変形ビラソロ代数が開く扉 :共形場理論を越えて

栗田英資　Enrico Fermi Institute, University of Chicago, Chicago, IL 60637
e-mail: awata@yukawa.uchicago.edu
久保晴信　東京大学大学院理学系研究科物理学専攻 113 東京都文京区本郷 7-3-1
e-mail: kubo@hep-th.phys.s.u-tokyo.ac.jp
守田佳史　東京大学大学院工学系研究科物理工学専攻 113 東京都文京区本郷 7-3-1
e-mail: morita@coral.t.u-tokyo.ac.jp
小竹　悟　信州大学理学部物理科学科 390 松本市旭 3-1-1 (旭合同研究棟)
e-mail: odake@azusa.shinshu-u.ac.jp
白石潤一　東京大学物性研究所 106 港区六本木 7-22-1
e-mail: shiraish@ginnan.issp.u-tokyo.ac.jp

楕円代数という名の国があります。最近までは, この国の事を詳しく記した地図はありませんでした。この国には楕円関数に付随した代数の秘密が伝わっていると謂われています。それはバクスター達の模型を開ける大事な鍵になると信じられています。バクスター達の模型の臨界点での振る舞いを読み解く鍵となったのは共形場理論でした。臨界点から離れた所を探るために, 次の鍵を見つけようとして, 多くの人々が何年にも亘って知恵を出し合いました。紆余曲折の末, それでも懸命に進み, 目的地へのある扉を叩く事になった人達がいました。

1　はじめに

1.1　対称性と可解模型

今から 300 年余り前にニュートンの運動の法則と万有引力の法則を基に惑星の運動が解析され, 太陽と一つの惑星という 2 体問題では, 軌道が楕円・放物線・双曲線になる事など, 現象論であったケプラーの法則が明解に導出され, 自然を基本法則に基づいて定量的に扱うという規範が確立されました。3 つ以上の惑星に対しても, 軌道を「解析的に」求めるという問題に対して多くの努力が払われましたが, この問題は 200 年もの後に, 系の自由度より保存量の数が少ないという命題の形で否定的に解決されました。力学的自由度と同じ数の保存量を見つける事ができれば運動が解けたという事になる訳ですが, いつでもそううまくは行かないのです。保存量と系の持つ対称性とは表裏一体ですから, 対称

性を十分沢山見つける事が可解性を示すための常套手段となっています。更に, その対称性に対応する群の表現論を活用すれば, 模型の解析を効率良く進めることが出来ます。

電子の運動が量子力学に従う事が発見されたのは 70 年も前の事ですが, 固体中の電子の示す多様な姿はいつも驚きに満ちています。例えば, 近年の銅酸化物高温超伝導体などが例として挙げられるでしょう。電子系の持つ深遠な性質の多くは, クーロン相互作用に起因する多体効果であると考えられています。現在, 確立した多体電子論として, ランダウのフェルミ流体論, ハルデーン達の朝永-ラッティンジャー流体論などがあります。しかし, 相互作用する電子系を厳密に解析する事は一般に極めて難しいことです。知りたい物理量はなかなか閉じた形で求められないので, 種々の近似的手法が考えられました。例えば, 平均場近似や量子モンテカルロ法などの数値的手法などが挙げられます。

マクロな系をパラメター（例えば温度）を変えながら調べていくと, 物理量が, 特別な値（臨界点）の所で非常に特異な振る舞いを示す事があります。具体的には比熱, 帯磁率が発散したり, 自発磁化が生じたりするもので, これらは臨界現象と呼ばれています。「無限自由度」系の協同現象である臨界現象の研究は, くりこみ群の発見などへとつながって行きました。

古典論, 量子論を問わず, 様々な有効な近似的手段と合わせて大変重要な役割を果たしたのは, 一連の「可解」模型です。大きな対称性の恩恵を受けた可解模型は我々の苦しい道中で慈しみ深く咲いています。2 次元イジング模型などの模型では自由エネルギーやある種の相関関数などの厳密解が得られました。XYZ 模型などの一次元量子スピン鎖も可解模型です。4 次元超対称ヤン-ミルズ理論などにおいては, ある物理量を厳密に閉じた形で求められる, 可解模型が幾つか知られています。我々は強力な解析的手法を駆使する事によって, 模型の種々な臨界現象をいつでも「再現」し, 又, 色々な物理量の最も精密な「測定」を楽しむ事ができます。

1.2 無限次元対称性

系の自由度, 保存量の数が共に無限個の時にも「可解性」は期待されるのでしょうか。このような時には「可解」の意味が少し曖昧ですが, 実際には幾つかの物理量の「厳密な」[1]計算が遂行できるような場合を指して「可解」という言葉使いをしています。例として, 時間 1 次元・空間 1 次元（$1+1$ 次元）の共形場理論 (CFT)[1, 2]（物性への応用で日本語で書かれた解説として [3]）では, 「ビラソロ代数」と呼ばれる無限次元リー代

---

[1] 又ここで「厳密」という言葉も, 場合によって意味合いが異なっているので要注意です。この微妙な違いは英語では correct, exact, rigorous, $\cdots$ などを用いて使い分けていますが, 日本語では全て「厳密」で一括りになってしまいます。

数の表現論だけで, 系のスペクトルを決定し相関関数まで計算する事ができます。つまり, CFT においては, ビラソロ代数という対称性によって理論が完全に統制されます。

今までに知られている「可解模型」の大部分に共通した構造として「散乱行列[2]の因子化」があります。この散乱行列の因子化が整合的に行われるためには, 散乱行列が「ヤン-バクスター方程式」を満たす事が必要です [4]。平たく言えば, 「ヤン-バクスター方程式」の解ごとに「可解模型」が構成されるとも言えます。近年, ドリンフェルトと神保による「量子群」[5, 6][3]の発見などによって三角関数で与えられるヤン-バクスター方程式の解のクラスに関しては量子アファイン代数という「無限次元代数」を通して深い理解が得られました。

ヤン-バクスター方程式の解は一般には多くのパラメータを持ちます。その中の一つがしばしば楕円関数のモデュラスになっています。このようなクラスは楕円関数解のクラスと呼ばれています。この楕円関数解の存在は大変神秘的で「なぜ楕円関数が現れるのか ?」という問いを発する事を禁じ得ない思いがします。より具体的な問いかけとして, 楕円関数が現れる可解模型に対してその「可解性」を保証する対称性は一体何でしょうか ?その問いに対する答えの一つがここで解説する「変形ビラソロ代数」です [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13]。具体的には, ABF 模型という楕円関数のクラスに属する 2 次元可解格子模型の対称性として変形ビラソロ代数が現れます。

1.3 変形ビラソロ代数とその後の発展

変形ビラソロ代数へ至る我々の道のりは決して平坦ではありませんでした。この問題が非常に広大な裾野を持ち, 物理や数学のダイナミックな交流の中で数多くの研究者達によって育てられて来た事はどれほど強調しても足りる事はありません。今回は主に, 著者達 [7, 8, 9], フレンケル・レシェテキン [10] とルキアノフ・プガイ [11, 12, 13] 三つのグループがたどった道筋を紹介します。(図: この小文の鳥瞰図。) これらのグループが最終的に得たもの, つまり「変形ビラソロ代数」は, 最も簡単な「楕円代数」の例でした。ここで「楕円代数」とは, 交換関係に現れる係数が楕円関数で与えらるようなものと理解して下さい。ルキアノフによって見抜かれたように, 変形ビラソロ代数の交換関係に出てくる楕円関数は XYZ 鎖のブリーザー間の S行列 (実は 1 行 1 列なのでスカラー) と一致しています。変形ビラソロ代数を含む一連の系列として, フェイギン-フレンケルと著者達によって導入された変形 W_N 代数 [14, 15] の話もありますが, 少し複雑になるのでここでは

