対しては, U_η で変換すると $A'(z) = U_\eta^\dagger A(z) U_\eta = z^{Q\eta} A(z)$ になるのでモード展開は $A'_n = A_{n+Q\eta}$ となる。スペクトラルフローにより NS セクターと R セクターは連続的に結び付けられているので両者は同型になる。また, スペクトラルフローで移り合う表現は表現空間も 1 対 1 に対応するが, 最高重み状態が最高重み状態に写像されるとは限らず, 例えば NS セクターでは

$$\begin{aligned} \eta = 1 & \\ \left\{ \begin{array}{l} |h' = h + Q + \frac{c}{6} - \frac{1}{2}, Q' = Q - 1 + \frac{c}{3}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2h+Q}} \bar{G}_{-\frac{1}{2}} |h Q\rangle \quad (2h + Q \neq 0 \text{ の時}) \\ |h' = h + Q + \frac{c}{6}, Q' = Q + \frac{c}{3}\rangle = |h Q\rangle \quad (2h + Q = 0 \text{ の時}) \end{array} \right. \\ \eta = -1 & \\ \left\{ \begin{array}{l} |h' = h - Q + \frac{c}{6} - \frac{1}{2}, Q' = Q + 1 - \frac{c}{3}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2h-Q}} G_{-\frac{1}{2}} |h Q\rangle \quad (2h - Q \neq 0 \text{ の時}) \\ |h' = h - Q + \frac{c}{6}, Q' = Q - \frac{c}{3}\rangle = |h Q\rangle \quad (2h - Q = 0 \text{ の時}) \end{array} \right. \end{aligned} \quad (4.5)$$

となる。

超絛理論のコンパクト化に話を移すと, 時空の $N = 1$ 超対称性と世界面の $N = 2$ 超共形対称性の関係が明らかになってきた [30, 48, 17]。[17] では時空の $N = 1$ 超対称性があれば世界面で $N = 2$ 超共形対称性が存在することを示しており, 更に (時空の $N = 1$ 超対称性) = (世界面の $N = 2$ 超共形対称性) + ($U(1)$ 電荷の量子化) と考えられている。NS セクター (時空のボソン) と R セクター (時空のフェルミオン) が $N = 2$ 超共形代数ではスペクトラルフローによって移り合うので, 時空でみると超対称性変換に相当し, 時空のボソンとフェルミオンが超重力多重項を組む事になるのである。 $c = 3\tilde{n}$ の時基底状態 ($h = 0, Q = 0$)^{NS} はスペクトラルフロー ($\eta = \pm 1$) によって状態 ($h = \frac{\tilde{n}}{2}, Q = \pm\tilde{n}$)^{NS} に, スペクトラルフロー ($\eta = \pm\frac{1}{2}$) によって状態 ($h = \frac{\tilde{n}}{8}, Q = \pm\frac{\tilde{n}}{2}$)^R に移される。一方低エネルギーでの超重力理論の考察から, 超絛理論のコンパクト空間は複素 \tilde{n} 次元の Ricci 平坦 Kähler 多様体 (言い換えると Calabi-Yau 多様体, 又は $SU(\tilde{n})$ ホロノミーを持つ多様体, 又は第 1 Chern 類 $c_1 = 0$ の多様体) でなければならない [49, 1]。この多様体には covariantly constant スピノールと covariantly constant な \tilde{n} 階の (反) 正則微分が存在し, それぞれ状態 ($h = \frac{\tilde{n}}{8}, Q = \pm\frac{\tilde{n}}{2}$)^R, ($h = \frac{\tilde{n}}{2}, Q = \pm\tilde{n}$)^{NS} に対応している。前者は時空の超対称性に関係しており, 後者の事を, 余り良い名では

ないが, $(\eta \in \mathbf{Z}$ の) フローの生成元と呼ぶ事にする。これからやろうとするのは $N = 2$ 超共形代数に $(\eta \in \mathbf{Z}$ の) フローの生成元を添加して代数を拡張する事である。この拡張された代数が $SU(\tilde{n})$ ホロノミーを持つ多様体へのコンパクト化を支配するのである。これらは [14, 15] の着想で, 特に K3 曲面 ($\tilde{n} = 2$) へのコンパクト化の場合に付いて詳細に調べている。

\tilde{n} を自然数とし, $h = \frac{\tilde{n}}{2}$, $Q = \tilde{n}$ を持つ場を $(\eta \in \mathbf{Z}$ の) フローの生成元と呼び $X(z)$ と書く事にする。 $X(z)$ は $T(z)$ に関する $h = \frac{\tilde{n}}{2}$ のプライマリー場で, $I(z)$ と演算子積展開

$$I(z)X(w) = \frac{\tilde{n}}{z-w}X(w) + \text{reg.} \quad (4.6)$$

を持つ。 $X(z)$ の超変換を

$$G(z)X(w) = \text{reg.}, \quad \bar{G}(z)X(w) = \frac{2Y(w)}{z-w} + \text{reg.} \quad (4.7)$$

で定義すると $Y(z)$ は $T(z)$ に関する $h = \frac{\tilde{n}+1}{2}$ のプライマリー場となり, 演算子積展開は

$$\begin{aligned} I(z)Y(w) &= \frac{\tilde{n}-1}{z-w}Y(w) + \text{reg.} \\ G(z)Y(w) &= \frac{\tilde{n}X(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial X(w)}{z-w} + \text{reg.}, \quad \bar{G}(z)Y(w) = \text{reg.} \end{aligned} \quad (4.8)$$

である。さてこれから考える問題は $T(z)$, $I(z)$, $G(z)$, $\bar{G}(z)$, $X(z)$, $\bar{X}(z)$, $Y(z)$, $\bar{Y}(z)$ で生成される代数が閉じていて結合律を満たすかどうかという事である (図 1)。

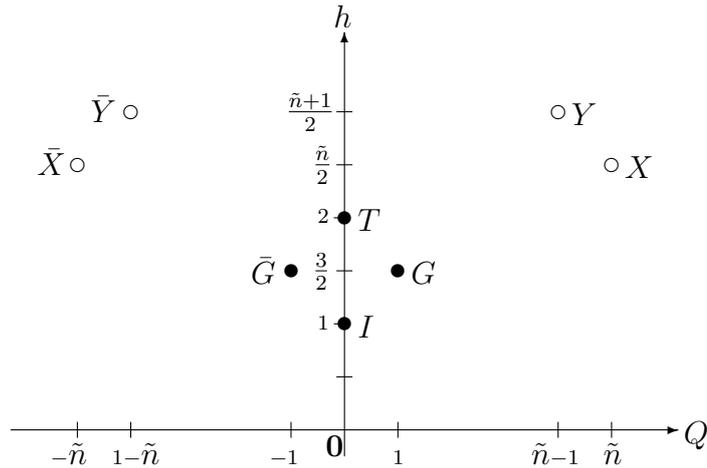


図 1 拡張された代数の生成元。

この代数は勿論 $T(z)$, $I(z)$, $G(z)$, $\bar{G}(z)$ からなる $N = 2$ 超共形代数を部分代数と

して含み, この拡張の仕方は §3.4 で述べたものの一例である。超絨理論のコンパクト化 ($c = 3\tilde{n}$) に用いることを動機としているが, ここではどのような代数が許されるかを調べたいので予め中心荷 c には制限を付けなくておく事にする。 $U(1)$ 電荷の保存より演算子積展開 XX, XY, YY が regular となり, 未知の演算子積展開は $X\bar{X}, X\bar{Y}, Y\bar{Y}$ の3つである。この内 $X\bar{X}$ が分かれば他の2つは

$$\begin{aligned} X(z)|\bar{Y}\rangle &= -\frac{1}{2}G_{-1/2}X(z)|\bar{X}\rangle \\ Y(z)|\bar{Y}\rangle &= \frac{1}{2}X(z)|\partial\bar{X}\rangle + \frac{1}{2}\bar{G}_{-1/2}X(z)|\bar{Y}\rangle \end{aligned} \quad (4.9)$$

により導かれるのでとりあえず $X\bar{X}$ のみ考えれば良い。 X の規格化を $X(z)\bar{X}(w) = \frac{2}{(z-w)^{\tilde{n}}} + \dots$ に取る事にし, §3 の方法で計算する。

$\tilde{n} = 1$ の場合はほぼ自明で, 代数は (1組の複素自由ボソン・フェルミオン) \oplus (中心荷 $= c-3$ の $N=2$ 超共形代数) となる。 $\tilde{n} = 2$ の場合は代数は $N=4$ 超共形代数となる。 $N=4$ 超共形代数は $T(z)$ と, $T(z)$ に関して $h=1$ のプライマリー場であるレベル k の $SU(2)$ Kac-Moody カレント $J^3(z), J^\pm(z) = J^1(z) \pm iJ^2(z)$ と, $T(z)$ に関して $h = \frac{3}{2}$ のプライマリー場である2組の $SU(2)$ 二重項の超カレント $G^{(a)}(z), \bar{G}^{(a)}(z)$ ($a = 1, 2$) によって生成される代数でその演算子積展開は

$$\begin{aligned} J^i(z)J^j(w) &= \frac{1}{(z-w)^2} \frac{1}{2}k\delta^{ij} + \frac{1}{z-w} i\varepsilon^{ijk}J^k(w) + \text{reg.}, \quad (c = 6k) \\ J^i(z)G^{(a)}(w) &= -\frac{1}{z-w} \frac{1}{2}\sigma_{ab}^i G^{(b)}(w) + \text{reg.} \\ G^{(2)}(z)\bar{G}^{(2)}(w) &= \frac{2c}{3(z-w)^3} + \frac{1}{(z-w)^2} 4J^3(w) + \frac{1}{z-w} (2\partial J^3(w) + 2T(w)) + \text{reg.} \\ G^{(1)}(z)\bar{G}^{(1)}(w) &= \frac{2c}{3(z-w)^3} - \frac{1}{(z-w)^2} 4J^3(w) - \frac{1}{z-w} (2\partial J^3(w) - 2T(w)) + \text{reg.} \\ G^{(2)}(z)\bar{G}^{(1)}(w) &= -\frac{1}{(z-w)^2} 4J^+(w) - \frac{1}{z-w} 2\partial J^+(w) + \text{reg.} \\ G^{(a)}(z)G^{(b)}(w) &= \text{reg.} \end{aligned} \quad (4.10)$$

である。 $c = 6k$ なので中心荷は6の倍数である。いま考えている拡張された代数との対応は

$$\begin{aligned} J^+(z) &= \sqrt{\frac{k}{2}}X(z), \quad G^{(1)}(z) = -\sqrt{2k}\bar{Y}(z), \quad G^{(2)}(z) = G(z) \\ J^-(z) &= \sqrt{\frac{k}{2}}\bar{X}(z), \quad \bar{G}^{(1)}(z) = -\sqrt{2k}Y(z), \quad \bar{G}^{(2)}(z) = \bar{G}(z) \\ J^3(z) &= \frac{1}{2}I(z) \end{aligned} \quad (4.11)$$

である。 $k=1$ の場合は [14, 15] で詳しく調べられている。

最も興味のある $\tilde{n} = 3$ の場合には, 先ず L_1, L_2, I_1 を掛ける事により $X\bar{X}$ の演算子積展開が c だけで表され, 次に $X_{-\frac{1}{2}}$ を掛けると中心荷が $c = 9$ に決まり, 縮退

$$(I_{-1}X_{-\frac{3}{2}} - X_{-\frac{5}{2}})|0\rangle = 0 \quad \text{即ち} \quad (IX)(z) = \partial X(z) \quad (4.12)$$

が起きていれば, $XX\bar{X}$ の結合律が満足される。そしてこの縮退の下で他の全ての結合律が成立する事を確かめる事が出来る。結局 $\tilde{n} = 3$ の場合には代数が1つだけ存在し, $c = 9$ である事が分かった。この代数を取り敢えず $c = 9$ 代数又は $\tilde{n} = 3$ 代数と呼ぶ事にする。 $\tilde{n} = 3$ 代数は Lie 代数ではなく W 代数的である。この代数は重要なので全ての交換関係を書いておく。

$$\begin{cases}
c = 9 \\
[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{3}{4}n(n^2-1)\delta_{n+m,0} \\
\{G_n, \bar{G}_m\} = 3(n^2 - \frac{1}{4})\delta_{n+m,0} + (n-m)I_{n+m} + 2L_{n+m} \\
[I_n, I_m] = 3n\delta_{n+m,0} \\
\{G_n, G_m\} = \{\bar{G}_n, \bar{G}_m\} = 0
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
[L_n, \phi_m] = ((h-1)n - m)\phi_{n+m} \\
[I_n, \phi_m] = Q\phi_{n+m}
\end{cases}
\begin{matrix}
\phi = I & G & \bar{G} & X & \bar{X} & Y & \bar{Y} \\
h = 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 2 & 2 \\
Q = * & 1 & -1 & 3 & -3 & 2 & -2
\end{matrix}$$

$$\begin{cases}
\{G_n, X_m\} = 0 & \{G_n, \bar{X}_m\} = 2\bar{Y}_{n+m} \\
\{\bar{G}_n, X_m\} = 2Y_{n+m} & \{\bar{G}_n, \bar{X}_m\} = 0 \\
[G_n, Y_m] = (2n-m)X_{n+m} & [G_n, \bar{Y}_m] = 0 \\
[\bar{G}_n, Y_m] = 0 & [\bar{G}_n, \bar{Y}_m] = (2n-m)\bar{X}_{n+m}
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
\{X_n, \bar{X}_m\} = (n^2 - \frac{1}{4})\delta_{n+m,0} + (n-m)I_{n+m} + (I^2)_{n+m} \\
[X_n, \bar{Y}_m] = (n + \frac{1}{2})G_{n+m} + (IG)_{n+m} \\
[\bar{X}_n, Y_m] = (n + \frac{1}{2})\bar{G}_{n+m} - (I\bar{G})_{n+m} \\
[Y_n, \bar{Y}_m] = \frac{1}{2}n(n^2-1)\delta_{n+m,0} + \frac{1}{2}(n(n+1) + m(m+1))I_{n+m} \\
\quad + \frac{1}{4}(n-m)(I^2)_{n+m} - (m+1)L_{n+m} + (IT)_{n+m} - \frac{1}{2}(G\bar{G})_{n+m} \\
\{X_n, X_m\} = \{\bar{X}_n, \bar{X}_m\} = [X_n, Y_m] = [\bar{X}_n, \bar{Y}_m] = [Y_n, Y_m] = [\bar{Y}_n, \bar{Y}_m] = 0.
\end{cases}$$

