Calogero-Moser 模型，Ruijsenaars-Schneider 模型の古典平衡点に付随する多項式

物理科学科　小竹 悟

1　序論

Calogero-Sutherland-Moser 模型とは，長距離相互作用 (ポテンシャルは $\frac{1}{r^2}, \frac{1}{\sin^2 r}, \wp(r)$ などで，近距離では $\frac{1}{r^2}$) を持つ，1 次元 (量子) 可積分多体系である．例えば A_{r-1} 型の模型の古典ハミルトニアンは,

$$\text{Calogero 系} \qquad H(p,q) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r} p_j^2 + \frac{\omega^2}{2}\sum_{j=1}^{r} q_j^2 + \frac{g^2}{2}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{r} \frac{1}{(q_j-q_k)^2}\ , \tag{1}$$

$$\text{Sutherland 系} \qquad H(p,q) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r} p_j^2 + \frac{g^2}{2}\sum_{\substack{j,k=1\\ j\neq k}}^{r} \frac{1}{\sin^2(q_j-q_k)}\ , \tag{2}$$

である．ここで r は粒子数で，$q=(q_1,\cdots,q_r)$ はその座標，$p=(p_1,\cdots,p_r)$ は共役運動量，ω と g は正の結合定数である．この Calogero-Sutherland-Moser 模型はルート系に付随する模型で，上に書いた A 型だけでなく，結晶型のルート系 (A_r, B_r, C_r, D_r, BC_r, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2) と非結晶型のルート系 (H_3, H_4, $I_2(m)$) に対して定義される．またこれらのルート系には各ルートに垂直な面に関する鏡映で生成される Coxeter 群 (Weyl 群) があり，模型のハミルトニアンはこの Coxeter 群の作用の下で不変になっている．

Ruijsenaars-Schneider 模型とは，この Calogero-Sutherland-Moser 模型の ‘相対論版’, ‘離散化版’，‘(1 パラメータ) 変形版’ である．ハミルトニアンの運動項は p_j^2 の代わりに $\sim \cosh p_j$ となっている．あるパラメータを特別な値に近づけると (例えば ‘光速度’ を無限大にすると)，Ruijsenaars-Schneider 模型は Calogero-Sutherland-Moser 模型に帰着する．例えば A_{r-1} 型の Calogero 模型に帰着する Ruijsenaars-Schneider 模型の古典ハミルトニアンは

$$H(p,q) \ = \ \sum_{j=1}^{r}\left(\cosh p_j\,\sqrt{V_j(q)\,V_j^*(q)} - \frac{1}{2}\Big(V_j(q)+V_j^*(q)\Big)\right), \tag{3}$$

$$V_j(q) \ = \ \Big(1+i\,\frac{q_j}{a}\Big)\prod_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{r}\Big(1-i\,\frac{g}{q_j-q_k}\Big), \tag{4}$$

である．ここで a と g は正の結合定数である．

これらの模型と (数理) 物理学との関係は多岐にわたっている．その幾つかを挙げると，元々 Calogero 模型は物性理論の模型として考え出されたが，量子 Hall 効果との関連や，分数排他統計，動的相関関数の計算などの興味深い結果がある．素粒子の標準模型はゲージ理論で記述されているが，超対称ゲージ理論の厳密解を与える Seiberg-Witten 理論に現れる曲面は，楕円型ポテンシャルの古典 Calogero 模型と深く関連している．弦理論や統計臨界系などの 2 次元共形場理論では Virasoro 代数やそれを拡張した W 代数が重要な対称性であるが，これらの代数と Sutherland 模型とは自由場表示を通じて密接に関係している．また変形 Virasoro 代数・変形 W_N 代数は Ruijsenaars-Schneider 模型との関係を通じて発見された．Calogero-Sutherland 模型は Lax 形式で書く事ができるが，古典論においても Lax 行列の固有値が整数値になっていたりもする．この様にこの模型は古典論・量子論共に大変興味深い模型である．

本研究では，Calogero-Sutherland-Moser 模型と Ruijsenaars-Schneider 模型の古典平衡点及びそれに付随する多項式について研究を行った．紙面の都合で A 型の結果しか述べる事ができないが，その他のルート系の結果については，佐々木隆氏 (京大基研) との共同論文 [1, 2] 及びその中の参考文献を御覧頂きたい．