---

[2] 以下では S行列もしくは R行列と呼ぶ事もあります。

[3] 量子群はホップ代数と呼ばれる代数構造を持ちます。一言で言えば, テンソル積表現・共役表現を作る一般的処方箋が与えられているという事です。

触れない事にします。

現在, 我々は次に攻略すべき嶺を目の前にしています。スカラーでない楕円的R行列（S行列と「ほぼ」同じ[4]）に対応する2次元古典統計系として, 8頂点模型 [17], アンドリュース・バクスター・フォレスター (ABF) 模型 [18] など, 多くの模型が知られています。今後我々の辿るべき道は「楕円代数」という尾根に沿っている, という事が認識されつつあります。それはバクスター達の模型という頂に向かうルートに違いありません。この楕円代数というものはかなり以前から研究が始まったものですが, ごく最近, 変形ビラソロ代数の発見や, フロンスダール [19] やエンリケス-フェルダー [20] の研究による準ホップ代数 [21] という自然な枠組の認識[5]とあいまって, 研究が更に深化しつつあります。

ここまでに, 今まで我々がたどった道のりの概観をお話ししてきました。肝心の役者の活躍する様子を心待ちにされてきた方々にとってはもう待ちくたびれたかもしれませんが, 次に続く二つの章では「可解格子模型の歴史」及び「CFT」を簡単に振り返っておきたいと思います。その後いよいよ「変形ビラソロ代数 :最も簡単な楕円代数」の世界へと出発しましょう。

2　可解格子模型の歴史

今回の話題である「量子変形された代数」は, 量子逆散乱理論にその根源を辿る事ができます。その後, 量子群の発見を経て, 可解格子模型の研究の中で大きな中心を形作るようになりました。一方, バクスター達が, 量子群の発見より１５年程も前に, 8頂点模型やABF模型などの新しい可解格子模型を構成して, それらに「ベーテ仮設」やバクスターの「角転送行列」などを適用して, 多くの美しく重要な結果を見い出しています [22]。可解格子模型の歴史を, XXZ鎖

$$H_{\mathrm{XXZ}} = -\frac{1}{2}\sum_i (\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + \Delta \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z) \tag{1}$$

（σ^a はパウリ行列）やABF模型などの最近の発展を中心に少し紹介します。

１次元の量子系における最初のブレイクスルーはベーテによるハイゼンベルグ鎖（XXZ鎖で$\Delta = 1$としたもの）の対角化です（１９３１年）[23]。そこで初めて用いられた方法は非常に汎用性の高いもので, 現在では「ベーテ仮設」と呼ばれて様々な応用・拡張が研究

---

[4] 準ホップ代数を考える時, S行列は中心元やカルタンの元で捻られる事が知られています。その捻りは, ある種の量子補正と考えられます。これに類似した例として, 量子サイン-ゴルドン模型のS行列の結合定数依存性はある補性を受ける事が知られています [16]。

[5] 但し, 変形ビラソロ代数は, 普通のビラソロ代数の準ホップ変形としては得られない事が知られています。

されています。「ベーテ仮設」の枠組みの中では, 考えている系の対角化は, 「ベーテ仮設方程式」という（代数）方程式を解くという作業に帰着されます。一つの際立った特徴としては, そのベーテ仮設方程式がリー代数とその表現論の言葉で記述されるブロック的な構造を持っている事が挙げられます。バクスターによる８頂点模型のベーテ仮設による研究以来, 深く研究されているこのような構造は被衣真空形式 (dressed vacuum form) と呼ばれる事があります [24]。後で又述べますが, フレンケルとレシェテキンが, 変形ビラソロ（ポアッソン）カレントを導出した際にも, 彼らのカレントの持つブロック的構造とベーテ仮設方程式における被衣真空形式とが神秘的な類似を示す事が指摘されました [10]。

オンサーガーによって２次元イジング模型

$$H_{\text{Ising}} = J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j, \quad (\sigma = \pm 1) \tag{2}$$

の自由エネルギー密度などの熱力学量が得られたのは１９４４年の事です [25]。その後の２次元イジング模型に関する進展は

１９５２	ヤンによる１点関数の計算 [26]。
１９６３	モントロール-ポッツ-ワードによる２点相関関数の行列式表示 [27]。
１９７６	ウー-マッコイ-トレーシー-バルーフによる２点相関関数の「連続極限」の計算。それがパンルベ III に従う事の発見 [28]。
１９７９	佐藤-三輪-神保による一般の n 点相関関数の連続極限の導出 [29]。

となっています。２次元イジング模型の次のステップとして, XXZ 鎖がかなり良く研究されてきました。イジング模型と並行して見てみると, ベーテ達の研究の後に

１９７３	バクスターによる XXZ 鎖の１点関数の計算 [30]。
１９９２	デイビス-フォダ-神保-三輪-中屋敷による XXZ ハミルトニアンの対角化 [31]。神保-三木-三輪-中屋敷による XXZ 鎖の n 点相関関数の積分表示の導出 [32]。

となっています。この XXZ 鎖の n 点相関関数を求める際に本質的な役割を担う, XXZ 鎖に潜んでいる対称性は, 量子アフフアィン代数という「はじめに」で少し述べた「量子群」

の一種です（ここに出てくる量子群は通常 $U_q(\widehat{sl}_2)$ と書かれます）。大雑把に言って, 量子群の表現論だけを手掛かりにして系の大きさが無限大の場合のハミルトニアン (1) の対角化が厳密に実行されます。勿論, 大きさが無限大の場合の（無限次元の）系の励起状態で張られる物理的空間をうまく捉えるには立ち入った議論が必要です。それを敢えて一言で言うと『系の物理的空間と量子群 $U_q(\widehat{sl}_2)$ の表現空間が柏原の「結晶基底」[33] という概念を通してつながる』という事になります。ハミルトニアン (1) を厳密に対角化した, という事は励起状態を全て知っているという事です。特に, 素励起がスピン $1/2$ である事や, その素励起の分散関係などはベーテ仮設から導き出されていた結果と一致します。更に, 物理量の基底状態に関する期待値をある多重積分に帰着させる彼らの公式は, 絶対零度での n 点相関関数が実際に計算できるという事を意味します。例えば最も簡単な場合として, 第ゼロサイトのスピンの期待値が

$$\langle \sigma_0^z \rangle = \prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1-q^{2k}}{1+q^{2k}} \right)^2 \tag{3}$$

と計算され, １９７３年のバクスターの結果を再現します。ここで q は $\Delta = (q+q^{-1})/2$ という関係式をみたします。又, この q は量子群 $U_q(\widehat{sl}_2)$ の持つパラメータ qでもあります。このように, 新しい見方を通して, 既存の結果に表現論的な意味付けが与えられると同時に, その結果が一般化されました。

標語的にまとめると,
定理 [京都スクール]
XXZ 鎖を記述する対称性は量子アファイン代数（量子群）$U_q(\widehat{sl}_2)$ である。

XXZ 鎖のようなヤン-バクスター方程式の三角関数解に対応する模型と並行して別の流れがあります。それは今回のテーマの源流とも言うべき楕円関数のモデュラスをパラメータとして持つ模型達です。特に今回の話と密接に関係しているのは

１９７２	バクスターの８頂点模型 [17]。
１９８１	ベラビンの$\mathbb{Z}_N$ 模型 [34]。
１９８４	アンドリュース-バクスター-フォレスター (ABF) が新しい「（制限）面模型」(ABF 模型）を８頂点模型からバーテックス・フェイス対応により構成 [18]。
１９８６	伊達-神保-三輪-尾角による ABF 模型のフュージョン（合成）模型の構成 [35]。