(4.13)

$(IX)(z) = \partial X(z)$ を用いると

$$[(I^2)_n, X_m] = 6(\frac{n}{2} - m)X_{n+m} \quad (4.14)$$

を示す事が出来る。よって (4.13) 式は

$$\begin{aligned}
\check{T}(z) &= \frac{1}{6}(I^2)(z), & \check{I}(z) &= \frac{1}{3}I(z) \\
\check{G}(z) &= \frac{1}{\sqrt{3}}X(z), & \check{\bar{G}}(z) &= \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{X}(z)
\end{aligned} \quad (4.15)$$

から生成される $c = 1$ の $N = 2$ 超共形代数を部分代数として含んでいる。

結合律の確認は自由場による実現によっても行なう事が出来る。何故なら自由場による実現が得られれば結合律は自動的に満足されるからである。 $\tilde{n} = 3$ 代数

を実現する一つの方法は、3組の複素自由ボソン $\varphi^i(z)$ と複素自由フェルミオン $\psi^i(z)$ ($i = 1, 2, 3$) による $(c = 3)^3$ 模型で

$$\begin{aligned} G(z) &= \sqrt{2} \sum_{j=1}^3 \psi^j(z) i \partial \varphi^j(z) \\ X(z) &= \sqrt{2} \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \psi^i(z) \psi^j(z) \psi^k(z) = \sqrt{2} \psi^1 \psi^2 \psi^3 \end{aligned} \quad (4.16)$$

である。別の方法は $(c = 1)^9$ 模型で

$$G(z) = \sqrt{\frac{2}{3}} \sum_{j=1}^9 \gamma^j : e^{i\sqrt{3}\phi^j(z)} : , \quad X(z) = \sqrt{2} : e^{\frac{i}{\sqrt{3}} \sum_{j=1}^9 \phi^j(z)} : \quad (4.17)$$

で与えられる。ここで $\phi^i(z)$ ($i = 1, \dots, 9$) は実自由ボソンで γ^i はガンマ行列 $\{\gamma^i, \gamma^j\} = 2\delta^{ij}$ である。 $(c = \frac{3}{2})^6$ 模型も同様に実現出来、Gepner の提案した $N = 2$ 超共形代数の minimal 模型をテンソル積して構成する模型 [16] は全てこの代数に従っているはずである。

初めから超絨理論の $c = 9$ コンパクト化を考えるならば、[17] の議論を延長して時空の $N = 1$ 超対称性から $\tilde{n} = 3$ 代数が導かれる事を示す事が出来る。時空の $N = 1$ 超対称性から世界面の $N = 2$ 超共形対称性が導かれるという [17] の議論を簡単に復習しておく。時空には $N = 1$ 超対称性が、世界面には $N = 1$ 超共形対称性があるとする。時空の超対称性カレント（重力微子放出頂点演算子）はゴースト荷 $-\frac{1}{2}$ 描像で

$$\begin{aligned} V_\alpha^{-\frac{1}{2}}(z) &= : e^{-\frac{1}{2}\phi^{gh}(z)} : S_\alpha(z) \Sigma(z) \\ V_{\dot{\alpha}}^{-\frac{1}{2}}(z) &= : e^{-\frac{1}{2}\phi^{gh}(z)} : S_{\dot{\alpha}}(z) \bar{\Sigma}(z) \end{aligned} \quad (4.18)$$

と表される。ここで $: e^{-\frac{1}{2}\phi^{gh}(z)} :$ は超共形ゴースト系 (β, γ) のスピン場、 $S_\alpha(z)$ は4次元時空のスピン場、 $\Sigma(z)$ は6次元内部空間の $N = 1$ 超共形代数のスピン場で $h = \frac{3}{8}$ である。超荷 $Q_\alpha = \oint_0 \frac{dz}{2\pi i} V_\alpha^{-\frac{1}{2}}(z)$, $Q_{\dot{\alpha}} = \oint_0 \frac{dz}{2\pi i} V_{\dot{\alpha}}^{-\frac{1}{2}}(z)$ が超対称代数 $\{Q_\alpha, Q_{\dot{\beta}}\} = \sigma_{\alpha\dot{\beta}}^\mu P_\mu$ を満たす事から、 $\Sigma, \bar{\Sigma}$ の演算子積展開は

$$\begin{aligned} \Sigma(z) \bar{\Sigma}(w) &\sim (z-w)^{-\frac{3}{4}} \mathbf{1} + \dots \\ \Sigma(z) \Sigma(w) &\sim (z-w)^{\frac{3}{4}} \mathcal{O}_{h=\frac{3}{2}}(w) + \dots \end{aligned} \quad (4.19)$$

となる。4点相関関数 $\langle \Sigma(z_1) \bar{\Sigma}(z_2) \Sigma(z_3) \bar{\Sigma}(z_4) \rangle$ で $z_1 \rightarrow z_2$ とする事により $\Sigma \bar{\Sigma}$ の演算子積展開 $\Sigma(z) \bar{\Sigma}(w) \sim (z-w)^{-\frac{3}{4}} \mathbf{1} + (z-w)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{2} I(w) + \dots$ には $h = 1$ の場 $I(z)$

が現れる事が分かり，これを $N = 2$ 超共形代数の $U(1)$ カレントと考えるのである。 I と Σ の演算子積展開は

$$I(z)\Sigma(w) = \frac{\frac{3}{2}}{z-w}\Sigma(w) + \text{reg.} \quad (4.20)$$

となる。 $I(z)$ を (4.1) 式 の様に書くと $\Sigma(z) = : e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}\phi(z)} :$ となり， $N = 1$ 超共形代数の超カレントは $U(1)$ 電荷が ± 1 の部分に分かれ，これにより $N = 2$ 超共形代数が生成されるのである。ここ迄は彼らの議論だが，実は (4.19) 式 に現れる $h = \frac{3}{2}$ の場 $\sqrt{2}\mathcal{O}_{h=\frac{3}{2}}(z) = \sqrt{2} : e^{i\sqrt{3}\phi(z)} :$ と $\tilde{n} = 3$ 代数の $X(z)$ が同一視されるのである。 $G(z)$ は $: e^{i\frac{1}{\sqrt{3}}\phi(z)} : \tilde{G}(z)$ と表されるので X の超変換は (4.7) 式 で与えられる事が分かる。そして $X\bar{X}$ の演算子積展開は $\tilde{n} = 3$ 代数のものと一致するので，(4.9) 式 により全体として代数が閉じて $\tilde{n} = 3$ 代数と一致する事になるのである。 Σ は NS セクターから R セクターを作り出すものであり， X は Σ を 2 回行う様なものであるから， Σ は X より基本的な場である。しかし Σ の演算子積展開は非局所的である為交換関係で表わす事が出来ない。 X を用いればこれを避ける事が出来るのである。

4.2 表現論

前節で得られた $\tilde{n} = 3$ 代数は NS セクターで定義されていたのだが， R セクターではどうであろうか。 $\tilde{n} = 3$ 代数 (4.13) 式 には $N = 2$ 超共形代数と同様に自己同型 (スペクトラルフロー)，つまり変換

$$\begin{cases} L'_n = L_n + \eta I_n + \frac{3}{2}\eta^2 \delta_{n0} \\ I'_n = I_n + 3\eta \delta_{n0} \\ \phi'_n = \phi_{n+Q\eta} \end{cases} \quad \begin{matrix} \phi = G & \bar{G} & X & \bar{X} & Y & \bar{Y} \\ Q = 1 & -1 & 3 & -3 & 2 & -2 \end{matrix} \quad (4.21)$$

で代数が不変であるという性質がある。このスペクトラルフローによって代数は R セクターでも成立する事になる。但し複合場のモード展開 $(AB)_n$ が必ずしも (3.4) 式 で与えられない事に注意する必要がある。(4.13) 式 の中では $(G\bar{G})_n$ のみが， G_m ($m \in \mathbf{Z} + \frac{1}{2} + \varepsilon$, $-\frac{1}{2} < \varepsilon \leq \frac{1}{2}$) に対して，

$$\begin{aligned} (G\bar{G})_n = & \sum_{\substack{p \leq -3/2 + \varepsilon \\ p \in \mathbf{Z} + 1/2 + \varepsilon}} G_p \bar{G}_{n-p} - \sum_{\substack{p > -3/2 + \varepsilon \\ p \in \mathbf{Z} + 1/2 + \varepsilon}} \bar{G}_{n-p} G_p \\ & - 2\varepsilon L_n + \varepsilon(n + 2 - \varepsilon)I_n - \varepsilon(1 - \varepsilon)(2 - \varepsilon)\delta_{n0} \end{aligned} \quad (4.22)$$

に変更を受ける。これは $z^n G(z)$ と $w^{-n} \bar{G}(w)$ の演算子積展開に (3.3) 式を用いれば得られる。

$\tilde{n} = 3$ 代数の既約ユニタリ最高重み表現に付いて考える事にする。最高重み状態 $|h Q\rangle$ は L_0 と I_0 の固有状態で正モードを持つ生成元で消される状態

$$\begin{aligned} L_0 |h Q\rangle &= h |h Q\rangle, & I_0 |h Q\rangle &= Q |h Q\rangle \\ A_n |h Q\rangle &= 0 \quad (n > 0) \quad A = L, I, G, \bar{G}, X, \bar{X}, Y, \bar{Y} \end{aligned} \quad (4.23)$$

で、他の零モードに付いての条件は後で無矛盾性と既約性から決める事にする。 $\tilde{n} = 3$ 代数の既約ユニタリ最高重み表現が存在する必要十分条件は

NS セクター:

$$\begin{aligned} (\text{NS1}) \quad h &= 0 \quad Q = 0 \quad Y_0, \bar{Y}_0 |h Q\rangle = 0 \\ (\text{NS2}) \quad h &= \frac{1}{2} \quad Q = 1 \quad Y_0, \bar{Y}_0 |h Q\rangle = 0 \\ (\text{NS3}) \quad h &= \frac{1}{2} \quad Q = -1 \quad Y_0, \bar{Y}_0 |h Q\rangle = 0 \\ (\text{NS4}) \quad h &> 0 \quad Q = 0 \quad Y_0, \bar{Y}_0 |h Q\rangle = 0 \\ (\text{NS5}) \quad h &> \frac{1}{2} \quad Q = 1 \quad Y_0 |h Q\rangle = 0, \quad \bar{Y}_0 |h Q\rangle \neq 0 \\ & \quad Q = -1 \quad \bar{Y}_0 |h Q\rangle = 0, \quad Y_0 |h Q\rangle \neq 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

R セクター:

$$\begin{aligned} (\text{R1}) \quad h &= \frac{3}{8} \quad Q = \frac{3}{2} \quad G_0, \bar{G}_0, X_0, Y_0, \bar{Y}_0 |h Q\rangle = 0, \quad \bar{X}_0 |h Q\rangle \neq 0 \\ & \quad Q = -\frac{3}{2} \quad G_0, \bar{G}_0, \bar{X}_0, Y_0, \bar{Y}_0 |h Q\rangle = 0, \quad X_0 |h Q\rangle \neq 0 \\ (\text{R2}) \quad h &= \frac{3}{8} \quad Q = -\frac{1}{2} \quad G_0, \bar{G}_0, X_0, \bar{X}_0, Y_0, \bar{Y}_0 |h Q\rangle = 0 \\ (\text{R3}) \quad h &= \frac{3}{8} \quad Q = \frac{1}{2} \quad G_0, \bar{G}_0, X_0, \bar{X}_0, Y_0, \bar{Y}_0 |h Q\rangle = 0 \\ (\text{R4}) \quad h &> \frac{3}{8} \quad Q = \frac{3}{2} \quad G_0, X_0, Y_0 |h Q\rangle = 0, \quad \bar{G}_0, \bar{X}_0, \bar{Y}_0 |h Q\rangle \neq 0 \\ & \quad Q = -\frac{3}{2} \quad \bar{G}_0, \bar{X}_0, \bar{Y}_0 |h Q\rangle = 0, \quad G_0, X_0, Y_0 |h Q\rangle \neq 0 \\ & \quad Q = -\frac{1}{2} \quad G_0, X_0, \bar{X}_0, \bar{Y}_0 |h Q\rangle = 0, \quad \bar{G}_0, Y_0 |h Q\rangle \neq 0 \\ & \quad Q = \frac{1}{2} \quad \bar{G}_0, X_0, \bar{X}_0, Y_0 |h Q\rangle = 0, \quad G_0, \bar{Y}_0 |h Q\rangle \neq 0 \\ (\text{R5}) \quad h &> \frac{3}{8} \quad Q = -\frac{1}{2} \quad \bar{G}_0, X_0, \bar{X}_0, Y_0, \bar{Y}_0 |h Q\rangle = 0, \quad G_0 |h Q\rangle \neq 0 \\ & \quad Q = \frac{1}{2} \quad G_0, X_0, \bar{X}_0, Y_0, \bar{Y}_0 |h Q\rangle = 0, \quad \bar{G}_0 |h Q\rangle \neq 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