2 A 型の場合

ハミルトニアン (1), (3) の古典平衡点は $p=0, q=\bar{q}$ (但し $\frac{\partial H(0,q)}{\partial q_j}\Big|_{\bar{q}}=0$) で与えられるが，この式はそれぞれ

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{r}\frac{1}{\bar{q}_j-\bar{q}_k}=\frac{\omega}{g}\,\bar{q}_j\,, \tag{5}$$

$$\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{r}\frac{\bar{q}_j-\bar{q}_k-ig}{\bar{q}_j-\bar{q}_k+ig}=\frac{a-i\bar{q}_j}{a+i\bar{q}_j}\,, \tag{6}$$

と書き直すことができる．(5) の解はパラメータの組合せ ω/g だけに依存するので $\bar{q}_j=\sqrt{g/\omega}\,y_j$ とおき，$\{y_j\}$ を零点とする多項式を考えると，それは Hermite の多項式に一致する：

$$2^r\prod_{j=1}^{r}(x-y_j)=r!\sum_{j=0}^{[\frac{r}{2}]}\frac{(-1)^j(2x)^{r-2j}}{j!(r-2j)!}\equiv H_r(x). \tag{7}$$

Hermite の多項式は調和振動子の量子化でお馴染の直交多項式であるが，この結果 (7) は 19 世紀に既に知られていた．

(6) の解はパラメータ a と g に依るので $\bar{q}_j = \sqrt{ag}\, y_j$, $\delta = g/a$ とおき，上と同じ様に $\{y_j\}$ を零点とする多項式を考えてみる．(3) は (1) を (1 パラメータ) 変形した理論であったから，この多項式は Hermite 多項式を (1 パラメータ) 変形した多項式と見なす事ができるはずである (q 変形とは違う変形になっている)．そこで

$$H_r^{(\delta)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} 2^r \prod_{j=1}^{r}(x - y_j) \tag{8}$$

と定義する．$\delta = 0$ では Hermite 多項式に帰着する，$H_r^{(0)}(x) = H_r(x)$．(6) を解析的に解く事は絶望的なので，パラメータを与えて数値計算を行い，それを基に $H_r^{(\delta)}(x)$ を推測し，その推測した多項式を用いて別のパラメータを与えて数値計算を行って (6) を満たしているかを確認する，という方法で計算を行った．変形された Hermite 多項式 $H_r^{(\delta)}(x)$ は，x について r 次，δ について $[\frac{r}{2}]$ 次の多項式で，係数は整数になっている．$\{\bar{q}_j\}$ が (6) の解であれば $\{-\bar{q}_j\}$ もそうなので，Hermite の多項式の場合 $H_r(-x) = (-1)^r H_r(x)$ と同様に，偶奇性が決まっている，$H_r^{(\delta)}(-x) = (-1)^r H_r^{(\delta)}(x)$．偶数次の多項式の原点での値は簡単な変形パターンを持っている，

$$H_{2n}^{(\delta)}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \prod_{j=0}^{n-1}(1 + j\delta). \tag{9}$$

この変形 Hermite 多項式は次の三項間関係式を満たしている：

$$H_{n+1}^{(\delta)}(x) - 2xH_n^{(\delta)}(x) + (2n + n(n-1)\delta)H_{n-1}^{(\delta)}(x) = 0. \tag{10}$$

この種の三項間関係式は直交性と同値なので，この変形 Hermite 多項式も直交多項式になる事が分かる．

ハミルトニアン (2) の古典平衡点は解析的に求まり，$\{\sin \bar{q}_j\}$ を零点に持つ多項式は第 1 種の Chebyshev 多項式 ($T_n(\cos\varphi) = \cos(n\varphi)$) に一致する：$2^{r-1}\prod_{j=1}^{r}(x - \sin \bar{q}_j) = T_r(x)$．(2) に帰着する Ruijsenaars-Schneider 模型の古典平衡点は，Calogero の場合と異なり変形を受けず，(2) の古典平衡点と同じである．

謝辞　本研究は平成 15 年度信州大学理学部学部長裁量経費による助成を受け，助成金は計算に必要なコンピュータの購入に充てられました．ここに感謝致します．

参考文献

[1] S. Odake and R. Sasaki, “Polynomials Associated with Equilibrium Positions in Calogero-Moser Systems”, *J. Phys.* **A** : Math. and Gen. **35** (2002) 8283-8314.

[2] S. Odake and R. Sasaki, in preparation.