などというヤン-バクスター方程式の楕円関数解に相当する模型の系列の研究です。ここで,「頂点模型」というのは格子（正方格子）の各辺に力学的自由度（スピン）が棲み, 各頂点の周りのスピンの配位に対して一定のやり方でエネルギーを与える方法が定まっている模型を指します。8頂点模型というのは, スピンが $\uparrow,\downarrow$ の値を取り, 頂点の周りの１６通りのスピン配位のうち8通りだけが許されるという頂点模型です。又,「面模型」というのは, 頂点模型の双対模型で, 各格子点に整数$\mathbb{Z}$に値をとる力学的自由度を持ち, 各面に対して一定のやり方でエネルギーを与える方法が定まっている模型を指します。さらに力学的自由度の取る値が$\mathbb{Z}$のある有限部分集合に制限できる場合を「制限面模型」と呼んでいます。

模型の具体的な形は後で述べたいと思いますが, ルキアノフ・プガイは, XXZ 鎖の n 点相関関数を求める際に本質的な役割を担った量子アフアィン代数と同じ働きを, ABF 模型では変形ビラソロ代数が演じる事を見い出しました。

定理 [ルキアノフ・プガイ][13]
ABF 模型を記述する対称性は変形ビラソロ代数である。

彼らはこの方針に従って ABF 模型の物理量の計算を処理するために, 素励起を記述する演算子達を自由ボゾンの「うまい」組合せで求めました。これらの演算子の構成は次の章で触れる CFT のプライマリー場とスクリーニングカレントの「うまい」変形の組合せと見なす事ができます。そういう発見法的な演算子の構成の段階で指導原理を与えたのが変形ビラソロ代数の存在でした。しかしながら, 彼らは $c=-2$ に相当する特殊な場合以外にこの変形ビラソロ代数を陽に構成する事はできず, 他の場合は存在のみを予想するに留まっていました。著者達が全く別の経路を辿って完全に陽に構成した変形ビラソロ代数が, まさに彼らが部分的に構成していたものと同一のものであった事は著者達にとって大いに驚くところでした。

さて,「はじめに」で述べたように,「変形ビラソロ代数」は「楕円代数」の例の一つと見なす事ができます。そこで最後に今までに発見されてきた楕円代数達を簡単に振り返って見ましょう。

１９８３	スクリャーニン代数 [36]。
１９９４	楕円的量子代数 $\mathcal{A}_{q,p}(\widehat{sl}_2)$[37]。
１９９５	変形ビラソロ代数, 変形 W_N 代数 [10, 7, 14, 15]。
１９９７	面模型に付随する楕円的量子群と準ホップ代数 [20]。

ここに,スクリャーニン代数と呼ばれる楕円代数は,バクスターの8頂点模型に付随する代数構造を議論したスクリャーニンの先駆的な仕事によるものです。京都スクールによって提唱された$\mathcal{A}_{q,p}(\widehat{sl}_2)$という代数（量子アフアィン代数$U_q(\hat{sl}_2)$のパラメータ$p$による楕円変形）は,系の大きさが無限大の8頂点模型に現れる無限次元対称性を記述すると期待されています。このように,楕円型模型の研究においては,頂点模型に付随する構造がかなり良く調べられて来ました。最近の進展の中では,面模型に付随する楕円代数を研究したエンリケス-フェルダーの仕事[20]が特筆されるべきでしょう。準ホップ代数の枠組に基づく彼らの研究においては,それまで曖昧であった面模型の持つユニバーサルな性質が明らかにされました。

3　$1+1$次元の共形場理論 (CFT)

可解模型の研究においてベラビン-ポリヤコフ-ザモロチコフ (BPZ)[1, 2] による$1+1$次元の共形場理論が果たした役割の大きさに関して異論を唱える人はいないでしょう。彼らは,質量のない$1+1$次元の場の理論の持つべき性質を極めて一般的な見地から考察しました。臨界現象の研究などで発展した,くりこみ群の思想を,質量のない$1+1$次元の場の理論において,無限次元リー代数という数学的道具を通して実現する事によって,数々の重要で一般的な結論を得ました。CFTが適用できる具体的な物理系の例としては,（世界面上の場の理論と思った）弦理論,（空間2次元の）臨界現象が挙げられます。

$1+1$次元では共形変換（等角写像）が無限次元になりますから,「無限自由度」の系が「無限個の対称性」を持ちます。少し具体的に言うと,質量のない$1+1$次元の場の理論では,場の理論として共形変換を引き起こす生成元L_n (nは整数) 達は,

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3-n)\delta_{n+m,0} \tag{4}$$

という交換関係を満たします。母関数$L(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$を導入し,デルタ関数$\delta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x^n$を用いると,(4)は形式的巾級数として

$$\begin{aligned}&\Big[z^2L(z), w^2L(w)\Big] \qquad (5)\\ &= \Big(z^2L(z)+w^2L(w)\Big)\frac{w}{z}\delta'(\frac{w}{z}) + \frac{c}{12}\left(\frac{w}{z}\right)^2\delta'''(\frac{w}{z})\end{aligned}$$

と表されます,つまりこの式の$z^{-n}w^{-m}$の係数を拾うと上の式になります。カレント$L(z)$は,エネルギー運動量テンソル（のカイラル成分）という物理的意味を持つ,CFTにおける基本的な量です。交換関係(4)を満たすL_nで生成される無限次元リー代数は「ビラソ

ロ代数」と呼ばれ, 今回のテーマの「旅の出発点」に当たります（図）。「中心電荷」c は表現ごとに決まった定数値を取り，模型をパラメトライズする重要な量です。$c=0$ の場合は $L_n=-z^{n+1}\frac{\partial}{\partial z}$ と実現でき, 共形変換（局所スケール変換）という幾何学的意味を持っています。c を含む項はヤコビ律を要請する事によって,（自明な部分を除いて）完全に決まってしまいます。

ビラソロ代数を物理に応用する上で重要な量は,「プライマリー場」と呼ばれる場です。CFT を舞台に譬えるなら, プライマリー場は劇を演じる役者達で, ビラソロカレント $L(z)$ は役者達を意のままに動かす監督といったところでしょうか。プライマリー場の成分 $\Psi_{h,m}$ (m は整数) は, 共形変換に対し次のような応答をします：

$$[L_n, \Psi_{h,m}] = \Big((h-1)n-m\Big)\Psi_{h,m+n}. \tag{6}$$

ここで, h は共形スケール次元と呼ばれるプライマリー場を特徴付けるパラメータで, 臨界現象の臨界指数に関係しています。ビラソロ代数の精密な表現論を用いて, この場達の相関関数の厳密解が求められています。具体的には, (i) ビラソロ代数に対するワード-高橋恒等式から従う微分方程式を解く, もしくは (ii) プライマリー場を自由場で表現して積分表示する, などの方法でそれらは求められました。

後の議論のために, (ii) の方法に付いてもう少し詳しく述べておきます。自由ボゾン場を用いると, ビラソロ代数 $L(z)$ はボゾン場の 2 次の形で書けます。又, プライマリーや, 共形スケール次元が 1 の特殊なプライマリー場（スクリーニングカレント $S(z)$ と呼ばれる）が自由ボゾン場で書けることがわかります。すると, その積分であるスクリーニングチャージ $\oint dtS(t)$ は共形スケール次元がゼロとなり, ビラソロ代数と可換になります。幾つかのプライマリー場に適当な数のスクリーニングチャージを挿入した相関関数が（ノンゼロに）計算できることが知られています。スクリーニングカレントは, 抽象的にビラソロ代数を扱っている場合には現れず, 自由場表示をした時に初めて登場する量です。先程のたとえを続けるなら, スクリーニングカレントは舞台には現れない裏方・黒子のようなものでしょう。スクリーニングカレントは, 自由ボゾンという相互作用の無い世界と, ビラソロ代数という複雑な世界とを結ぶ架け橋なのです。