である。(NS1-3) と (R1-3) は massless 表現, (NS4,5) と (R4,5) は massive 表現と呼ばれる。NS セクターに付いて証明しておく。 $\tilde{n} = 3$ 代数は, (4.15) 式で与えられる $c = 1$ の $N = 2$ 超共形代数を部分代数として含んでおり, $|h Q\rangle$ はこの部分代数でも最高重み状態になっている。この部分代数は $N = 2$ 超共形代数の minimal 模型なので許される $U(1)$ 電荷は $\check{Q} = 0, \pm \frac{1}{3}$ である事が知られている [20]。よって $Q = 0, \pm 1$ となる。 $G_{-1/2} |h Q\rangle$ と $\bar{G}_{-1/2} |h Q\rangle$ のノルムが非負であ

る事から $h \geq \frac{1}{2}|Q|$ が出る。次に零モード Y_0, \bar{Y}_0 の条件であるが、先ず縮退の関係式 (4.12) 式に $\bar{G}_{-\frac{1}{2}}$ を掛ける事により関係式 $(IY)(z) = \partial Y(z) - \frac{1}{2}(\bar{G}X)(z)$ が得られる。この関係式とこれにエルミート共役な関係式の零モードを $|h, Q\rangle$ に掛ける事により Y_0, \bar{Y}_0 の条件が決まる。よって (NS1-5) は必要条件である。一方自由場による実現 (4.16) 式に於て

$$V_{\vec{\alpha}}(z) =: e^{i \sum_{j=1}^3 \alpha_j (\varphi^j(z) + \bar{\varphi}^j(z))} :, \quad (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0, \vec{\beta} \neq 0) \quad (4.26)$$

$$\sum_{i=1}^3 \beta_i \psi^i(z) V_{\vec{\alpha}}(z), \quad \sum_{i=1}^3 \beta_i \bar{\psi}^i(z) V_{\vec{\alpha}}(z)$$

は $(h, Q) = (\bar{\alpha}^2, 0), (\bar{\alpha}^2 + \frac{1}{2}, 1), (\bar{\alpha}^2 + \frac{1}{2}, -1)$ の最高重み状態を作り出すので十分条件でもある (証明終)。 (NS5) に於ては $\bar{Y}_0^2 |h, 1\rangle = Y_0^2 |h, -1\rangle = 0$ を示す事が出来、 $Q = \pm 1$ の状態は Y_0, \bar{Y}_0 によって移り変わる事になる (図2)。

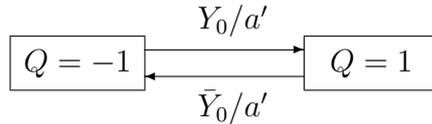


図 2 表現 (NS5). $a' = \sqrt{h - \frac{1}{2}}$.

R セクターも同様に証明出来る (図3) (スペクトラルフローを使えば簡単である)。

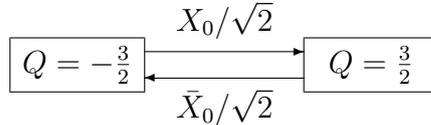


図 3.a) 表現 (R1).

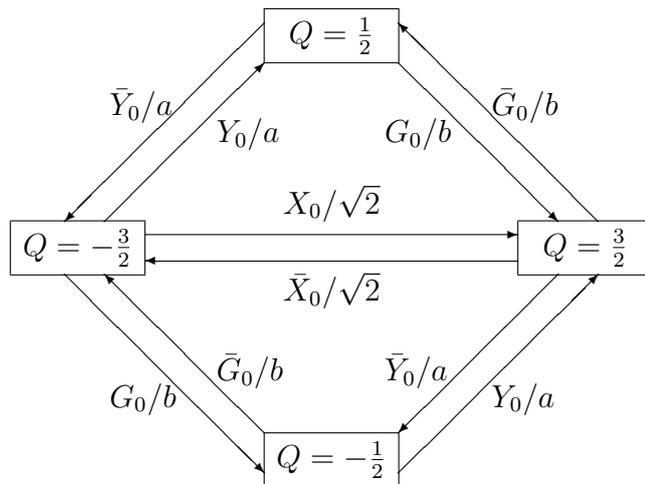


図 3.b) 表現 (R4). $a = \sqrt{h - \frac{3}{8}}, b = \sqrt{2(h - \frac{3}{8})}$.

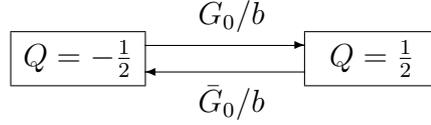


図 3.c) 表現 (R5). $b = \sqrt{2(h - \frac{3}{8})}$.

(R2) と (R3) は基底状態が対を成していないので、非零の Witten 指数を持っている。 $|h, Q\rangle$ の持つ $U(1)$ 電荷は NS セクターでは整数・R セクターでは半奇数で、生成元は整数の $U(1)$ 電荷を持っているので、表現の各状態の持つ $U(1)$ 電荷は NS セクターでは整数・R セクターでは半奇数である。

スペクトラルフロー (4.21) 式は NS セクターと R セクターとを結び付けている：(NS i) \leftrightarrow (R i) ($i=1, \dots, 5$)。あからさまにはその対応は

$$\begin{array}{lll}
\text{NS} \rightarrow \text{R} & & \\
(1) & |\frac{3}{8}, \frac{3}{2}\rangle^R = |0, 0\rangle^{NS} & , \frac{1}{\sqrt{2}}X_{-3/2}|0, 0\rangle^{NS} \\
(2) & |\frac{3}{8}, -\frac{1}{2}\rangle^R = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{X}_{-1/2}|\frac{1}{2}, 1\rangle^{NS} & , |\frac{1}{2}, 1\rangle^{NS} \\
(3) & |\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\rangle^R = |\frac{1}{2}, -1\rangle^{NS} & , \frac{1}{\sqrt{2}}X_{-1/2}|\frac{1}{2}, -1\rangle^{NS} \\
(4) & |h + \frac{3}{8}, \frac{3}{2}\rangle^R = |h > 0, 0\rangle^{NS} & , \frac{1}{\sqrt{2}}X_{-3/2}|h > 0, 0\rangle^{NS} \\
(5) & |h - \frac{1}{8}, -\frac{1}{2}\rangle^R = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{X}_{-1/2}|h > \frac{1}{2}, 1\rangle^{NS} & , |h > \frac{1}{2}, 1\rangle^{NS} \\
\text{R} \rightarrow \text{NS} & & \\
(1) & |0, 0\rangle^{NS} = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{X}_0|\frac{3}{8}, \frac{3}{2}\rangle^R & , |\frac{3}{8}, \frac{3}{2}\rangle^R \\
(2) & |\frac{1}{2}, 1\rangle^{NS} = |\frac{3}{8}, -\frac{1}{2}\rangle^R & , \frac{1}{\sqrt{2}}X_{-1}|\frac{3}{8}, -\frac{1}{2}\rangle^R \\
(3) & |\frac{1}{2}, -1\rangle^{NS} = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{X}_{-1}|\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\rangle^R & , |\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\rangle^R \\
(4) & |h - \frac{3}{8}, 0\rangle^{NS} = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{X}_0|h > \frac{3}{8}, \frac{3}{2}\rangle^R & , |h > \frac{3}{8}, \frac{3}{2}\rangle^R \\
(5) & |h + \frac{1}{8}, 1\rangle^{NS} = |h > \frac{3}{8}, -\frac{1}{2}\rangle^R & , \frac{1}{\sqrt{2}}X_{-1}|h > \frac{3}{8}, -\frac{1}{2}\rangle^R
\end{array} \tag{4.27}$$

である。 $N = 2$ 超共形代数の表現では $\eta \in \mathbf{Z}$ で別の表現に移ってしまったが、拡張された代数では (4.27) 式より $\eta \in \mathbf{Z}$ では表現が不変である事が分かる。スペクトラルフロー ($\eta = \pm\frac{1}{2}$) を時空の超対称変換と考えるわけであるから、超対称変換を 2 回やって ($\eta = \pm 1$)、表現が元に戻るの期待通りの性質である。

4.3 指標公式

指標公式とは表現空間内で質量レベル L_0 , $U(1)$ 電荷 I_0 等の同時対角化されている量子数についての固有空間の次元をまとめて表したもので、 $N = 2$ 超共形

代数や $\tilde{n} = 3$ 代数に対しては

$$ch(\theta, \tau) = \text{tr}_{\text{表現空間}} q^{L_0 - \frac{c}{24}} z^{I_0}, \quad q = e^{2\pi i \tau}, \quad z = e^{i\theta} \quad (4.28)$$

で定義される。 $\frac{c}{24}$ を引いているのはモジュラー変換性の為である。NS セクターの指標公式が分かれば R セクターの指標公式はスペクトラルフロー ($\eta = \frac{1}{2}$) (4.3) 式によって

$$\begin{aligned} ch_{NS}(\theta + \pi\tau, \tau) &= \text{tr}_{NS} q^{L_0 - \frac{c}{24}} (zq^{\frac{1}{2}})^{I_0} \\ &= \text{tr}_R q^{L_0' - \frac{c}{12}} z^{I_0' - \frac{c}{6}} = q^{-\frac{c}{24}} z^{-\frac{c}{6}} ch_R(\theta, \tau) \end{aligned} \quad (4.29)$$

で与えられる。指標公式 (4.28) 式を 1 ループの真空振幅と解釈すると、時間方向 (b サイクル) についてのフェルミオンの境界条件は反周期的であるが、フェルミオン数 $(-1)^F$ を挿入して周期的にした \widetilde{NS} セクター、 \widetilde{R} セクターも考えられる。 $N = 2$ 超共形代数や $\tilde{n} = 3$ 代数では生成元のボソン・フェルミオン性と $U(1)$ 電荷の偶奇性が一致しているので $(-1)^F = (-1)^{I_0}$ であり、 \widetilde{NS} , \widetilde{R} セクターの指標公式は

$$\begin{aligned} ch_{NS}(\theta + \pi, \tau) &= \text{tr}_{NS} q^{L_0 - \frac{c}{24}} (-z)^{I_0} \\ &= \text{tr}_{NS} (-1)^F q^{L_0 - \frac{c}{24}} z^{I_0} = ch_{\widetilde{NS}}(\theta, \tau) \\ ch_R(\theta + \pi, \tau) &= ch_{\widetilde{R}}(\theta, \tau) \end{aligned} \quad (4.30)$$

で与えられる。 $\eta = 1$ のスペクトラルフローでは同じセクターの (一般には異なった) 表現に戻るので $ch_{NS}(\theta + 2\pi\tau, \tau) = q^{-\frac{c}{6}} z^{-\frac{c}{3}} ch_{NS'}(\theta, \tau)$ となる。スペクトラルフローにより指標公式は θ についてこの様な 2 重周期性を持つのである。以下 ch と書けば $\tilde{n} = 3$ 代数のものであるとする。

前節で考察した表現論から導かれる ch の性質に付いて述べておく。 $\eta = \frac{1}{2}$ のスペクトラルフローにより $NS_i \rightarrow Ri$ なので両者の関係は

$$ch_{NS_i}(\theta + \pi\tau, \tau) = q^{-\frac{3}{8}} z^{-\frac{3}{2}} ch_{R_i}(\theta, \tau) \quad (i = 1, \dots, 5) \quad (4.31)$$

である。又 $\eta = 1$ のスペクトラルフローにより表現が不変なので指標公式は

$$ch_*(\theta + 2\pi\tau, \tau) = q^{-\frac{3}{2}} z^{-3} ch_*(\theta, \tau) \quad (* = NS1-5, R1-5) \quad (4.32)$$

という性質を持っている。よって (C.1) 式より ch は z の関数として 3 つの関数

$$f_Q(\theta, \tau) = \frac{1}{\eta(\tau)} \sum_{n \in \mathbf{Z}} q^{\frac{3}{2}(n + \frac{Q}{3})^2} z^{3(n + \frac{Q}{3})} \quad (Q = 0, \pm 1) \quad (4.33)$$

で展開される事になる。ここで $\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)$ である。これらの関数は $c = 1$ の $N = 2$ 超共形代数の指標公式

$$\begin{aligned} f_0(\theta, \tau) &= ch_{h=0, Q=0}^{N=2, c=1}(3\theta, \tau) \\ f_{\pm 1}(\theta, \tau) &= ch_{h=\frac{1}{6}, Q=\pm\frac{1}{3}}^{N=2, c=1}(3\theta, \tau) \end{aligned} \quad (4.34)$$

