CSM 模型，RSvD 模型の諸性質に関する研究

物理科学科　小竹 悟

Calogero-Sutherland-Moser (CSM) 模型とは，長距離相互作用を持つ，1 次元 (量子) 可積分多体系であり，Ruijsenaars-Schneider-van Diejen (RSvD) 模型とは，この CSM 模型の ‘相対論版’，‘離散化版’，‘(1 パラメータ) 変形版’ である．これらの模型と (数理) 物理学との関係は多岐にわたり，古典論・量子論共に大変興味深い模型であるため，研究が続けられて来ている．本研究では，CSM 模型・RSvD 模型の一体問題，更にはより一般の一体問題の解ける系に対して，生成消滅演算子に関する研究を行った．

(調和振動子の) 生成消滅演算子は量子論において基礎的かつ重要な道具である．例えば場の量子論では，相互作用表示の場の演算子は調和振動子の生成消滅演算子の無限個の集まりである．1 自由度の量子力学系の束縛状態を考察する：

$$\mathcal{H}\phi_n = \mathcal{E}_n\phi_n, \quad 0 = \mathcal{E}_0 < \mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_2 < \cdots, \quad ||\phi_n||^2 < \infty.$$

調和振動子の場合を思い出しておくと，

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2}(p^2 + x^2 - 1) = \frac{1}{2}(-ip + x)(ip + x) = a^\dagger a\,, \\ \mathcal{E}_n &= n\,, \quad \phi_n(x) = \phi_0(x)H_n(x), \quad \phi_0(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} \end{aligned}$$

であるが，$[\mathcal{H}, [\mathcal{H}, x]] = x$ となる事から $(\mathrm{ad}\mathcal{H})^n x = [\mathcal{H}, [\mathcal{H}, \cdots, [\mathcal{H}, x]\cdots]]$ が容易に求まり，x に対する Heisenberg 演算子が厳密に求められる：

$$e^{it\mathcal{H}}x\,e^{-it\mathcal{H}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^n}{n!}(\mathrm{ad}\mathcal{H})^n x = x\,\cos t + p\,\sin t = \frac{1}{2}(x - ip)\,e^{it} + \frac{1}{2}(x + ip)\,e^{-it}.$$

ここで負/正振動数部分の係数が生成/消滅演算子 $(a^\dagger/a)$ になっている事に注意しておく．

エネルギースペクトル $\{\mathcal{E}_n\}$ と固有関数 $\{\phi_n\}$ が全て具体的に求まる場合に解ける系と呼ぶが，$\mathcal{H}$ が (2 階の) 微分演算子である通常の量子力学だけではなく，$\mathcal{H}$ が (2 階の解析的) 差分演算子で与えられる ‘離散’ 量子力学の場合にも様々な例が知られている．系に生成消滅演算子が存在するという事は，消滅演算子で消される基底状態に生成演算子を次々と掛ける事により励起状態が全て得られる事になるので，必然的に解ける系を意味する．そこで逆に

「解ける系には生成消滅演算子が存在するか？」

という問が考えられる．ここで欲しい生成消滅演算子は微分 (差分) 演算子として具体的に書き表されるものである．

この問に対する答えは,「多くの場合に存在する」である．より詳しく述べると,

(i) 固有関数が $\phi_n(x)=\phi_0(x)P_n(\eta(x))$ ($P_n(\eta)$ は $\eta=\eta(x)$ の n 次式) という形をしている．

(ii) closure relation と呼ぶ次の関係式 $[\mathcal{H},[\mathcal{H},\eta]]=\eta R_0(\mathcal{H})+[\mathcal{H},\eta]R_1(\mathcal{H})+R_{-1}(\mathcal{H})\quad(R_i(\mathcal{H})$ は $\mathcal{H}$ の関数) が成立する．

という 2 条件が満たされる場合に，生成消滅演算子を微分 (差分) 演算子として具体的に構成する事ができる．方針は調和振動子の場合と同じで，closure relation により $(\mathrm{ad}\mathcal{H})^n\eta$ が容易に求まり，‘sinusoidal coordinate’ η に対する Heisenberg 演算子が厳密に求められるので，その負/正振動数部分の係数を生成/消滅演算子 ($a^{(+)}/a^{(-)}$) とするのである．具体的な表式は,

$$
\begin{aligned}
e^{it\mathcal{H}}\eta(x)e^{-it\mathcal{H}}&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^n}{n!}(\mathrm{ad}\,\mathcal{H})^n\eta\\
&=[\mathcal{H},\eta(x)]\frac{e^{i\alpha_+(\mathcal{H})t}-e^{i\alpha_-(\mathcal{H})t}}{\alpha_+(\mathcal{H})-\alpha_-(\mathcal{H})}-R_{-1}(\mathcal{H})/R_0(\mathcal{H})\\
&\qquad+\big(\eta(x)+R_{-1}(\mathcal{H})/R_0(\mathcal{H})\big)\frac{-\alpha_-(\mathcal{H})e^{i\alpha_+(\mathcal{H})t}+\alpha_+(\mathcal{H})e^{i\alpha_-(\mathcal{H})t}}{\alpha_+(\mathcal{H})-\alpha_-(\mathcal{H})}\\
&=a^{(+)}(\mathcal{H},\eta)e^{i\alpha_+(\mathcal{H})t}+a^{(-)}(\mathcal{H},\eta)e^{i\alpha_-(\mathcal{H})t}-R_{-1}(\mathcal{H})/R_0(\mathcal{H}),\\
a^{(\pm)}(\mathcal{H},\eta)&=\Big(\pm[\mathcal{H},\eta(x)]\mp\big(\eta(x)+R_{-1}(\mathcal{H})/R_0(\mathcal{H})\big)\alpha_{\mp}(\mathcal{H})\Big)\big/\big(\alpha_+(\mathcal{H})-\alpha_-(\mathcal{H})\big)
\end{aligned}
$$

である．ここで 2 つの ‘振動数’ は

$$\alpha_{\pm}(\mathcal{H})=\big(R_1(\mathcal{H})\pm\sqrt{R_1(\mathcal{H})^2+4R_0(\mathcal{H})}\,\big)/2$$

である．(i) と (ii) という 2 つの条件を課したが，これらは関係しており，通常の量子力学系の場合にはこの 2 つの条件は同じ内容である．

より詳しい内容については参考文献を御覧頂きたい．多自由度系に対する生成消滅演算子に関して，研究を継続中である．

謝辞　本研究は平成 18 年度信州大学理学部学部長裁量経費による助成を受け，助成金は発表等に必要となるノート型コンピュータの購入に充てられました．ここに感謝致します．

参考文献

[1] S. Odake and R. Sasaki, “Unified Theory of Annihilation-Creation Operators for Solvable (‘Discrete’) Quantum Mechanics”, *Journal of Mathematical Physics* **47** (2006) 102102 (33pages).

[2] S. Odake and R. Sasaki, “Exact solution in the Heisenberg picture and annihilation-creation operators”, *Physics Letters* **B641** (2006) 112-117.