CFT の典型として, ミニマル系列と呼ばれているものがあります。フリーダン-チュウ-シェンカーは更にユニタリティなどを要請する事によって, それまでに個別に研究されてきた臨界現象に登場する基本的な場に対応するプライマリー場の組を系統的に構成しました。この考察にはビラソロ代数の表現論が必要です。表現空間の性質を調べるための便利な道具がカッツ行列式です。後の議論のために少し詳しくいうと, カッツ行列式とは, 場によって生成される各状態間の内積を計算し, それを成分とする行列の行列式を求めたも

ので, 全ての状態と内積が 0 になる状態（ヌル状態）が存在すると 0 になります。ヌル状態は物理的に意味がありませんから捨て去ります。これは数学的に言うと, 可約な表現から既約な部分を取り出す事に当たっています。このヌル状態の根本にあたる状態は特異ベクトルと呼ばれ, 次節で活躍する事になります。

今 c と h_{rs}（r,s は整数）をパラメータ β を使って

$$c = 1-6\frac{(\beta-1)^2}{\beta}, \tag{7}$$

$$h_{rs} = \frac{(r\beta-s)^2-(\beta-1)^2}{4\beta}, \tag{8}$$

とおくと, ミニマル系列を与える中心電荷は β が有理数の場合に当たり（特にミニマルユニタリ系列では $\beta=\frac{m}{m+1}$ $(m=3,4,\cdots)$）, 登場するプライマリー場の共形スケール次元は h_{rs}（r,s は有限な範囲を動く整数）で与えられます。例えば, イジング模型のスピン変数やフェルミオン場は $c=1/2$ の $h=1/16,1/2$ のプライマリー場達に対応し, 3 重臨界イジング模型の場合は $c=7/10$ の $h=1/10,3/5,3/2,3/80,7/16$ に, 3 状態ポッツ模型は $c=4/5$ のビラソロ代数で記述されるといった具合です。又, 後で述べる ABF 模型では各ミニマル模型に対応する臨界現象が実現する事が知られています。

4　共形場理論を越えて

ビラソロ代数は臨界点直上でしかその威力を発揮できないのですが, 臨界点から離れたところまで適用できるもっと一般的な対称性が変形ビラソロ代数です。ある意味で至難の業であった変形ビラソロ代数を構成する事が, 著者達 [7, 15, 8, 9], フレンケル・レシェテキン [10] そしてルキアノフ・プガイ [11, 12, 13] によって達成されていった様子をこれから説明します。

4.1　変形ビラソロ代数

とにかくまず始めに, 変形ビラソロ代数の定義を見ていただきましょう。まず, 2 つのパラメータ q,t を導入します。便宜上しばしば $t=q^\beta$ や $p=qt^{-1}$ と書きます。変形ビラソロ代数とは, 交換関係

$$\begin{aligned}[T_n,T_m] = &-\sum_{\ell=1}^{\infty} f_\ell (T_{n-\ell}T_{m+\ell}-T_{m-\ell}T_{n+\ell}) \\ &-\frac{(1-q)(1-t^{-1})}{1-p}(p^n-p^{-n})\delta_{n+m,0}\end{aligned} \tag{9}$$

を満たす T_n (n は整数) で生成される, 2 つのパラメータ q,t を持つ無限次元代数です。ここで構造定数 f_ℓ は

$$f(x)=\sum_{\ell=0}^{\infty} f_\ell x^\ell=\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{(1-q^n)(1-t^{-n})}{1+p^n}x^n\right) \tag{10}$$

で与えられます。式 (9) の右辺は生成子の 2 次なのでリー代数ではありませんが, ヤコビ律などは非自明に満足されています。(9) は, 母関数 $T(z)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} T_n z^{-n}$ を用いれば,

$$\begin{aligned} &f(w/z)T(z)T(w)-T(w)T(z)f(z/w) \\ &\quad =-\frac{(1-q)(1-t^{-1})}{1-p}\left[\delta\Big(\frac{pw}{z}\Big)-\delta\Big(\frac{w}{pz}\Big)\right] \end{aligned} \tag{11}$$

と, より印象的な形に表す事もできます。ビラソロ代数ではヤコビ律によって c の項が決まりましたが, 変形ビラソロ代数では, $f(x)$ をテーラー展開可能な未知関数として, $f(w/z)T(z)T(w)-T(w)T(z)f(z/w)\propto\delta(pw/z)-\delta(w/pz)$ の形を仮定すると, 結合律[6] によって $f(x)$ が (10) の形に定まります。又, 変形ビラソロ代数を変形 W_N代数へと拡張する事も可能で, フェイギン-フレンケルと著者達によって行われました [14, 15]。

交換関係 (9) は (4) に比べてかなり複雑な形をしています。変形ビラソロ代数の中にビラソロ代数はどのように含まれているのでしょうか。変形ビラソロ代数は 2 つのパラメータを持つため色々な極限を考える事ができます。特に, β を固定して $q\to 1$ とする共形極限を取るとビラソロ代数が見えてきます。変形パラメータ q を $q=e^h=1+h+\frac{1}{2!}h^2\cdots$ と h-展開します。(9) が $(q,t)\to(q^{-1},t^{-1})$ で不変である事に注意して, 変形ビラソロカレント $T(z)$ を

$$\begin{aligned} T(z)&=2+\beta h^2 T^{[2]}(z)+(\beta h^2)^2 T^{[4]}(z)+\cdots, \\ T^{[2]}(z)&=z^2L(z)+\frac{(\beta-1)^2}{4\beta}, \end{aligned} \tag{12}$$

と展開してやります。そして (11) に代入すると, h^0,h^2 の項は消え, h^4 に自明でない関係 (5) が現れます。つまり $L(z)$ は $T(z)$ の h^2 の部分に潜んでいたわけです。中心電荷 c は, 残っているパラメータ β と (7) の関係にあります。それでは (11) の $h^6,h^8,\cdots$ の項はどうかと言うと, $T^{[2]}(z),T^{[4]}(z),T^{[6]}(z),\cdots$ 達の関係式を与えます。共形不変性を持つ臨界点直上では $L(z)$ だけで済んでいた話が, ひとたび臨界点を外れると $T^{[4]},T^{[6]},\cdots$ という無限個の場が必要になり, $L(z)$ にそれらの変形の衣をまとった $T(z)$ が活躍する事になるわけです。

---

[6] $T(z_1)T(z_2)T(z_3)$ を $T(z_3)T(z_2)T(z_1)$ に並べ替える際に, $(1,2,3)\to(2,1,3)\to(2,3,1)\to(3,2,1)$ と $(1,2,3)\to(1,3,2)\to(3,1,2)\to(3,2,1)$ の 2 通り方法があるが, それらが一致すべしというヤン-バクスターに似た関係式。

ビラソロ代数の場合と同様に, 変形ビラソロカレント $T(z)$ は自由ボゾンで実現できます。但しボゾンの 2 次ではなく, ボゾンの指数関数の和の形に表されます。スクリーニングカレント・プライマリー場もボゾンで実現できます。実際には, 次節で述べるように, ボゾン化した表式が最初に得られたのでした。表現空間の性質を調べるためのカッツ行列式の計算もビラソロ代数の場合と全く同じ方法で行なう事ができます。レベル 4 と呼ばれる励起状態の所までのカッツ行列式を計算し, 一般の場合を予想しました。まともにやったのでは, レベル 5 以上の励起状態では行列式の計算量はほとんど実行不可能な程大きくなります。しかし自由場表示で与えられる表式を用いて, ビラソロ代数の場合に成立した事が同様に成立するとすると, カッツ行列式の予想式が正しい事を示す事ができます [7, 38]。カッツ行列式を見ると, パラメータ q,t の値が一般の場合には, 指標公式がビラソロ代数の時と同じである事, つまり状態数は変わらない事が分かります。パラメータが 1 の巾根の場合には様子が変わってきて, 状態数は減ってしまいます。