そのものであるから、この展開は ch を部分代数 (4.15) 式の指標公式で展開する事に他ならない。 ch 及びこの展開を

$$\begin{aligned} q^{\frac{9}{24}-h} ch_*(\theta, \tau) &= F_*(\theta, \tau) \prod_{n \geq 1} \frac{(1 + zq^{n-\frac{1}{2}})(1 + z^{-1}q^{n-\frac{1}{2}})}{(1 - q^n)^2} = F_*(\theta, \tau) \frac{\sum_{n \in \mathbf{Z}} q^{\frac{1}{2}n^2} z^n}{\prod_{n \geq 1} (1 - q^n)^3} \\ &= (F_{0*}(\tau)\eta(\tau)f_0(\theta, \tau) \\ &\quad + F_{+*}(\tau)q^{\frac{1}{3}}\eta(\tau)(f_1(\theta, \tau) + f_{-1}(\theta, \tau)) \\ &\quad + F_{-*}(\tau)q^{\frac{1}{3}}\eta(\tau)(f_1(\theta, \tau) - f_{-1}(\theta, \tau))) \times \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)^{-3} \\ &(* = \text{NS1-5}) \end{aligned} \quad (4.35)$$

とおく事にする。 massive 表現と massless 表現の関係は R セクターで見易く、図 3 より

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow \frac{3}{8}} ch_{R4} &= ch_{R1} + ch_{R2} + ch_{R3} \\ \lim_{h \rightarrow \frac{3}{8}} ch_{R5} &= ch_{R2} + ch_{R3} \end{aligned} \quad (4.36)$$

である。これを NS セクターに戻せば

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} ch_{NS4} &= ch_{NS1} + ch_{NS2} + ch_{NS3} \\ \lim_{h \rightarrow \frac{1}{2}} ch_{NS5} &= ch_{NS2} + ch_{NS3} \end{aligned} \quad (4.37)$$

となる。(4.31) 式があるので以下 ch_{NS} を考える事にする。 $U(1)$ 電荷の符号の取り換え、即ち $\theta \rightarrow -\theta$ に対して

$$\begin{aligned} ch_{NSi}(-\theta, \tau) &= ch_{NSi}(\theta, \tau) \quad (i = 1, 4, 5) \\ ch_{NS3}(-\theta, \tau) &= ch_{NS2}(\theta, \tau) \end{aligned} \quad (4.38)$$

である。

ch を T, I, G, \bar{G} で生成される $c = 9$ の $N = 2$ 超共形代数で分解する事を考える。NS4 を例に取る。 $\tilde{n} = 3$ 代数の最高重み状態 $|h, 0\rangle$ は $N = 2$ 超共形代数でみ

ても最高重み状態である: $|h, 0\rangle^{N=2} = |h, 0\rangle$ 。この表現 $|h, 0\rangle^{N=2}$ を $\eta = m (\in \mathbf{Z})$ のスペクトラルフローで写像すると (4.5) 式 より表現 $|h + m^2, 2m\rangle^{N=2}$ に移るが、これらは表現 $|h, 0\rangle$ の中で

$$|h + m^2, 2m\rangle^{N=2} = \begin{cases} \prod_{j=1}^m \frac{Y_{-(2j-1)}}{\sqrt{h+j(j-1)}} |h, 0\rangle & m \geq 1 \\ |h, 0\rangle & m = 0 \\ \prod_{j=1}^{-m} \frac{\bar{Y}_{-(2j-1)}}{\sqrt{h+j(j-1)}} |h, 0\rangle & m \leq -1 \end{cases} \quad (4.39)$$

と表す事が出来る (証明は補遺 D)。この性質があるので $X(Y)$ を ($\eta \in \mathbf{Z}$ の) フローの生成元と呼んだのである。NS4 にはこれらの $N = 2$ 超共形代数の表現が入っている事は分かったのだが、ここで $\tilde{n} = 2$ 代数つまり $c = 6$ の $N = 4$ 超共形代数の結果を思い出してみよう。 $N = 4$ 超共形代数では、最高重み状態を $N = 2$ 超共形代数の最高重み状態と考えて $\eta \in \mathbf{Z}$ のスペクトラルフローで写像し、その移った表現の指標公式を全て足し合わせると丁度 $N = 4$ 超共形代数の指標公式になっていた。そこで $\tilde{n} = 3$ 代数でも ch_{NS4} は (4.39) 式の指標公式の和となる事を予想として掲げる事にする。この様に表現を $N = 2$ 超共形代数で分解した時に、最高重み状態を $N = 2$ 超共形代数の最高重み状態と考えて $\eta \in \mathbf{Z}$ のスペクトラルフローで写像したものしか現れないという予想の下での量を、(予想に対して証明を与えてないので) 一応区別して \prime を付けておく事にする。(4.39) 式は $N = 2$ 超共形代数の massive 表現で (補遺 E(1)), NS4 の指標公式 (4.35) 式は

$$F'_{NS4}(\theta, \tau) = \sum_{m \in \mathbf{Z}} q^{m^2} z^{2m} \quad (4.40)$$

で、 f_Q での分解は

$$F'_{0NS4}(\tau) = \sum_{m \in \mathbf{Z}} q^{3m^2}, \quad F'_{+NS4}(\tau) = \sum_{m \in \mathbf{Z}} q^{3m^2 - 2m}, \quad F'_{-NS4}(\tau) = 0 \quad (4.41)$$

となる。この分解の式は (C.2) 式 を用いて証明出来る。

同様に NS5 では $|h, 1\rangle^{N=2} = |h, 1\rangle$ を $\eta = m (\in \mathbf{Z})$ のスペクトラルフローで移すと

$$|h + m(m+1), 2m+1\rangle^{N=2} = \begin{cases} \prod_{j=1}^m \frac{Y_{-2j}}{\sqrt{h+j^2-\frac{1}{2}}} |h, 1\rangle & m \geq 0 \\ \prod_{j=1}^{-m-1} \frac{\bar{Y}_{-2j}}{\sqrt{h+j^2-\frac{1}{2}}} \times \frac{\bar{Y}_0}{\sqrt{h-\frac{1}{2}}} |h, 1\rangle & m \leq -1 \end{cases} \quad (4.42)$$

に移る。但し $\prod_{j=n}^{n-1} * = 1$ とする。これらは $N = 2$ 超共形代数の massive 表現で、NS5 の指標公式 (4.35) 式は

$$F'_{NS5}(\theta, \tau) = \sum_{m \in \mathbf{Z}} q^{m(m+1)} z^{2m+1} \quad (4.43)$$

で, f_Q での分解は

$$F'_{0NS5}(\tau) = \sum_{m \in \mathbf{Z}} q^{3m(m+1)+\frac{1}{2}}, \quad F'_{+NS5}(\tau) = \sum_{m \in \mathbf{Z}} q^{3m^2+m-\frac{1}{2}}, \quad F'_{-NS5}(\tau) = 0 \quad (4.44)$$

となる。NS1 では $|0,0\rangle^{N=2} = |0,0\rangle$ を $\eta = m (\in \mathbf{Z})$ のスペクトラルフローで移すと

$$\begin{cases} |m(m+1) - \frac{1}{2}, 2m+1\rangle^{N=2} = \prod_{j=2}^m \frac{Y_{-2j}}{\sqrt{j^2-1}} \times \frac{X_{-3/2}}{\sqrt{2}} |0,0\rangle & m \geq 1 \\ |0,0\rangle^{N=2} = |0,0\rangle & m = 0 \\ |m(m-1) - \frac{1}{2}, 2m-1\rangle^{N=2} = \prod_{j=2}^{-m} \frac{\bar{Y}_{-2j}}{\sqrt{j^2-1}} \times \frac{\bar{X}_{-3/2}}{\sqrt{2}} |0,0\rangle & m \leq -1 \end{cases} \quad (4.45)$$

に移る。これらは $N=2$ 超共形代数の massless 表現 (補遺 E(2)(ii)) で, NS1 の指標公式 (4.35) 式は

$$\begin{aligned} F'_{NS1}(\theta, \tau) &= \sum_{m \in \mathbf{Z}} \frac{1-q}{(1+zq^{m-\frac{1}{2}})(1+zq^{m+\frac{1}{2}})} q^{m(m+1)-\frac{1}{2}} z^{2m+1} \\ &= F'_{NS4}(\theta, \tau) - q^{\frac{1}{2}} F'_{NS5}(\theta, \tau) \end{aligned} \quad (4.46)$$

で, f_Q での分解は

$$\begin{aligned} F'_{0NS1}(\tau) &= F'_{0NS4}(\tau) - q^{\frac{1}{2}} F'_{0NS5}(\tau) = \sum_{m \in \mathbf{Z}} q^{3m^2} - \sum_{m \in \mathbf{Z}} q^{3m(m+1)+1} \\ F'_{+NS1}(\tau) &= F'_{+NS4}(\tau) - q^{\frac{1}{2}} F'_{+NS5}(\tau) = \sum_{m \in \mathbf{Z}} q^{3m^2-2m} - \sum_{m \in \mathbf{Z}} q^{3m^2+m} \\ F'_{-NS1}(\tau) &= 0 \end{aligned} \quad (4.47)$$

となる。NS2 では $|\frac{1}{2}, 1\rangle^{N=2} = |\frac{1}{2}, 1\rangle$ を $\eta = m (\in \mathbf{Z})$ のスペクトラルフローで移すと

$$\begin{cases} |m(m+1) + \frac{1}{2}, 2m+1\rangle^{N=2} = \prod_{j=1}^m \frac{Y_{-2j}}{j} |\frac{1}{2}, 1\rangle & m \geq 0 \\ |m^2, 2m\rangle^{N=2} = \prod_{j=2}^{-m} \frac{\bar{Y}_{-2j+1}}{\sqrt{j(j-1)}} \times \frac{\bar{X}_{-1/2}}{\sqrt{2}} |\frac{1}{2}, 1\rangle & m \leq -1 \end{cases} \quad (4.48)$$

に移る。これらは $N=2$ 超共形代数の massless 表現 (補遺 E(2)(i)) で, NS2 の指標公式 (4.35) 式は

$$\begin{aligned} F'_{NS2}(\theta, \tau) &= \sum_{m \in \mathbf{Z}} \frac{q^{m(m+1)} z^{2m+1}}{1+zq^{m+\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{1}{2} F'_{NS5}(\theta, \tau) + \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbf{Z}} \frac{1-zq^{m+\frac{1}{2}}}{1+zq^{m+\frac{1}{2}}} q^{m(m+1)} z^{2m+1} \end{aligned} \quad (4.49)$$

で, f_Q での分解は

$$\begin{aligned}
F'_{0NS2}(\tau) &= \frac{1}{2}F'_{0NS5}(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbf{Z}} q^{3m(m+1)+\frac{1}{2}} \\
F'_{+NS2}(\tau) &= \frac{1}{2}F'_{+NS5}(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbf{Z}} q^{3m^2+m-\frac{1}{2}} \\
F'_{-NS2}(\tau) &= \frac{1}{2}q^{-\frac{1}{2}} \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)^2
\end{aligned} \tag{4.50}$$

となる。

ch' が正しい事の状況証拠を挙げておく。(4.38) 式は成立しているが, 更に(4.49) 式, (4.46) 式, (4.38) 式より

$$\begin{aligned}
ch'_{NS4}(\theta, \tau) &= q^h(ch'_{NS1}(\theta, \tau) + ch'_{NS2}(\theta, \tau) + ch'_{NS3}(\theta, \tau)) \\
ch'_{NS5}(\theta, \tau) &= q^{h-\frac{1}{2}}(ch'_{NS2}(\theta, \tau) + ch'_{NS3}(\theta, \tau))
\end{aligned} \tag{4.51}$$

であるから (4.37) 式も成立している。モジュラー変換性は現在研究中だが, f_Q の変換性

$$\begin{aligned}
f_0\left(\frac{\theta}{\tau}, \frac{-1}{\tau}\right) &= \frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{3i\theta^2}{4\pi\tau}}(f_0(\theta, \tau) + f_+(\theta, \tau)) \\
f_+\left(\frac{\theta}{\tau}, \frac{-1}{\tau}\right) &= \frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{3i\theta^2}{4\pi\tau}}(2f_0(\theta, \tau) - f_+(\theta, \tau)) \\
f_-\left(\frac{\theta}{\tau}, \frac{-1}{\tau}\right) &= -ie^{\frac{3i\theta^2}{4\pi\tau}}f_-(\theta, \tau) \quad (\text{但し } f_{\pm} = f_1 \pm f_{-1})
\end{aligned} \tag{4.52}$$