ビラソロ代数自身はかなり以前から知られていたにも拘らず, この変形ビラソロ代数の構成は最近の事で, 更に, 現在でもこの量子変形の本質を捉える一般的枠組みはまだ確立していません。普通のビラソロ代数がアフアィンリー代数から菅原構成法で得られる事に対応する概念がまだ完全ではないのが原因だと考えられています。

幸いにして, 幾つかの手がかりを元にして発見法的に変形ビラソロ代数を構成する事が可能でした。次節でそれらを説明します。

4.2 カロジェロ-サザランド及びルイセナール-シュナイダー模型

（変形）ビラソロ代数は, 長距離相互作用をする一次元量子多体系, カロジェロ-サザランド（CS）模型 [39] 及び三角ルイセナール-シュナイダー（tRS）[40] 模型と密接な関係があります。そして, 著者達をして変形ビラソロ代数の発見を可能ならしめたのは正にこの関係に他なりません。変形ビラソロ代数に迫るための幾つかのルートの中で, tRS 模型の研究がなぜ変形ビラソロ代数に少しでも近かったのかと言えば, tRS 模型の励起状態の性質の中に「変形ビラソロ代数」の情報がかなり「取り出しやすい状態」で潜んでいたからです。

CS 模型とは, サイン逆二乗の長距離ポテンシャルを持つ一次元量子多体系で, 結合定数 β を持ちます。この模型は, 粒子数と同じ数だけの保存量を持ち, 動的相関関数が厳密に求められている模型です。基底状態は β に応じて, ハルデーンの「一般化された排他律」[41] に従います。基底状態の寄与を取り去った励起状態に, 直接作用する新しいハミ

ルトニアンを考えると便利で, それは

$$H_{\mathrm{CS}} = \sum_{i=1}^{N} D_i^2 + \beta \sum_{i<j} \frac{x_i + x_j}{x_i - x_j} (D_i - D_j), \quad D_i = x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{13}$$

となります。ここに x_i は単位円周上の座標です。このハミルトニアンの固有状態となっている対称多項式は「ジャック多項式」[42] と呼ばれます。熱力学的極限 $(N \to \infty)$ を考えて, 自由ボゾン $([a_n, a_m] = 2n\delta_{n+m,0})$ を用いてこのハミルトニアンをボゾン化すると, ボゾンの 3 次で表され, 更にまとめ直すと

$$\hat{H}_{\mathrm{CS}} = \sqrt{\beta} \sum_{n>0} a_{-n} L_n + \Big(\text{既に対角化された項}\Big) \tag{14}$$

のように, 中心電荷 (7) を持つビラソロ生成子の正モード L_n で書き表されます。ここで, ビラソロ代数がこの CS 模型と関わっている事が見て取れます。

特異ベクトルは L_n $(n > 0)$ で消される状態なので, (14) から特異ベクトルが $\hat{H}_{\mathrm{CS}}$ の固有状態になっている事が分かります。スクリーニングチャージがビラソロ代数と交換する事から, スクリーニングカレントを用いて特異ベクトルを実現できるのですが, こうして作られた特異ベクトルは長方形のヤング図を持つジャック多項式に 1 対 1 に対応します。もっと一般には, ビラソロ代数の拡張である W_N 代数の特異ベクトルとジャック多項式が対応します。ビラソロ代数や W_N 代数の表現の既約性を統制する特異ベクトルという重要な状態が, まさしく CS 模型の励起状態であるジャック多項式と 1 対 1 に対応しているのです [43, 44]。

上記の CS 模型は非相対論的模型ですが, tRS 模型は光速にあたる定数をもう一つ導入し「相対論的」に拡張した模型で, 2 つの結合定数を持ちます（パラメータを組替えて q, t とします）。これも粒子数と同じ数の互いに可換な保存量を持っており, 基底状態の寄与を取り除いた励起状態に直接作用するハミルトニアンは,

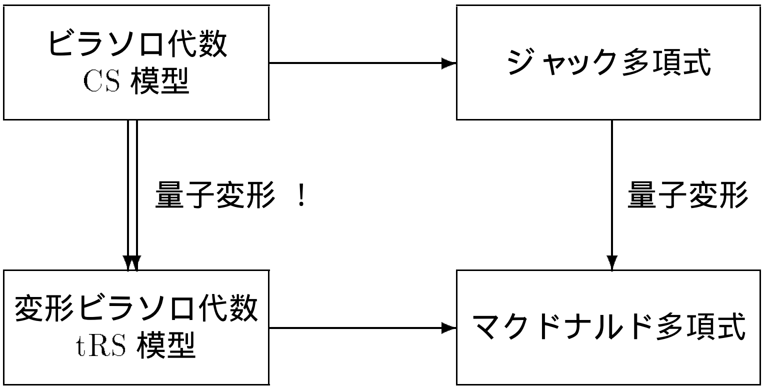
$$H_{\mathrm{tRS}} = \sum_{i=1}^{N} \prod_{j(\neq i)} \frac{t x_i - x_j}{x_i - x_j} \cdot q^{D_i} \tag{15}$$

で与えられます。ここで $q^D f(x) = f(qx)$ は q-シフト演算子です。この差分作用素はマクドナルドによる 2 パラメーター対称多項式の研究において初めて現れました。これの固有関数となっている対称多項式は「マクドナルド多項式」[45] と呼ばれています。CS 模型から tRS 模型への拡張で特に重要なのは, CS 模型の励起状態がジャック多項式で表されていたのに対して, tRS 模型の励起状態がマクドナルド多項式で表される事です。

ジャック多項式とマクドナルド多項式は, 数学的には正に我々が目指している「量子変形」の関係にあります。量子変形は q-変形とも呼ばれます。q-変形にははっきりとした定

義があるわけではないのですが，(i) $q \to 1$ で元の理論に戻る様にパラメータ q を入れて変形したもので，(ii) 元の理論の持っていた性質を q が入った世界でも保っているもの，と言って良いでしょう。(ii) の部分が曖昧であるため q-変形は一意的ではありませんが, ジャック多項式とマクドナルド多項式の関係は性質の良い q-変形の一例になっています。

ここまで状況が揃えば変形ビラソロ代数もすぐそこです。つまり, CS 模型のハミルトニアン (13) の中にビラソロ代数が潜んでいたように, tRS 模型のハミルトニアン (15) にはきっと変形ビラソロ代数が見い出されるはずなのです。



この図の中で今まで空欄であった変形ビラソロ代数を探し出せば問題は解決です。今回詳しく書く事はできませんが, 著者達の「変形ビラソロ代数探し」は, この考え方に沿って式 (14) の tRS 版（即ち (15) のボゾン化）を少し「ひねくりまわす」程度の事で解決を見たのでした。

4.3　フレンケル-レシェテキンの変形ビラソロ-ポアッソン代数

フレンケルとレシェテキンは量子群の意味で q-変形されたゲージ場理論のゲージ固定を実行する事により, 著者達による変形ビラソロ代数の導出に少し先立ち, その特別な場合にまで到達していました。

現在知られている自然界の基本的相互作用は（非可換）ゲージ理論という枠組で統一的に理解できますが, ゲージ理論とはゲージ対称性を持つ相対論的場の量子論で, 素直に採用される力学変数に余分な自由度が含まれているため量子化する際にゲージ固定という拘束条件を課す必要がある拘束系です。その帰結として, ゴーストが理論のユニタリ性を保証するために現れたりします。このような拘束系の物理学は, 色々な分野の研究において, 重要な役割を担っています。素粒子論で言えば, 最近議論されている弦理論や M 理論などにおいても拘束系の物理学が現れます。弦理論について言うと, $1+1$ 次元世界面

上での一般座標変換不変性と局所スケール変換不変性を, 世界面上の計量を共形ゲージに固定した後に残る対称性が共形対称性であり, そこで共形場理論が登場します。又ビラソロ代数は元々, 弦理論の量子化を実行する際に得られた拘束条件がなす代数として, ビラソロによって発見されたものでした。

可解模型においても, 拘束系の物理は重要です。ドリンフェルト-ソコロフ [46] によって, ハミルトニアンリダクションの方法と呼ばれる枠組み（一種のゲージ固定の処方箋）が提案され, 可解模型において拘束系の物理を扱う事が研究されて来ました。例えばヴェス-ズミノ-ノヴィコフ-ウイッテン (WZNW) 模型

$$
\begin{aligned}
S_{\mathrm{WZNW}} = &\frac{k}{8\pi}\int d^2x\,\mathrm{tr}(\partial_i g\partial_i g^{-1}) \\
&+\frac{k}{12\pi}\int d^3x\,\epsilon^{ijk}\mathrm{tr}(g^{-1}\partial_i g g^{-1}\partial_j g g^{-1}\partial_k g),
\end{aligned}
\tag{16}
$$

において, ハミルトニアンリダクションの方法を経て, ビラソロ代数や W 代数を得る事ができます。なおビラソロカレント $L(z)$ は, この模型のカレント代数 $J(z)$ の 2 次形式で表されます（これが先程少し述べた菅原形式です）。

フレンケルとレシェテキンは WZNW 模型におけるカレント代数を量子群で置き換えても, 同様のリダクションが可能だと推測しました。変形の後には, WZNW 模型の作用 (16) の対応物として量子群の L 行列と呼ばれる物が登場します。更に言うと, リダクションの過程は, L 行列の行列要素をうまく組み直す事に対応します。彼らはこの推測に従って, 量子群の自由場表示[7]と臨界レベルと呼ばれる特別な場合の表現論に基づいて, 量子アフアィンリー代数から変形ビラソロ-ポアッソン代数を構成する事に成功しました [10]。それは, 交換子ではなくポアッソン括弧に従う代数で, 生成子 T_n（n は整数）は

$$
\{T_n, T_m\}_{P.B.} = \sum_{\ell\in Z}\frac{1-q^\ell}{1+q^\ell}T_{n-\ell}T_{m+\ell} + (q^n - q^{-n})\delta_{n+m,0}
\tag{17}
$$

を満たします。

彼らの代数は, 可換な量にポアッソン代数の構造が入っているという意味で「古典論」と捉える事ができます。この可換代数は, 著者達が構成した変形ビラソロ代数（非可換代数）からは, 変形パラメータ q を固定して $\beta\to 0$ の極限を取る事により得る事ができます。その際ポアッソン括弧は $\{\,,\,\}_{P.B.} = -\lim_{\beta\to 0}[\,,\,]/(\beta\ln q)$ として導入されます。

又, 更に, フレンケルとレシェテキンは, 変形ビラソロ（ポアッソン）カレント $T(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} T_n z^{-n}$ が, 先程触れた, ベーテ仮設における被衣真空形式と酷似しているという深遠

---

[7] 脇本表示と呼ばれるもので, ボゾン場と β-γ ゴースト場が登場します。量子変形の場合には, β-γ ゴースト場自身は自由場ではなくなりますが, ある種の自由場表示をする事が可能です。

な事実を最初に見い出しています。なお, この現象に内在する機構を理解するというのは解決すべき面白い問題です。後に, この類似を指導原理にして変形ビラソロ（ポアッソン）代数を一般のリー環に対して拡張する事が議論されました [10, 47, 48]。

4.4 ルキアノフ-プガイによる ABF 模型の解析

変形ビラソロ代数は長距離相互作用をする一次元量子多体系などを通じて発見的に構成されたのですが, 最近, 変形ビラソロ代数が制限面模型など楕円関数が現れる可解模型, 特に ABF 模型などにおいては最も中心的な役割を果たしている事が認識されつつあります。ここではルキアノフ-プガイ[8] による ABF 模型の研究について説明をします [11, 12, 13]。

アンドリュース-バクスター-フォレスターによる制限面模型は, 2 次元正方格子上に次のような制限を受けた「高さ」と呼ばれる力学変数, ℓ, が分布している古典統計系です：

1. 高さ ℓ は 1 からある整数 $r-1$ までの整数値をとる,
2. 隣の格子点との高さの差は 1.

この高さの制限 $r(\geq 4)$ は,（変形）ビラソロ代数の中心 c や β と (7), $\beta=\frac{r-1}{r}$ の関係があり, ミニマルユニタリ系列を与えるときの整数パラメータ $m+1$ と一致します。又, $r=4$ の場合はイジング模型をその特殊な場合として含んでいます。

各面に適当なボルツマン重率 W を与え, 分配関数を計算する事が基本的な問題ですが, 勿論任意に与えたのではうまく解けません。ボルツマン重率を, ヤン-バクスター方程式（スター-トライアングル関係式）を満たすようにうまく与えた場合は厳密に解ける事が知られています。この方程式は,「はじめに」で述べたように, 多くの可解模型の可解性の鍵を握る重要な関係式です。

このボルツマン重率は ABF 模型では

$$W\left(\begin{array}{cc|c} \ell\pm2 & \ell\pm1 & \\ & & u \\ \ell\pm1 & \ell & \end{array}\right) = \rho(u), \tag{18}$$

$$W\left(\begin{array}{cc|c} \ell & \ell\pm1 & \\ & & u \\ \ell\pm1 & \ell & \end{array}\right) = \rho(u)\frac{[\ell\pm u]}{[1-u][\ell]}, \tag{19}$$

---

[8] 余談ですが, 筆者の一人が, 1996 年にモスクワの郊外チェルノゴロフカにあるランダウ研究所を訪れた時の話です。ランダウ研究所で助教授を勤めるプガイ氏に招かれて, 会議の出席者の数人は彼の自宅を訪ねました。その心の込もったパーティーでは, ロシアのお茶やお菓子をご馳走になり, とても楽しいひとときを過ごす事ができました。その時, 彼の居間の入り口に古ぼけたとても小さな「黒板」が立てかけてあるのがふと目にとまりました。彼の説明によると, 正にその小さな黒板の上で BPZ による共形場理論が誕生したという事でした。

$$W\left(\begin{array}{cc|c} \ell & \ell\pm1 & \\ \ell\mp1 & \ell & u \end{array}\right) \;=\; -\rho(u)\frac{[u][\ell\mp1]}{[1-u][\ell]}, \tag{20}$$

と定められます。ここに, $W\left(\begin{array}{cc|c} a & b & \\ c & d & u \end{array}\right)$ の a,b,c,d は面の四つの頂点の高さ変数, u はパラメータ（スペクトルパラメータと呼ばれる）, 又, $[u]$ は楕円テータ関数

$$\theta_1(u) = 2p^{1/8}\sin\pi u\prod_{n=1}^{\infty}(1-2p^n\cos 2\pi u+p^{2n})(1-p^n), \tag{21}$$