が, f_0, f_+ と f_- に分離しているので, F_- が零でない NS2,3 はモジュラー変換した時にその massless 部分は NS2,3 に戻ってくるはずである。つまり f_- の係数は良いモジュラー変換性を持っているはずである。(4.50) 式より ch_{NS2} の f_- の係数は $\frac{1}{2}$ なので τ に依らなくなっておりこの要求を満たしている事が分かる。 L_0 のレベルの低いところは内積行列を直接計算して指標公式を求めればよい。数式処理システム (MACSYMA) の使用により, L_0 のレベルが3迄は実際に $ch_{NS} = ch'_{NS}$ となっている事を確かめた。これがどのくらい自明でない事かと言うと, 例えば NS1 の指標公式

$$\begin{aligned}
ch_{NS1} &= 1 + q + (z^3 + z + z^{-1} + z^{-3})q^{\frac{3}{2}} + (z^2 + 3 + z^{-2})q^2 \\
&\quad + (z^3 + 2z + 2z^{-1} + z^{-3})q^{\frac{5}{2}} + (2z^2 + 6 + 2z^{-2})q^3 \\
&\quad + \dots
\end{aligned} \tag{4.53}$$

とその Verma 加群の指標

$$\begin{aligned}
& \prod_{n \geq 1} \frac{(1 + zq^{n-\frac{1}{2}})(1 + z^{-1}q^{n-\frac{1}{2}})(1 + z^3q^{n-\frac{1}{2}})(1 + z^{-3}q^{n-\frac{1}{2}})}{(1 - q^n)^2(1 - z^2q^n)(1 - z^{-2}q^n)} \\
= & 1 + (z^3 + z + z^{-1} + z^{-3})q^{\frac{1}{2}} + (z^4 + 2z^2 + 4 + 2z^{-2} + z^{-4})q \\
& + (z^5 + 5z^3 + 6z + 6z^{-1} + 5z^{-3} + z^{-5})q^{\frac{3}{2}} \\
& + (2z^6 + 6z^4 + 11z^2 + 17 + 11z^{-2} + 6z^{-4} + 2z^{-6})q^2 \\
& + (2z^7 + 8z^5 + 21z^3 + 27z + 27z^{-1} + 21z^{-3} + 8z^{-5} + 2z^{-7})q^{\frac{5}{2}} \\
& + (2z^8 + 11z^6 + 27z^4 + 45z^2 + 60 + 45z^{-2} + 27z^{-4} + 11z^{-6} + 2z^{-8})q^3 \\
& + \dots
\end{aligned} \tag{4.54}$$

を比べてみれば見当がつくであろう。

4.4 Ricci 平坦 Kähler 多様体上の非線型 σ 模型

§4.1 で $SU(\tilde{n})$ ホロノミーを持つ多様体の (反) 正則 \tilde{n} -微分形式と ($\eta \in \mathbf{Z}$) のスペクトラルフローの生成元が対応していると述べたのだが, 本節では $SU(\tilde{n})$ ホロノミーを持つ多様体上の非線型 σ 模型が \tilde{n} 代数に対応する対称性を持っている事を示す事にする。Ricci 平坦 Kähler 多様体上の非線型 σ 模型が摂動論の全次数で β 関数が 0 であるかどうか著者にはよく分からないが [50, 51, 52], この問題には触れない事にする。

複素 \tilde{n} 次元 Kähler 多様体上の非線型 σ 模型は (2, 2) 型の超対称性を持っている [53]。つまり作用 $S = \int dx^0 dx^1 \mathcal{L}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & 2g_{\alpha\bar{\beta}}(\partial_+ \phi^\alpha \partial_- \phi^{\bar{\beta}} + \partial_- \phi^\alpha \partial_+ \phi^{\bar{\beta}}) \\
& + 2g_{\alpha\bar{\beta}}(i\psi_+^\alpha (\partial_- \psi_+^{\bar{\beta}} + \Gamma_{\bar{\gamma}\delta}^{\bar{\beta}} \partial_- \phi^{\bar{\gamma}} \psi_+^{\bar{\delta}}) + i\psi_+^{\bar{\beta}} (\partial_- \psi_+^\alpha + \Gamma_{\gamma\delta}^\alpha \partial_- \phi^\gamma \psi_+^\delta)) \\
& + i\psi_-^\alpha (\partial_+ \psi_-^{\bar{\beta}} + \Gamma_{\bar{\gamma}\delta}^{\bar{\beta}} \partial_+ \phi^{\bar{\gamma}} \psi_-^{\bar{\delta}}) + i\psi_-^{\bar{\beta}} (\partial_+ \psi_-^\alpha + \Gamma_{\gamma\delta}^\alpha \partial_+ \phi^\gamma \psi_-^\delta) \\
& + 4R_{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} \psi_+^\alpha \psi_+^{\bar{\beta}} \psi_-^\gamma \psi_-^{\bar{\delta}}
\end{aligned} \tag{4.55}$$

は超変換

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{G_\pm} \phi^\alpha = -i\sqrt{2}\varepsilon \psi_\pm^\alpha \\ \delta_{G_\pm} \psi_\pm^\alpha = \sqrt{2}\varepsilon \partial_\pm \phi^\alpha \\ \delta_{G_\pm} \psi_\mp^\alpha = -i\sqrt{2}\varepsilon \Gamma_{\bar{\beta}\bar{\gamma}}^\alpha \psi_\mp^{\bar{\beta}} \psi_\mp^{\bar{\gamma}} \\ \delta_{G_\pm} \text{others} = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \delta_{\bar{G}_\pm} \phi^\alpha = -i\sqrt{2}\varepsilon \psi_\pm^\alpha \\ \delta_{\bar{G}_\pm} \psi_\pm^\alpha = \sqrt{2}\varepsilon \partial_\pm \phi^\alpha \\ \delta_{\bar{G}_\pm} \psi_\mp^\alpha = -i\sqrt{2}\varepsilon \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \psi_\mp^\beta \psi_\mp^\gamma \\ \delta_{\bar{G}_\pm} \text{others} = 0 \end{array} \right. \tag{4.56}$$

の下で不変になっている。ここで ∂_{\pm} は $\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x^0} \pm \frac{\partial}{\partial x^1})$ で、フェルミオンの添字 \pm は chirality である。

この多様体が更に Ricci 平坦 であるとすると、 S は新たな対称性を持つ事になる。複素 \tilde{n} 次元 Ricci 平坦 Kähler 多様体には covariantly constant な正則（反正則） $(\tilde{n}, 0)$ -形式 $((0, \tilde{n})$ -形式) : $E_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{\tilde{n}}} (E_{\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 \dots \bar{\alpha}_{\tilde{n}}})$ が存在していて [1], S は変分

$$\begin{cases} \delta_{X_{\pm}} \psi_{\pm}^{\alpha} &= \sqrt{2} \varepsilon \frac{(-1)^{\tilde{n}-1}}{(\tilde{n}-1)!} g^{\alpha \bar{\alpha}_1} E_{\bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_{\tilde{n}}} \psi_{\pm}^{\bar{\alpha}_2} \dots \psi_{\pm}^{\bar{\alpha}_{\tilde{n}}} \\ \delta_{X_{\pm}} \text{others} &= 0 \\ \delta_{\bar{X}_{\pm}} \psi_{\pm}^{\bar{\alpha}} &= \sqrt{2} \varepsilon \frac{(-1)^{\tilde{n}-1}}{(\tilde{n}-1)!} g^{\alpha_1 \bar{\alpha}} E_{\alpha_1 \dots \alpha_{\tilde{n}}} \psi_{\pm}^{\alpha_2} \dots \psi_{\pm}^{\alpha_{\tilde{n}}} \\ \delta_{\bar{X}_{\pm}} \text{others} &= 0 \end{cases} \quad (4.57)$$

で不変になっている。例えば δ_{X_+} を考えると、これは $X_+ = \sqrt{2} \frac{1}{\tilde{n}!} E_{\bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_{\tilde{n}}} \psi_+^{\bar{\alpha}_1} \dots \psi_+^{\bar{\alpha}_{\tilde{n}}}$ で引き起こされ、 $\partial_{\beta} E_{\bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_{\tilde{n}}} = 0$ を用いて

$$\begin{aligned} \delta_{X_+} \mathcal{L}_{\text{fermion term}} &= -i4\sqrt{2}\varepsilon \frac{1}{\tilde{n}!} \partial_- \phi^{\bar{\beta}} \nabla_{\bar{\beta}} E_{\bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_{\tilde{n}}} \psi_+^{\bar{\alpha}_1} \dots \psi_+^{\bar{\alpha}_{\tilde{n}}} \\ &\quad + \text{total derivative term} \\ \delta_{X_+} \mathcal{L}_{\text{curvature term}} &= 4\varepsilon (-1)^{\tilde{n}-1} R_{\alpha \bar{\beta}} \psi_-^{\alpha} \psi_-^{\bar{\beta}} X_+ \end{aligned} \quad (4.58)$$

を示す事が出来る。Ricci 平坦 Kähler 多様体の場合は $\nabla_{\bar{\beta}} E_{\bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_{\tilde{n}}} = R_{\alpha \bar{\beta}} = 0$ であったから、 S は δ_{X_+} で不変になっている事が分かる。 δ_{X_+} と δ_{G_+} は交換するが、 δ_{X_+} と $\delta_{\bar{G}_+}$ は交換しない事が確かめられて、これは $X(z)$ の超変換 (4.7) 式に対応している。自由場による実現 (4.16) 式, (4.60) 式は背景場が平坦な場合のものである。

4.5 議論

Calabi-Yau コンパクト化に関連した代数 (4.13) 式を与えその表現論を展開したわけだが、指標公式の証明とモジュラー変換性はまだやり残している。先ずこれを調べ、次に分配関数がモジュラー不変になる様に指標公式を組むという最も重要な課題に取り組む事になる。しかし、 $\tilde{n} = 3$ 代数は $c = 6$ の $N = 4$ 超共形代数と似た性質を持っているので、モジュラー不変な分配関数は Gepner の方法に依らなければ恐らく見つける事が困難であろう。 $c = 9$ のモジュラー不変な分配関数の性質に付いては [15] で調べていて、 $\tilde{n} = 3$ 代数は Calabi-Yau 多様体より広い範囲のものを対象にしている様である。

超絃理論のコンパクト化とは関係なくなるが、 $\tilde{n} \geq 4$ では拡張された代数はどの様なものであろうか。 $\tilde{n} = 4$ では結合律により中心荷 c は 12 又は $-15 \pm \frac{3}{7}\sqrt{889} (< 0)$ に決ってしまう。正の c に興味があるので、結局 $c = 12$ となり代数は一意的に決まる。一般の $\tilde{n} (\geq 1)$ で $c = 3\tilde{n}$ に限定すると少なくとも一つ代数が存在し、 $X\bar{X}$ の演算子積展開は

$$X(z)|\bar{X}\rangle = 2 \sum_{m=1}^{\tilde{n}} z^{-m} \sum_{\substack{\{i_k \geq 0\}_{k \geq 1} \\ \sum_{k \geq 1} k i_k = \tilde{n} - m}} \prod_{k \geq 1} \frac{1}{i_k! k^{i_k}} I_{-k}^{i_k} |0\rangle + \text{reg.} \quad (4.59)$$

で、他の演算子積展開は (4.9) 式で求まる。 $\tilde{n} = 3$ の時と同様に I, X, \bar{X} は部分代数を生成し、関係式 $(IX)(z) = \partial X(z)$ が成立する。これは $I(z)$ を (4.1) 式の様子に書けば分かりやすいであろう。この代数 (4.59) 式は (4.16) 式と同様に \tilde{n} 組の複素自由ボソン・フェルミオンで

$$\begin{aligned} G(z) &= \sqrt{2} \sum_{j=1}^{\tilde{n}} \psi^j(z) i \partial \varphi^j(z) \\ X(z) &= \sqrt{2} \frac{1}{\tilde{n}!} \sum_{i_1, \dots, i_{\tilde{n}}=1}^{\tilde{n}} \varepsilon_{i_1 \dots i_{\tilde{n}}} \psi^{i_1}(z) \cdots \psi^{i_{\tilde{n}}}(z) = \sqrt{2} \psi^1 \psi^2 \cdots \psi^{\tilde{n}} \end{aligned} \quad (4.60)$$

によって実現される。他の代数が可能かどうかはまだ調べていない。

5 まとめ

最後に本論文で得られた結果ならびに今後の課題に付いてまとめておく。§2では共形代数及び $N = 1, 2$ 超共形代数がフェルミオンで実現される為の必要十分条件を求め、 $N = 2$ 超共形代数の場合には実フェルミオンを用いるとかなり複雑だった条件式が複素フェルミオンをうまく用いると非常に簡単になる事を示し、更にこの場合にはその十分条件を考える事により幾つかの新しい解を得た。今後の課題としては、表現論の解析が容易な群に基礎を置くモデルを詳しく調べる事、理論を変形出来る様に連続媒介変数を含んだ解を見付ける事等が挙げられる。§3では共形代数の W 代数的拡張法を与え、その一例として §4では超弦理論の Calabi-Yau コンパクト化に関連する代数を構成した。時空の $N = 1$ 超対称性があればこの代数が存在する事を示し、表現論を展開した。Ricci 平坦 Kähler 多様体上の非線型 σ モデルはこれに対応する対称性を持っている。この代数は超弦理論の Calabi-Yau コンパクト化を制御するものであるから、今後の最大の課題はモジュラー不変な分配関数を見付け、そして低エネルギーの現象論を展開する事である。