を用いて

$$[u] = \theta_1(u/r)/\theta_1(1/r), \tag{22}$$

と定義されます。パラメータ p は楕円関数のノームです。又, $\rho(u)$ は分配関数が 1 になるような規格化因子として決めておきます。

この模型の物理量としては, ある N 個の格子点の高さ変数が, 指定された値 $\sigma = (\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_N)$ になる確率 P_σ,（N 点相関関数と呼ぶ）に興味があります。まず, $N=1$ の場合はバクスターの「角転送行列法」を用いて計算できます。この角転送行列法というのは, 1 点関数を求める際の 2 次元状態和を, ある（より簡単な）1 次元状態和に帰着させる非常に強力かつ汎用的な方法です。この「角転送行列の方法」は, 例えば 1 次元イジング模型の解法の一つとして学部時代に習う, 所謂「転送行列の方法」の一種とも見なせます。但し今の場合は, ヤン-バクスター方程式が満たされる事などから, 幾つかの著しい性質が従います。例えば系の大きさが無限大の場合, 角転送行列は上の「1 次元状態」全体の成す空間に「対角的」に作用し, その固有値は「離散的」で「等間隔」になります。それゆえ, 1 点関数という量は角転送行列の固有値をグレーディングとする 1 次元状態の成す空間の指標公式と見なす事ができます。このようにして「たくさんの指標公式」を生成する模型として ABF 模型は重要な「工場」の役割を果たしました。その後, 伊達-神保-国場-三輪-尾角がこのようにして生産された指標公式が非制限模型の場合には「アフアィンリー環のストリング関数」（アフアィンリー環の指標公式の一種）又, 制限模型の場合には「ビラソロ代数の指標公式」に一致している事を発見しました [49]。しかし, 既にお話ししましたように, アフアィンリー環やビラソロ代数の表現空間はそれ自身で既に CFT の模型です。その指標公式は対応する CFT の模型の基本的なデータです。即ち, この京都スクールによる大きな発見は, 可解格子模型の臨界点での性質（アフアィンリー環, ビラソロ代数の指標公式）が, 臨界点を離れた所でも相関関数を通して現れるという神秘的な発見の非常に大きな「最初の一歩」だったとも言えます。

さて, 2点以上の場合の計算には角転送行列以外に,「頂点演算子」と呼ばれるオペレーターを登場させる必要があります。この頂点演算子も1次元状態の成す空間に働きますが, その作用は対角的ではない事を注意しておきます。頂点演算子$\Phi_\pm(u)$は, 交換関係

$$\begin{aligned}&\Phi_{\ell_3-\ell_2}(u_1)\Phi_{\ell_2-\ell_1}(u_2) \qquad (23)\\ &=\sum_{\ell_4} W\left(\begin{matrix}\ell_3 & \ell_4\\ \ell_2 & \ell_1\end{matrix}\middle| u_1-u_2\right)\Phi_{\ell_3-\ell_4}(u_2)\Phi_{\ell_4-\ell_1}(u_1),\end{aligned}$$

を満たすものとして特徴付けられます。結論から言うと, 高さが指定されたN個の場所が隣り合って一列に並んでいる場合は, N点相関関数は, 4隅に相当する4個の角転送行列, N個の点の挿入に相当するN個の頂点演算子$\Phi_\pm(z)$及びその双対演算子$\Phi^*_\pm(z)$という演算子達のうまい順番での積を, 1次元状態空間上でトレースをとったものとして表されます。このような頂点演算子による計算法は京都スクールによるXXZ鎖の相関関数の研究において開発されました。

ここでなされるべき対角的ではないオペレーターのトレースの計算では, 上の1次元状態和に相当する足し算を（無限回）やる必要があります。この無限和をどう処理するかという問題に対応するために, ルキアノフ-プガイは頂点演算子を自由ボゾンで表示する事を議論しました。彼らは変形ビラソロ代数の存在を仮定し, それを議論の拠り所として非常に自然な形で頂点演算子を自由ボゾンから構成しました。その後, 著者達の発見した変形ビラソロ代数の自由ボゾン表示が正に, ルキアノフ-プガイの予想したものである事が認識されました。具体的に言うと, ABF模型の頂点演算子が, 著者達の発見した変形ビラソロ代数のプライマリー場及びスクリーニングカレントで与えられる, という形になっています。ルキアノフ-プガイの頂点演算子は自由場で表現されていますから, N点相関関数はビラソロ代数の場合と同様の技術で簡単に積分表示できてしまいます（ルキアノフ-プガイ[12, 13]）。

後に, 変形ビラソロ代数のスクリーニングカレントが生成する楕円的無限次元代数（ランク1のリー環に対応する場合）が調べられました[14]。それを, ランク1以外に拡張する事により, ランクの高いリー環に付随する面模型の頂点演算子も構成する事が可能です[50]。又, 対応するリー環の表現のレベルを上げる事も研究されています[51]。

4.5 束縛状態と変形ビラソロ代数:ルキアノフの考察

共形場理論では, 多くの成果があったにも拘らず, 十分に扱う事のできない問題として束縛状態の取扱いがあります。最後にこの束縛状態の取扱いと変形ビラソロ代数の関係について述べましょう。

束縛状態は, 多くの物理系の様々な場面で現れて来ます。量子スピン鎖にもスピンの束縛状態が現れます。具体的にはハイゼンベルグ鎖と呼ばれる最も典型的なスピン鎖では低エネルギー励起は基本的に $c = 1$ の CFT で記述されますが, 高エネルギー側の励起にはその束縛状態が現れます。それらの解析は, 量子スピン鎖の熱力学的性質を議論する際に大変本質的です。幸いな事にこの場合は大変強力な道具が発見されています。それは, 先程出てきたベーテ仮設方程式の根の複素平面上における分布に対する「ストリング仮説」と呼ばれるもので, 束縛状態を最もうまく捉えた例の一つになっています [52]。

変形ビラソロ代数はバクスターの 8 頂点模型（XYZ 鎖）のキンクと反キンクの束縛状態（ブリーザー）を捉えています。それを少し具体的に見るには変形ビラソロ代数の定義式 (11) を次の様に書き換えてみます：

$$T(z_1)T(z_2) = S\Big(\frac{z_2}{z_1}\Big)T(z_2)T(z_1) + C\left(\delta\Big(\frac{pz_1}{z_2}\Big) + \delta(\frac{z_1}{pz_2})\right). \tag{24}$$

ここで, Cは定数で関数 Sは,

$$S(z) \equiv \frac{f(z^{-1})}{f(z)} = -z\frac{\Theta_{p^2}(qpz)\Theta_{p^2}(q^{-1}p^2z)}{\Theta_{p^2}(qz)\Theta_{p^2}(q^{-1}pz)}, \tag{25}$$

で与えられます。ここに, $\Theta_p(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-p^n)(1-zp^{n-1})(1-z^{-1}p^n)$ です。関数 Sはスカラーなのでヤン-バクスター方程式

$$S(z_1/z_2)S(z_1/z_3)S(z_2/z_3) = S(z_2/z_3)S(z_1/z_3)S(z_1/z_2) \tag{26}$$

は自明に満たされ, 更に

$$\text{ユニタリティ:}\qquad S(z)S(z^{-1}) = 1, \tag{27}$$

$$\text{交叉対称性:}\qquad S(pz) = \frac{1}{S(z)}, \tag{28}$$

を満たします。又, $z = e^{2\pi iu}$ とすると, 交叉対称性は, 関数 Sの u 平面における 2 重周期性を意味します。これらの事を総合すると, 関数 Sは因子化散乱行列の「楕円関数解」になっている事が分かります。即ち, 「はじめに」で触れましたように, 変形ビラソロ代数は楕円関数 $S(z)$ に付随した「楕円代数」と見做せます。更に, ルキアノフは変形ビラソロカレント $T(z)$ が XYZ 模型の束縛状態の生成消滅演算子である事を議論しました [11]。変形ビラソロ代数の交換関係は, ブリーザーの生成滅演算子の満たすファデーエフ-ザモロチコフ代数に相当するわけです。又, 連続極限に対応する操作の下で, S行列はザモロチコフ-ザモロチコフの結果

$$S(\theta) = \frac{\sinh\theta + i\sin\pi\xi}{\sinh\theta - i\sin\pi\xi} \tag{29}$$

に退化します。ここで, ξはサイン-ゴルドン模型の結合定数です。つまり, 変形ビラソロ代数は連続極限においてサイン-ゴルドン模型のブリーザーの生成消滅演算子のファデーエフ-ザモロチコフ代数に帰着する事が確認されました。このルキアノフの考察は物理的な観点から見て大変興味深く, 今後様々な応用が期待されます。

5 終わりに

共形場理論では捉え切れない臨界点直上から外れた領域を, 可解模型の研究によって明らかにしようとする時に, どのようにして変形ビラソロ代数が現れて来るかを見てきました。この変形ビラソロ代数は, 可解模型の束縛状態などの物理的性質を捉えている事も分かって来ています。又, その楕円関数にまつわる数学的な構造は, 非常に自然なものに見えます。CFT においては, アフファィンリー代数とビラソロ代数とは関係は, 菅原形式を通して, 切っても切れない糸で結ばれていました。変形ビラソロ代数にとってこのような相手が見つかるのはどの位近い未来の事なのでしょうか ?