謝辞

日頃から御指導して頂き数多くの助言・示唆・議論をして下さった指導教官の江口 徹助教授に心から感謝致します。基研の稲見 武夫助教授, 京大の小林 健一郎博士, そして川合 光助教授, 北沢 良久助手, 大栗 博司助手, 石橋 延幸氏, 三木 敬氏, 加藤 晃史氏, 溝口 俊弥氏, 小野 瑞城氏, 村山 斉氏を初めとする素粒子論研究室の皆様には有益な議論をして頂き大変お世話になりました。又, 計算機の操作に付いて親切に教えて頂いた加藤氏, 村山氏にこの場をかりてお礼申します。

補遺 A 演算子積展開の性質

§3.1 で述べた状況を考える。2つの場の演算子積展開

$$A(z)B(w) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \frac{\{AB\}_n(w)}{(z-w)^n} \quad (\text{A.1})$$

によって $\{AB\}_n(z)$ を定義し、正規順序積 $(,)$ とは $\{, \}_0$ の事である。 $\{, \}_n$ は2つの場から1つの場を対応させる双線型な写像と考える事が出来る。この写像の持つ基本的な性質は

$$(1) \quad \{1A\}_n = \delta_{n0}A \quad (\text{A.2})$$

$$(2) \quad \{BA\}_n = (-1)^{AB+n} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!} \partial^r \{AB\}_{n+r} \quad (\text{A.3})$$

$$(3) \quad \{\partial AB\}_n = -(n-1)\{AB\}_{n-1} \quad (\text{A.4})$$

$$(4) \quad \{A\{BC\}_m\}_n = (-1)^{AB} \{B\{AC\}_n\}_m + \theta(n > 0) \sum_{r=1}^n {}_{n-1}C_{r-1} \{\{AB\}_r C\}_{n+m-r} + \theta(n \leq 0) \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r+1} {}_{r-n-1}C_{-n} \{\{AB\}_r C\}_{n+m-r} \quad (\text{A.5})$$

である。ここで $\theta(\text{命題})$ は命題が真の時に1・偽の時に0となる階段関数である。(4) が (3.5) 式 で述べた結合律である。他にも有用な式として

$$(1') \quad \{A1\}_n = \theta(n \geq 0) \frac{1}{n!} \partial^n A \quad (\text{A.6})$$

$$(3') \quad \partial\{AB\}_n = \{\partial AB\}_n + \{A\partial B\}_n \quad (\text{A.7})$$

$$(4') \quad \{\{AB\}_n C\}_m = \theta(n > 0) \sum_{r=1}^n {}_{n-1}C_{r-1} (-1)^{n+r} \times (\{A\{BC\}_{n+m-r}\}_r - (-1)^{AB} \{B\{AC\}_r\}_{n+m-r}) + \theta(n \leq 0) \sum_{r=1}^{\infty} {}_{r-n-1}C_{-n} \times (\{A\{BC\}_{m+r-1}\}_{n-r+1} + (-1)^{AB+n} \{B\{AC\}_r\}_{n+m-r}) \quad (\text{A.8})$$

がある。

補遺 B N=2 W_3 代数の演算子積展開

$$\begin{aligned}
& V(z)|V\rangle \\
&= (z^{-4}a \\
&+ z^{-2}\left(\frac{a}{c(c-1)}(-6I_{-1}^2 + 4cL_{-2}) + bV_{-2}\right) \\
&+ z^{-1}\left(\frac{a}{c(c-1)}(-6I_{-1}I_{-2} + 2cL_{-3}) + \frac{1}{2}bV_{-3}\right) \\
&\times |0\rangle + \text{reg.}
\end{aligned} \tag{B.1}$$

$$\begin{aligned}
& U(z)|V\rangle \\
&= (z^{-3}\frac{6a}{c}G_{-\frac{3}{2}} \\
&+ z^{-2}\left(\frac{a}{c(c-1)}(6I_{-1}G_{-\frac{3}{2}} + 2(2c-3)G_{-\frac{5}{2}}) + \frac{1}{2}bU_{-\frac{5}{2}}\right) \\
&+ z^{-1}\left(\frac{a}{c(c-1)(c+6)(2c-3)}(9(c-1)(c-6)I_{-2}G_{-\frac{3}{2}} - 18(4c+3)I_{-1}^2G_{-\frac{3}{2}}\right. \\
&\quad + 6(c^2 + 24c - 18)I_{-1}G_{-\frac{5}{2}} + 54c(c-1)L_{-2}G_{-\frac{3}{2}} \\
&\quad + 6(c-1)(c-6)(c+3)G_{-\frac{7}{2}} \\
&\quad \left. + \frac{b}{(c+3)(5c-12)}(3(c-15)I_{-1}U_{-\frac{5}{2}} + 27(c-1)G_{-\frac{3}{2}}V_{-2} + \frac{3}{2}(c-1)(c-6)U_{-\frac{7}{2}})\right) \\
&\times |0\rangle + \text{reg.}
\end{aligned} \tag{B.2}$$

$$\begin{aligned}
& W(z)|V\rangle \\
&= (z^{-4}\frac{-12a}{c}I_{-1} \\
&+ z^{-3}\frac{-12a}{c}I_{-2} \\
&+ z^{-2}\left(\frac{a}{c(c-1)(c+6)(2c-3)}(-12(2c^3 + 2c^2 - 15c + 18)I_{-3} + 36(4c+3)I_{-1}^3\right. \\
&\quad - 12(8c^2 - 9c + 36)I_{-1}L_{-2} + 18c(5c-12)L_{-3} - 18c(5c-12)G_{-\frac{3}{2}}\bar{G}_{-\frac{3}{2}}) \\
&\quad + \frac{b}{5c-12}(-42I_{-1}V_{-2} + \frac{3}{2}(c-8)W_{-3})) \\
&+ z^{-1}\left(\frac{a}{c(c-1)(c+6)(2c-3)}(-12(2c^3 - 3c^2 - 3c + 18)I_{-4} + 72(4c+3)I_{-1}^2I_{-2}\right. \\
&\quad - 24c(4c+3)I_{-2}L_{-2} - 48(c^2 - 3c + 9)I_{-1}L_{-3} + 24c(5c-12)L_{-4} \\
&\quad - 12c(5c-12)G_{-\frac{5}{2}}\bar{G}_{-\frac{3}{2}} - 12c(5c-12)G_{-\frac{3}{2}}\bar{G}_{-\frac{5}{2}}) \\
&\quad + \frac{b}{(c+3)(5c-12)}(-12(4c+3)I_{-2}V_{-2} - 18(c+6)I_{-1}V_{-3} \\
&\quad \left. + 3(5c-12)G_{-\frac{3}{2}}\bar{U}_{-\frac{5}{2}} + 3(5c-12)\bar{G}_{-\frac{3}{2}}U_{-\frac{5}{2}} + c(c-15)W_{-4})\right) \\
&\times |0\rangle + \text{reg.}
\end{aligned} \tag{B.3}$$

$$\begin{aligned}
& U(z)|U\rangle \\
&= z^{-1}\left(\frac{12a}{c(c-1)}G_{-\frac{3}{2}}G_{-\frac{5}{2}} + \frac{6b}{c+3}G_{-\frac{3}{2}}U_{-\frac{5}{2}}\right) \\
&\times |0\rangle + \text{reg.}
\end{aligned} \tag{B.4}$$

$$\begin{aligned}
& U(z)|\bar{U}\rangle \\
&= (z^{-5}4a \\
&+ z^{-4}\frac{12a}{c}I_{-1} \\
&+ z^{-3}\left(\frac{a}{c(c-1)}(6(c-1)I_{-2} - 12I_{-1}^2 + 4(5c-3)L_{-2}) + 2bV_{-2}\right) \\
&+ z^{-2}\left(\frac{a}{c(c-1)}(8c(c^2 - 3c + 9)I_{-3} - 12(c+6)(2c-3)I_{-1}I_{-2} \right. \\
&\quad - 36(4c+3)I_{-1}^3 + 24(5c^2+9)I_{-1}L_{-2} + 4c(5c^2+9)L_{-3} \\
&\quad + 6(c-3)(13c-6)G_{-\frac{3}{2}}\bar{G}_{-\frac{3}{2}}) \\
&\quad + \frac{b}{5c-12}(42I_{-1}V_{-2} + (5c-12)V_{-3} + (c+6)W_{-3})) \\
&+ z^{-1}\left(\frac{a}{c(c-1)(c+6)(2c-3)}(6c(c-1)(c-6)I_{-4} - 12(c^2+24c-18)I_{-1}I_{-3} \right. \\
&\quad - 9(c-1)(c-6)I_{-2}^2 - 54(4c+3)I_{-1}^2I_{-2} + 12(5c^2+9)I_{-2}L_{-2} \\
&\quad - 36(4c+3)I_{-1}^2L_{-2} + 12c(5c-12)I_{-1}L_{-3} + 36(4c+3)I_{-1}G_{-\frac{3}{2}}\bar{G}_{-\frac{3}{2}} \\
&\quad + 12c(c-1)(c-6)L_{-4} + 108c(c-1)L_{-2}^2 + 18(3c^2-16c+6)G_{-\frac{5}{2}}\bar{G}_{-\frac{3}{2}} \\
&\quad + 6c(4c+3)G_{-\frac{3}{2}}\bar{G}_{-\frac{5}{2}}) \\
&\quad + \frac{b}{(c+3)(5c-12)}(21(c+3)I_{-2}V_{-2} + 21(c+3)I_{-1}V_{-3} \\
&\quad + 3(c-15)I_{-1}W_{-3} + 54(c-1)L_{-2}V_{-2} + 3(4c+3)G_{-\frac{3}{2}}\bar{U}_{-\frac{5}{2}} \\
&\quad \left. - 3(4c+3)\bar{G}_{-\frac{3}{2}}U_{-\frac{5}{2}} + 3(c-1)(c-6)V_{-4} + \frac{1}{2}(c+3)(c+6)W_{-4})\right) \\
&\times |0\rangle + \text{reg.}
\end{aligned} \tag{B.5}$$

$$\begin{aligned}
& U(z)|W\rangle \\
&= (z^{-4}\frac{30a}{c}G_{-\frac{3}{2}} \\
&+ z^{-3}\left(\frac{a}{c(c-1)}(-12I_{-1}G_{-\frac{3}{2}} + 2(5c-3)G_{-\frac{5}{2}}) - bU_{-\frac{5}{2}}\right) \\
&+ z^{-2}\left(\frac{a}{c(c-1)(c+6)(2c-3)}(3(25c^2 - 129c + 90)I_{-2}G_{-\frac{3}{2}} - 126(4c+3)I_{-1}^2G_{-\frac{3}{2}} \right. \\
&\quad - 6(11c^2 - 87c - 36)I_{-1}G_{-\frac{5}{2}} + 6(55c^2 - 99c + 72)L_{-2}G_{-\frac{3}{2}} \\
&\quad + 2(5c^3 - 96c^2 + 99c - 162)G_{-\frac{7}{2}}) \\
&\quad + \frac{b}{(c+3)(5c-12)}(-3(13c+57)I_{-1}U_{-\frac{5}{2}} + 3(23c+33)G_{-\frac{3}{2}}V_{-2} - (2c^2+21c-9)U_{-\frac{7}{2}})) \\
&+ z^{-1}\left(\frac{a}{c(c-1)(c+6)(2c-3)}(54(c-1)(c-6)I_{-3}G_{-\frac{3}{2}} - 108(4c+3)I_{-1}I_{-2}G_{-\frac{3}{2}} \right. \\
&\quad + 3(c+6)(7c+3)I_{-2}G_{-\frac{5}{2}} - 54(4c+3)I_{-1}^2G_{-\frac{5}{2}} \\
&\quad - 12(5c^2 - 36c - 18)I_{-1}G_{-\frac{7}{2}} + 162c(c-1)L_{-3}G_{-\frac{3}{2}} \\
&\quad + 6(19c^2 - 63c + 72)L_{-2}G_{-\frac{5}{2}} + 6(c^3 - 40c^2 + 81c - 126)G_{-\frac{9}{2}}) \\
&\quad + \frac{b}{(c+3)(5c-12)}(-3(2c+33)I_{-2}U_{-\frac{5}{2}} - 21(c+3)I_{-1}U_{-\frac{7}{2}} \\
&\quad - 6(5c-12)L_{-2}U_{-\frac{5}{2}} + 21(c+3)G_{-\frac{5}{2}}V_{-2} + 9(4c+3)G_{-\frac{3}{2}}V_{-3} \\
&\quad \left. + 3(5c-12)G_{-\frac{3}{2}}W_{-3} - (c+3)(c+6)U_{-\frac{9}{2}})\right) \\
&\times |0\rangle + \text{reg.}
\end{aligned} \tag{B.6}$$

$$\begin{aligned}
& W(z)|W\rangle \\
& = (z^{-6}20a \\
& + z^{-4}\left(\frac{a}{c(c-1)}(-36I_{-1}^2 + 24(5c-4)L_{-2}) + 6bV_{-2}\right) \\
& + z^{-3}\left(\frac{a}{c(c-1)}(-36I_{-1}I_{-2} + 12(5c-4)L_{-3}) + 3bV_{-3}\right) \\
& + z^{-2}\left(\frac{a}{c(c-1)(c+6)(2c-3)}(168c(c-6)I_{-4} + 36(2c^2 - 43c + 6)I_{-1}I_{-3}\right. \\
& \quad - 18(6c^2 - 19c + 6)I_{-2}^2 - 288(4c+3)I_{-1}^2L_{-2} - 288(4c+3)I_{-1}L_{-3} \\
& \quad + 288(4c+3)I_{-1}G_{-\frac{3}{2}}\bar{G}_{-\frac{3}{2}} + 12c(6c^2 - 5c - 78)L_{-4} + 48(16c^2 - 27c + 18)L_{-2}^2 \\
& \quad + 168c(c-6)G_{-\frac{5}{2}}\bar{G}_{-\frac{3}{2}} - 168c(c-6)G_{-\frac{3}{2}}\bar{G}_{-\frac{5}{2}}) \\
& \quad + \left.\frac{b}{(c+3)(5c-12)}(-36(c+6)I_{-1}W_{-3} + 48(4c+3)L_{-2}V_{-2}\right. \\
& \quad \left.+ 6(11c+24)G_{-\frac{3}{2}}\bar{U}_{-\frac{5}{2}} - 6(11c+24)\bar{G}_{-\frac{3}{2}}U_{-\frac{5}{2}} + 3(3c^2 - 19c - 12)V_{-4}\right) \\
& + z^{-1}\left(\frac{a}{c(c-1)(c+6)(2c-3)}(336c(c-6)I_{-5} + 144c(c-15)I_{-1}I_{-4}\right. \\
& \quad - 72(2c^2 - c + 6)I_{-2}I_{-3} - 288(4c+3)I_{-1}I_{-2}L_{-2} - 144(4c+3)I_{-2}L_{-3} \\
& \quad + 144(4c+3)I_{-2}G_{-\frac{3}{2}}\bar{G}_{-\frac{3}{2}} - 144(4c+3)I_{-1}^2L_{-3} - 288(4c+3)I_{-1}L_{-4} \\
& \quad + 144(4c+3)I_{-1}G_{-\frac{5}{2}}\bar{G}_{-\frac{3}{2}} + 144(4c+3)I_{-1}G_{-\frac{3}{2}}\bar{G}_{-\frac{5}{2}} + 24(2c^3 - 29c^2 - 36)L_{-5} \\
& \quad + 48(16c^2 - 27c + 18)L_{-2}L_{-3} + 168c(c-6)G_{-\frac{7}{2}}\bar{G}_{-\frac{3}{2}} - 168c(c-6)G_{-\frac{3}{2}}\bar{G}_{-\frac{7}{2}}) \\
& \quad + \left.\frac{b}{(c+3)(5c-12)}(-18(c+6)I_{-2}W_{-3} - 18(c+6)I_{-1}W_{-4} + 24(4c+3)L_{-3}V_{-2}\right. \\
& \quad + 24(4c+3)L_{-2}V_{-3} + 3(11c+24)G_{-\frac{5}{2}}\bar{U}_{-\frac{5}{2}} + 3(11c+24)G_{-\frac{3}{2}}\bar{U}_{-\frac{7}{2}} \\
& \quad \left.- 3(11c+24)\bar{G}_{-\frac{5}{2}}U_{-\frac{5}{2}} - 3(11c+24)\bar{G}_{-\frac{3}{2}}U_{-\frac{7}{2}} + 6c(c-15)V_{-5}\right) \\
& \times |0\rangle + \text{reg.}
\end{aligned} \tag{B.7}$$

補遺 C 有用な公式

$q = e^{2\pi i\tau}$, $z = e^{i\theta}$ とし, q, z は τ ($\text{Im}\tau > 0$), θ の関数と考える。

1. [Hermite]

$$\begin{aligned}
& a \in \mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}, \quad 0 \leq b \leq a, \quad \delta = \pm 1 \\
& \Phi(z) = \Phi(z, q) : \quad z \text{ に関し Laurant 展開可能} \\
& \Phi(zq, q) = \frac{\delta}{z^a q^{\frac{b}{2}}} \Phi(z, q) \\
& \Rightarrow \{\Phi(z)\} \text{ は } a \text{ 次元のベクトル空間で基底として例えば} \\
& z^\rho \sum_{n \in \mathbf{Z}} \delta^n z^{an} q^{\frac{a}{2}n^2 + (\rho + \frac{b-a}{2})n} \quad (\rho = 0, 1, 2, \dots, a-1) \\
& \text{をとれる。}
\end{aligned} \tag{C.1}$$

2. [Schröter]

$$\begin{aligned}
& a, b \in \mathbf{N} \\
& \sum_{m \in \mathbf{Z}} z_1^m q^{\frac{a}{2}m^2} \times \sum_{n \in \mathbf{Z}} z_2^n q^{\frac{b}{2}n^2} \\
= & \sum_{\rho=0}^{a+b-1} z_2^\rho q^{\frac{b}{2}\rho^2} \sum_{m \in \mathbf{Z}} z_1^{-bm} z_2^{am} q^{\frac{1}{2}ab(a+b)m^2 + ab\rho m} \times \sum_{n \in \mathbf{Z}} z_1^n z_2^n q^{\frac{a+b}{2}n^2 + b\rho n}
\end{aligned} \tag{C.2}$$

3. [Jacobi] [22]

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} z^n q^{\frac{1}{2}n^2} = \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)(1 + zq^{n-\frac{1}{2}})(1 + z^{-1}q^{n-\frac{1}{2}}) \tag{C.3}$$

4. [Watson] [22]

$$\begin{aligned}
& \sum_{n \in \mathbf{Z}} q^{\frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n} (z^{3n} - z^{-3n-1}) \\
= & \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)(1 - zq^n)(1 - z^{-1}q^{n-1})(1 - z^2q^{2n-1})(1 - z^{-2}q^{2n-1})
\end{aligned} \tag{C.4}$$

補遺 D (4.39) 式の証明

先ず (4.12) 式に $\bar{G}_{-\frac{1}{2}}$, $X_{-\frac{1}{2}}$ 等を掛ける事により

$$(Y^2)(z) = (XY)(z) = (\partial XY)(z) = 0 \tag{D.1}$$

といった関係式が導かれる事を注意しておく。

[補題] $m \geq 1$ に対して

$$\begin{aligned}
& Y_{-(2m)}Y_{-(2m-1)}Y_{-(2m-3)} \cdots Y_{-3}Y_{-1}|h, 0\rangle = 0 \\
& Y_{-(2m-1)}Y_{-(2m-1)}Y_{-(2m-3)} \cdots Y_{-3}Y_{-1}|h, 0\rangle = 0
\end{aligned} \tag{D.2}$$

[証明]

(i) $m = 1$ の時

$(Y^2)_{-3}$, $(Y^2)_{-2}$ を $|h, 0\rangle$ に掛ける事により $Y_{-1}Y_{-2}|h, 0\rangle = Y_{-1}^2|h, 0\rangle = 0$ である。又は $Y_{-1}Y_{-2}|h, 0\rangle$, $Y_{-1}^2|h, 0\rangle$ のノルムを計算して 0 になる事を言っても良い。

(ii) m 迄成立したと仮定する。

$(Y^2)(z) = 0$ を用いて

$$\begin{aligned} & \underbrace{Y_{-(2m+2)}Y_{-(2m+1)}Y_{-(2m-1)}\cdots Y_{-3}Y_{-1}|h, 0\rangle}_{\parallel} - \sum_{p=1}^{2m} Y_{-4m-3+p}Y_{-p} \quad \underbrace{Y_{-(2m+1)}Y_{-(2m+1)}Y_{-(2m-1)}\cdots Y_{-3}Y_{-1}|h, 0\rangle}_{\parallel} - 2 \sum_{p=1}^{2m} Y_{-4m-2+p}Y_{-p} \end{aligned} \quad (D.3)$$

であるから, $m+1$ でも成立する事になる。

(i), (ii) より帰納法で証明された。□

[補題] $m \geq 1$ に対して

$$\begin{aligned} X_{-(2m+\frac{1}{2})}Y_{-(2m-1)}Y_{-(2m-3)}\cdots Y_{-3}Y_{-1}|h, 0\rangle &= 0 \\ X_{-(2m-\frac{1}{2})}Y_{-(2m-1)}Y_{-(2m-3)}\cdots Y_{-3}Y_{-1}|h, 0\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (D.4)$$

[証明]

(i) $m = 1$ の時

ノルムの計算より $X_{-\frac{1}{2}}|h, 0\rangle = 0$ であるから, $(\partial XY)_{-\frac{7}{2}}, (XY)_{-\frac{5}{2}}$ を $|h, 0\rangle$ に掛ける事により $X_{-\frac{5}{2}}Y_{-1}|h, 0\rangle = X_{-\frac{3}{2}}Y_{-1}|h, 0\rangle = 0$ である。又は $X_{-\frac{5}{2}}Y_{-1}|h, 0\rangle, X_{-\frac{3}{2}}Y_{-1}|h, 0\rangle$ のノルムを計算して 0 になる事を言っても良い。

(ii) m 迄成立したと仮定する。

$(XY)(z) = 0$ を用いて

$$\begin{aligned} & \underbrace{X_{-(2m+\frac{5}{2})}Y_{-(2m+1)}Y_{-(2m-1)}\cdots Y_{-3}Y_{-1}|h, 0\rangle}_{\parallel} - \sum_{p=1}^{2m+1} Y_{-4m-4+p}X_{-p+\frac{1}{2}} \\ & - \sum_{p=1}^{2m} X_{-4m-\frac{7}{2}+p}Y_{-p} - X_{-2m-\frac{3}{2}}Y_{-2m-2} \quad \underbrace{X_{-(2m+\frac{3}{2})}Y_{-(2m+1)}Y_{-(2m-1)}\cdots Y_{-3}Y_{-1}|h, 0\rangle}_{\parallel} \\ & - \sum_{p=1}^{2m+1} Y_{-4m-3+p}X_{-p+\frac{1}{2}} - \sum_{p=1}^{2m} X_{-4m-\frac{5}{2}+p}Y_{-p} \end{aligned} \quad (D.5)$$

であるから, 帰納法の仮定と前の補題により $m+1$ でも成立する事になる。

(i), (ii) より帰納法で証明された。□

[命題] $m \geq 1$ に対して

$$\begin{aligned} & Y_{-(2m-1)}Y_{-(2m-3)}\cdots Y_{-3}Y_{-1}|h, 0\rangle \text{ は } N = 2 \text{ 超共形代数の最高重み状態で} \\ & \text{ノルム} = \prod_{j=1}^m (h + j(j-1)) \end{aligned} \quad (D.6)$$

[証明]

(i) $m = 1$ の時

$X_{-\frac{1}{2}}|h, 0\rangle = 0$ であるから, $Y_{-1}|h, 0\rangle$ が $N = 2$ 超共形代数の最高重み状態である事は簡単に確かめられる。 $Y_{-1}|h, 0\rangle$ のノルムは h である。

(ii) m 迄成立したと仮定する。

すると

$$\begin{aligned} & A_n Y_{-(2m+1)} Y_{-(2m-1)} Y_{-(2m-3)} \cdots Y_{-3} Y_{-1} |h, 0\rangle \quad A = T, I, G, \bar{G} \\ & = [A_n, Y_{-(2m+1)}] Y_{-(2m-1)} Y_{-(2m-3)} \cdots Y_{-3} Y_{-1} |h, 0\rangle \quad (n > 0) \end{aligned} \quad (D.7)$$

であるから $n \leq 2m + 1$ のみ考えれば良い。

(ア) $A = T, I$ の時

$$\begin{aligned} & A_n Y_{-(2m+1)} Y_{-(2m-1)} Y_{-(2m-3)} \cdots Y_{-3} Y_{-1} |h, 0\rangle \\ & \propto Y_{n-(2m+1)} Y_{-(2m-1)} Y_{-(2m-3)} \cdots Y_{-3} Y_{-1} |h, 0\rangle \end{aligned} \quad (D.8)$$

なので, $n = 2m + 1$ では Y_0 が現われるので 0 となり, $n = 2(m - j) + 1$ ($1 \leq j \leq m$) では

$$Y_{-(2m-1)} Y_{-(2m-3)} \cdots Y_{-(2j+1)} Y_{-2j} Y_{-(2j-1)} \cdots Y_{-3} Y_{-1} |h, 0\rangle \quad (D.9)$$

となり, $n = 2(m - j + 1)$ ($1 \leq j \leq m$) では

$$Y_{-(2m-1)} Y_{-(2m-3)} \cdots Y_{-(2j+1)} Y_{-(2j-1)}^2 Y_{-(2j-3)} \cdots Y_{-3} Y_{-1} |h, 0\rangle \quad (D.10)$$

となるがこれらは補題により 0 になる。

(イ) $A = G$ の時

$$\begin{aligned} & A_n Y_{-(2m+1)} Y_{-(2m-1)} Y_{-(2m-3)} \cdots Y_{-3} Y_{-1} |h, 0\rangle \\ & \propto X_{n-(2m+1)} Y_{-(2m-1)} Y_{-(2m-3)} \cdots Y_{-3} Y_{-1} |h, 0\rangle \end{aligned} \quad (D.11)$$

なので, $n = 2m + \frac{1}{2}$ では $X_{-\frac{1}{2}}$ が現われるので 0 となり, $n = 2(m - j) + \frac{1}{2}$ ($1 \leq j \leq m$) では

$$Y_{-(2m-1)} Y_{-(2m-3)} \cdots Y_{-(2j+1)} X_{-(2j+\frac{1}{2})} Y_{-(2j-1)} \cdots Y_{-3} Y_{-1} |h, 0\rangle \quad (D.12)$$