今後, 変形ビラソロ代数とその拡張である変形 W代数, 超対称版などが新しい物理を見せてくれる事を期待しています。

参考文献

[1] A.A. Belavin, A.M. Polyakov and A.B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys.* **B241** (1984) 333.

[2] *Conformal Invariance and Applications to Statistical Mechanics*, edited by C. Itzykson, H. Saleur, and J.-B. Zuber, World Scientific, Singapore, 1988; *Conformal Field Theory*, S.V. Ketov, World Scientific, 1995; *Conformal Field Theory*, P. DiFrancesco, P. Mathieu and D. Sénéchal, Springer, 1996.

[3] 川上則雄, 梁成吉, 「一次元量子系の物理」, 固体物理 Vol.28-30 (1993-1995) に連載。

[4] *Yang-Baxter equation in integrable systems* edited by M. Jimbo, Adv. Ser. Math. Phys. vol. 10, World Scientific.

[5] V. G. Drinfeld, *Dokl. Acad. Nauk* **283** (1985) 1060.

[6] M. Jimbo, *Lett. Math. Phys.* **10** (1985) 63.

[7] J. Shiraishi, H. Kubo, H. Awata and S. Odake, *Lett. Math. Phys.* **38** (1996) 33.

[8] H. Awata, H. Kubo, S. Odake and J. Shiraishi, To appear in *CRM series in mathematical physics*, Springer Verlag.

[9] H. Awata, H. Kubo, Y. Morita, S. Odake and J. Shiraishi, *Lett. Math. Phys.* **41** (1997) 65.

[10] E. Frenkel and N. Reshetikhin, *Comm. Math. Phys.* **178** (1996) 237.

[11] S. Lukyanov, *Phys. Lett.* **B367** (1996) 121.

[12] S. Lukyanov and Y. Pugai, *J. Exp. Theor. Phys.* **82** (1996) 1021.

[13] S. Lukyanov and Y. Pugai, *Nucl. Phys.* **B473** (1996) 631.

[14] B. Feigin and E. Frenkel, *Comm. Math. Phys.* **178** (1996) 653.

[15] H. Awata, H. Kubo, S. Odake and J. Shiraishi, *Comm. Math. Phys.* **179** (1996) 401.

[16] A. B. Zamolodchikov and Al. B. Zamolodchikov, *Annal. Phys.* **120** (1979) 253.

[17] R. Baxter, *Ann. of Phys.* **70** (1972) 193.

[18] G. Andrews, R. Baxter and J. Forrester, *J. Stat. Phys.* **35** (1984) 193.

[19] C. Fronsdal, *Lett. Math. Phys.* **40** (1997) 117.

[20] B. Enriquez and G. Felder, preprint q-alg/9703018.

[21] V. G. Drinfeld, *Algebra and Analysis*, **1**, 1419 (1989); *Algebra and Analysis*, **2** (1990) 829.

[22] R. J. Baxter, *Exactly solved models in statistical mechanics*, Academic Press, London, 1982.

[23] H. A. Bethe, *Z. Physik.* **71** (1931) 205.

[24] A. Kuniba and J. Suzuki, *Comm. Math. Phys.* 173 (1995) 225.

[25] L. Onsager, *Phys. Rev.* **65** (1944) 117.

[26] C. N. Yang, *Phys. Rev.* **85** (1952) 808.

[27] E.W. Montroll, R.B. Potts and J.C. Ward, *J. Math. Phys.* **4** (1963) 308.

[28] T. T. Wu, B. M. McCoy, C. A. Tracy and E. Barouch, *Phys. Rev. B* **13** (1976) 316.

[29] M. Sato, T. Miwa and M. Jimbo, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **15** (1979) 577, 871.

[30] R. Baxter, *J. Stat. Phys.* **9** (1973) 145.

[31] B. Davies, O. Foda, M. Jimbo, T. Miwa and A. Nakayashiki, *Commun. Math. Phys.* **151** (1993) 89.

[32] M. Jimbo, K. Miki, T. Miwa and A. Nakayashiki, *Phys. Lett.* **A168** (1992) 256.

[33] M. Kashiwara, *Commun. Math, Phys.* **133** (1990) 249.

[34] A. A. Belavin, *Nucl. Phys.* **B180** (1981) 189.

[35] E. Date, M. Jimbo, T. Miwa and M. Okado, *Lett. Math. Phys.* **12** (1986) 209, ERRATUM-ibid. **14** (1987) 97.

[36] E. K. Sklyanin, *Funct. Anal. Appl.* **16** (1983) 263.

[37] O. Foda, K. Iohara, M. Jimbo, R. Kedem, T. Miwa and H. Yan, *Lett. Math. Phys.* **32** (1994) 259.

[38] P. Bouwknegt and K. Pilch, preprint q-alg/9710026.

[39] F. Calogero, *Jour. Math. Phys.* **10** (1969) 2197;
B. Sutherland, *Jour. Math. Phys.* **12** (1970) 246, 251 ; *Phys. Rev.* **A4** (1971) 2019 ; **A5** (1972) 1372.

[40] S.N.M. Ruijsenaars and H. Schneider, *Ann. Phys.* **170** (1986) 370 ; S.N.M. Ruijsenaars, *Comm. Math. Phys.* **110** (1987) 191.

[41] F. D. M. Haldane, *Phys. Rev. Lett.* **67** 937 (1991).

[42] R. P. Stanley, *Adv. Math.* **77** (1989) 76.

[43] K. Mimachi and Y. Yamada, *Comm. Math. Phys.* **174** (1995) 447: *RIMS Kokyuroku* **919** (1995) 68.

[44] H. Awata, Y. Matsuo, S. Odake and J. Shiraishi, *Nuclear Physics* **B449** (1995) 347.

[45] I.G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Functions* (2nd ed.), Oxford University Press 1995.

[46] V. G. Drinfeld and V. V. Sokolov, *Sov. Math. Dokl.* **23** (1981) 457 ; *J. Sov. Math.* **30** (1985) 1975.

[47] E. Frenkel and N. Reshetikhin, preprint q-alg/9708006.

[48] A. Kogan, preprint q-alg/9710027.

[49] E. Date, M. Jimbo, A. Kuniba, T. Miwa and M. Okado, *Nucl. Phys.* **B290 [FS20]** (1987) 231; *Lett. Math. Phys.* **17** (1989) 69.

[50] Y. Asai, M. Jimbo, T. Miwa and Y. Pugai, preprint RIMS-1082, June 1996, hep-th/9606095.

[51] H. Konno, preprint q-alg/9709013.

[52] M. Takahashi and M. Suzuki, *Prog. Theor. Phys.* **46** (1972) 2187.

英文題名

Beyond The Conformal Field Theory:
Deformed Virasoro Algebra Opens A New Door

著者名ローマ字綴り

栗田英資 Awata Hidetoshi
久保晴信 Kubo Harunobu
守田佳史 Morita Yoshifumi
小竹　悟 Odake Satoru
白石潤一 Shiraishi Jun'ichi

非会員著者紹介

栗田英資氏は1965年北海道生まれ。1988年北大卒。
1993年北大大学院博士課程修了。専門は場の理論。