となり, $n = 2(m - j) + \frac{3}{2}$ ($1 \leq j \leq m$) では

$$Y_{-(2m-1)} Y_{-(2m-3)} \cdots Y_{-(2j+1)} X_{-(2j-\frac{1}{2})} Y_{-(2j-1)} Y_{-(2j-3)} \cdots Y_{-3} Y_{-1} |h, 0\rangle \quad (D.13)$$

となるがこれらは補題により 0 になる。

(ウ) $A = \bar{G}$ の時 明らか

よって (ア) (イ) (ウ) より $m+1$ でも成立する事になる。

(i), (ii) より帰納法で $N=2$ 超共形代数の最高重み状態である事が証明された。
 $j+k > 0$ ならば $[\bar{Y}_j, Y_k]$ は $N=2$ 超共形代数の消滅演算子が右側にくる形に書けるので

$$\begin{aligned} & \bar{Y}_{2m+1} Y_{-(2m-1)} Y_{-(2m-3)} \cdots Y_{-3} Y_{-1} |h, 0\rangle \\ &= \sum_{j=2}^m Y_{-(2m-1)} \cdots Y_{-(2j+1)} [\bar{Y}_{2m+1}, Y_{-(2j-1)}] Y_{-(2j-3)} \cdots Y_{-3} Y_{-1} |h, 0\rangle \\ &= 0 \end{aligned} \tag{D.14}$$

となり, $\bar{Y}_{2m+1} Y_{-(2m-1)} Y_{-(2m-3)} \cdots Y_{-3} Y_{-1} |h, 0\rangle$ のノルムは 0 となる。

$Y_{-(2m-1)} Y_{-(2m-3)} \cdots Y_{-3} Y_{-1} |h, 0\rangle$ のノルムを a_m とおくと

$$\begin{aligned} [\bar{Y}_n, Y_{-n}] &= \frac{1}{2} n(n^2 - 1) + \frac{n}{2} I_0^2 + \left(\frac{1}{2} - n^2\right) I_0 + nL_0 - L_0 I_0 \\ &\quad + (N=2 \text{ 超共形代数の消滅演算子が右側にくる項}) \end{aligned} \tag{D.15}$$

であるから,

$$\begin{aligned} a_{m+1} &= \langle h, 0 | \bar{Y}_1 \bar{Y}_3 \cdots \bar{Y}_{2m-1} \bar{Y}_{2m+1} Y_{-(2m+1)} Y_{-(2m-1)} \cdots Y_{-3} Y_{-1} |h, 0\rangle \\ &= (h + m(m+1)) a_m \end{aligned} \tag{D.16}$$

となり $a_m = \prod_{j=1}^m (h + j(j-1))$ を得る。□

$\bar{Y}_{-(2m-1)} \bar{Y}_{-(2m-3)} \cdots \bar{Y}_{-3} \bar{Y}_{-1} |h, 0\rangle$ に付いても全く同様である。

NS5, NS1, NS2 に付いても同様に証明できる。

補遺 E N=2 超共形代数の指標公式 ($c \geq 3$)

$c \geq 3$ の $N=2$ 超共形代数の指標公式は 3 つの型に分かれる [54, 55]。スペクトラルフロー (4.29) 式があるので NS セクターのみ考える。

(1) massive 表現

$$\begin{cases} h > (m + \frac{1}{2})Q - \frac{1}{2}(\frac{c}{3} - 1)m(m+1) \\ (\frac{c}{3} - 1)m \leq Q < (\frac{c}{3} - 1)(m+1) \end{cases} \text{ の時. } (m \in \mathbf{Z})$$

$$ch(\theta, \tau) = q^{h - \frac{c}{24}} z^Q \prod_{n \geq 1} \frac{(1 + zq^{n-\frac{1}{2}})(1 + z^{-1}q^{n-\frac{1}{2}})}{(1 - q^n)^2} \tag{E.1}$$

(2) massless 表現

(i) $\left\{ \begin{array}{l} h = \frac{1}{2}(\frac{c}{3} - 1)m^2 + a(m + \frac{1}{2}) \\ Q = \pm((\frac{c}{3} - 1)m + a) \end{array} \right.$ の時. ($m \in \mathbf{Z}, m \geq 0, 0 < a < \frac{c}{3}$)

$$ch(\theta, \tau) = \frac{1}{1 + z^{\pm 1}q^{m + \frac{1}{2}}} q^{h - \frac{c}{24}} z^Q \prod_{n \geq 1} \frac{(1 + zq^{n - \frac{1}{2}})(1 + z^{-1}q^{n - \frac{1}{2}})}{(1 - q^n)^2} \quad (\text{E.2})$$

(ii) $\cdot \left\{ \begin{array}{l} h = \frac{1}{2}(\frac{c}{3} - 1)m^2 + m - \frac{1}{2} \\ Q = \pm((\frac{c}{3} - 1)m + 1) \end{array} \right.$ の時. ($m \in \mathbf{Z}, m \geq 1$)

$$ch(\theta, \tau) = \frac{1 - q}{(1 + z^{\pm 1}q^{m - \frac{1}{2}})(1 + z^{\pm 1}q^{m + \frac{1}{2}})} q^{h - \frac{c}{24}} z^Q \prod_{n \geq 1} \frac{(1 + zq^{n - \frac{1}{2}})(1 + z^{-1}q^{n - \frac{1}{2}})}{(1 - q^n)^2} \quad (\text{E.3})$$

• $h = Q = 0$ の時.

$$ch(\theta, \tau) = \frac{1 - q}{(1 + zq^{\frac{1}{2}})(1 + z^{-1}q^{\frac{1}{2}})} q^{-\frac{c}{24}} \prod_{n \geq 1} \frac{(1 + zq^{n - \frac{1}{2}})(1 + z^{-1}q^{n - \frac{1}{2}})}{(1 - q^n)^2} \quad (\text{E.4})$$

これは (E.3) 式で $m = 0$ としたものに一致する。

$c < 3$ の指標公式に付いては [54, 55, 56, 57, 15].

参考文献

- [1] M.Green, J.Schwarz and E.Witten, *Superstring Theory 1,2*, Cambridge University Press (1987).
- [2] A.A.Belavin, A.M.Polyakov and A.B.Zamolodchikov, Nucl.Phys. **B241** (1984) 333.
- [3] K.Kobayashi and S.Odake, Mod.Phys.Lett. **A3** (1988) 773.
- [4] P.Goddard, A.Kent and D.Olive, Phys.Lett. **B152** (1985) 88.
- [5] P.Goddard, A.Kent and D.Olive, Comm.Math.Phys. **103** (1986) 105.
- [6] P.Di Vecchia, J.L.Petersen, M.Yu and H.B.Zheng, Phys.Lett. **B174** (1986) 280.
- [7] I.Antoniadis, C.Bachas, C.Kounnas and P.Windey, Phys.Lett. **B171** (1986) 51.
- [8] H.Kawai, D.C.Lewellen and S.-H.H. Tye, Nucl.Phys. **B288** (1987) 1
- [9] A.Cappelli, C.Itzykson and J.-B.Zuber, Nucl.Phys. **B280**[FS18] (1987) 445; Comm.Math.Phys. **113** (1987) 1.
- [10] A.Kato, Mod.Phys.Lett. **A2** (1987) 111.
- [11] G.Moore and N.Seiberg, Phys.Lett. **212B** (1988) 451; "*Classical and Quantum Conformal Field Theory*", preprint IASSNS-HEP-88/39 (1988).
- [12] A.B.Zamolodchikov, Theor.Math.Phys. **65** (1986) 1205.
- [13] S.Odake, "*Extension of $N = 2$ Superconformal Algebra and Calabi-Yau Compactification*", Tokyo preprint UT-537 (1988) (Mod.Phys.Lett. to be published).
- [14] T.Eguchi and A.Taormina, Phys.Lett. **210B** (1988) 125.
- [15] T.Eguchi, H.Ooguri, A.Taormina and S.K.Yang, "*Superconformal Algebras and String Compactification on Manifolds with $SU(n)$ Holonomy*", Tokyo preprint UT-536 (1988).

- [16] D.Gepner, Nucl.Phys. **B296** (1988) 757; Phys.Lett. **199B** (1987) 380.
- [17] T.Banks, L.Dixon, D.Friedan and E.Martinec, Nucl.Phys. **B299** (1988) 613.
- [18] P.Goddard and D.Olive, Int.J.Mod.Phys. **A1** (1986) 303.
- [19] V.G.Kac, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Helsinki,1978 p.299; Lecture Note in Physics **94** (Springer 1979) p.441.
- [20] D.Friedan, Z.Qiu and S.Shenker, Phys.Rev.Lett. **52** (1984) 1575; Phys.Lett.**B151** (1985) 37.
- [21] A.Rocha-Caridi, *Vertex Operators in Mathematics and Physics*, J.Lepowsky et.al (eds.), Springer-Verlag(1984) p.451.
- [22] V.G.Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, 2nd ed. (Cambridge University Press, Cambridge 1985)
- [23] V.G.Kac and D.A.Kazhdan, Advance in Math. **34** (1979) 97.
- [24] H.Sugawara, Phys.Rev. **170** (1968) 1659.
- [25] E.Witten, Comm.Math.Phys. **92** (1984) 455.
- [26] D.Karabali, Q.-H.Park, H.J.Schnitzer and Z.Yang, "A *GKO Construction Based on a Path Integral Formulation of Gauged Wess-Zumino-Witten Actions*", preprint BRX TH-247[revised] (1988).
- [27] I.B.Frenkel and V.G.Kac, Invent.Math. **62** (1980) 23.
- [28] P.Goddard and D.Olive, Nucl.Phys. **B257** (1985) 226.
- [29] P.Goddard, W.Nahm and D.Olive, Phys.Lett. **B160** (1985)111.
- [30] W.Boucher, D.Friedan and A.Kent, Phys.Lett. **172B** (1986) 316.
- [31] P.Di Vecchia, J.L.Petersen and M.Yu, Phys. Lett. **B172** (1986) 211.
- [32] Y.Kazama and H.Suzuki, "New $N = 2$ Superconformal Field Theories and Superstring Compactification", preprint UT-Komaba 88-8 (1988).

- [33] K.Kobayashi and S.Odake, Proceedings of 7th INS Winter Seminar on Superstring, Composite Models and Anomaly Related Problem, M.Tomiya ed. (1987) p.199.
- [34] Vl.S.Dotsenko and V.A.Fateev, Nucl.Phys. **B251[FS13]** (1985) 691.
- [35] Y.Kitazawa, N.Ishibashi, A.Kato, K.Kobayashi, Y.Matsuo and S.Odake, Nucl.Phys. **B306** (1988) 425.
- [36] A.B.Zamolodchikov and V.A.Fateev, Sov.Phys.JETP **62** (1985) 215.
- [37] Z.Qui, Phys.Lett. **B188** (1987) 207.
- [38] F.A.Bais, P.Bouwknegt, M.Surridge and K.Schoutens, Nucl.Phys. **B304** (1988) 348;371.
- [39] V.A.Fateev and A.B.Zamolodchikov, Nucl.Phys. **B280[FS18]** (1987) 644.
- [40] S.Mizoguchi, "*The structure of representation of the W_3 algebra*", Tokyo preprint UT-538 (1988).
- [41] V.A.Fateev and S.L.Lykyanov, Int.J.Mod.Phys. **A3** (1988) 507.
- [42] P.Bouwknegt, Phys.Lett. **B207** (1988) 295.
- [43] K.-J.Hamada and M.Takao, Phys.Lett. **B209** (1988) 247; **B213** (1988) 564E.
- [44] T.Inami, Y.Matsuo and I.Yamanaka, "*Extended Conformal Algebras with $N = 1$ Supersymmetry*", Kyoto preprint RIFP-765 (1988).
- [45] T.Inami, Y.Matsuo and I.Yamanaka, *private communication*.
- [46] S.Mizoguchi and S.Odake, in preparation.
- [47] A.Schwimmer and N.Seiberg, Phys.Lett. **184B** (1987) 191.
- [48] A.Sen, Nucl.Phys. **B278** (1986) 289.
- [49] P.Candelas, G.Horowitz, A.Strominger and E.Witten, Nucl.Phys. **B258** (1985) 46.

- [50] L.Alvarez-Gaumé and P.Ginsparg, *Comm.Math.Phys.* **102** (1985) 311;
L.Alvarez-Gaumé, S.Coleman and P.Ginsparg, *Comm.Math.Phys.* **103** (1986) 423.
- [51] M.T.Grisaru, A.van de Ven and D.Zanon, *Phys.Lett.* **173B** (1986) 423.
- [52] D.Nemeschansky and A.Sen, *Phys.Lett.* **178B** (1986) 365.
- [53] L.Alvarez-Gaumé and D.Z.Freedman, *Comm.Math.Phys.* **80** (1981) 443.
- [54] V.K.Dobrev, *Phys.Lett.* **B186** (1987) 43.
- [55] E.B.Kiritsis, *Int.J.Mod.Phys.* **A3** (1988) 1871.
- [56] Y.Matsuo, *Prog.Theor.Phys.* **77** (1987) 793.
- [57] F.Ravanini and S.-K.Yang, *Phys.Lett.* **B195** (1987) 202; Z.Qiu, *Phys.Lett.* **B198** (1987) 497.