

スピン鎖の連続極限¹

基研北白川 小竹 悟²

このトークでは、スピン 1 の可積分 XXZ スピン鎖の連続極限（格子間隔 $\rightarrow 0$ ）を Affleck 流 [2] に考察し、それが supersymmetric sine-Gordon 模型になる事を示す。又、スピン $\frac{1}{2}$, 1 の可積分 XXZ スピン鎖の対称性であるアフィン量子群 $U_q\widehat{su}(2)$ の生成元が、連続極限に於いて、sine-Gordon, supersymmetric sine-Gordon 模型の non-local charge になる事を示す。

1. 序論

一次元量子スピン鎖は強相関電子系の模型として、又適当なハミルトニアンの場合には解ける模型として多くの人々によって調べられてきた。XXZ スピン鎖には量子群 [3] の対称性があり、スピン鎖は量子群の格好の実験場である [4]。共形場の理論に於いても量子群が登場するが、量子群がその真価を発揮するのは massive 理論に於いてである。共形場の理論は massless 理論であり、Virasoro 代数 Vir やアフィンリー代数 $\widehat{\mathcal{G}}$ といった無限次元代数が重要な役割を果たしている。massive な理論は一般には可解理論ではないが、共形場の理論に無限個の保存量を保つ様に摂動を加えて可解な理論を得る事が出来る [5, 6]。この時もはや Virasoro 代数はなくなってしまうが、多くの場合アフィン量子群 $U_q\widehat{\mathcal{G}}$ が Vir にとって変わって重要な役割を果たす様になる。

このトークではスピン鎖と (super) sine-Gordon 模型との関係を述べたいので、それらの簡単な説明を先ずしておく。sine-Gordon 模型の作用は

$$S_{SG} = \int d^2x (\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \lambda \cos\beta\phi) \quad (1)$$

で与えられ、その性質は詳しく調べられている [7]。なかでも S 行列及び non-local charge は (レベル 0 の) アフィン量子群 $U_q\widehat{su}(2)$ と密接に関係している [8]。supersymmetric sine-Gordon 模型の作用は超場を用いて

$$S_{SSG} = \int d^2x d^2\theta (\frac{1}{2}\bar{D}\Phi D\Phi + \lambda \cos\beta\Phi) \quad (2)$$

で与えられ、成分場 ($\Phi = \phi + \bar{\theta}\psi + \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta F$) で表して補助場 ($F = \frac{1}{2}\lambda\beta \sin\beta\phi$) を消去すれば

$$S_{SSG} = \int d^2x (\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \frac{1}{4}\lambda\beta^2\bar{\psi}\psi \cos\beta\phi + \frac{1}{8}\lambda^2\beta^2 \cos^2\beta\phi) \quad (3)$$

¹ このトークは稲見武夫氏との共同研究 [1] に基づくものです。

² 1992 年度素粒子奨学生

となる。これについても S 行列 [9], non-local charge [10] が求められており, アフィン量子群 $U_q\widehat{su}(2)$ と密接に関係している。

4次元の場の理論では S 行列の対称性は Poincaré 群と内部対称性の直積に限られるという Coleman-Mandula の定理が幾つかの仮定の下に示されている [11]。この仮定の中に“保存 charge はボソンのである”というものがあるがこれを緩めてフェルミオンのものまで許すと超対称性が許される様になる [12]。2次元ではボソン・フェルミオン以外の半端な統計性が許される為 S 行列の対称性にはもっと可能性がある事になる。又, 別の仮定として“多粒子状態に働く時には, 一粒子状態のテンソル積と違って加法的に働く”というものがある。つまり全保存 charge は各保存 charge の単純な和

$$Q = \sum_i Q_i = \sum_i \cdots \otimes 1 \otimes \overset{i}{Q} \otimes 1 \otimes \cdots \quad (4)$$

になるという事である。量子群に於いてはこの規則が非自明なものに置き変わり, Coleman-Mandula の定理の仮定をはみ出す為, S 行列の対称性の可能性が広がるのである。

Majorana フェルミオン3つ ($\psi^a, a = 1, 2, 3$) の模型

$$S = \int d^2x \left(\frac{i}{2} \bar{\psi}^a \gamma^\mu \partial_\mu \psi^a + \lambda (\bar{\psi}^a \psi^a)^2 \right) \quad (5)$$

が, supersymmetric sine-Gordon 模型になる事を紹介しておく [13]。ボソン化

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} (\bar{\psi}^1 \gamma^\mu \partial_\mu \psi^1 + \bar{\psi}^2 \gamma^\mu \partial_\mu \psi^2) &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2, & i \bar{\psi}^1 \gamma_\mu \psi^2 &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \phi, \\ \frac{1}{2} (\bar{\psi}^1 \psi^1 + \bar{\psi}^2 \psi^2) &= \frac{\mu}{\pi} \cos \sqrt{4\pi} \phi \end{aligned} \quad (6)$$

により恒等式

$$\mu^2 \cos^2 \sqrt{4\pi} \phi = \frac{\pi}{2} (\partial_\mu \phi)^2 \quad (7)$$

が導かれ, これらを用いると (5) は $\beta = \sqrt{4\pi}$ の supersymmetric sine-Gordon 模型になる。ハミルトニアンに直すと

$$\mathcal{H} = \frac{\pi}{2} (J_+^a J_+^a + J_-^a J_-^a) + 8\lambda (J_+^a J_-^a) \quad (8)$$

で, $J_\pm^a = -\frac{1}{2} i \epsilon^{abc} \psi_\pm^b \psi_\pm^c$ はレベル 2 の $\widehat{su}(2)$ カレントである。 β を変えるには相互作用 $(\bar{\psi}^a \psi^a)^2$ に非等方性 $(\bar{\psi}^1 \psi^1 + \bar{\psi}^2 \psi^2 + g \bar{\psi}^3 \psi^3)^2$ を入れればよい。一般にレベル k の $SU(2)$ WZW 模型にカレントカレントの摂動 $(J_+^a J_-^a)$ を加えると $\beta = \sqrt{\frac{8\pi}{k}}$ の fractional super sine-Gordon 模型が得られ, 非等方性 $(J_+^1 J_-^1 + J_+^2 J_-^2 + g J_+^3 J_-^3)$ を入れると β が変わる事がわかっている [14]。以下ではスピン 1 の XXZ 鎖が supersymmetric sine-Gordon 模型になる事を示したいのだが, その為にはハミルトニアンが (8) の様に $\widehat{su}(2)$ カレントで表

される事を示せばよい事になる。レベル k の $\widehat{su}(2)$ カレントで書かれれば、それを実ボソン1つと \mathbf{Z}_k パラフェルミオン ($k=1$ では $\mathbf{1}$, $k=2$ では実フェルミオン) で表して, fractional super sine-Gordon 模型 [15] が得られるのである。

次にスピン鎖の話に移ろう。スピン鎖とは一次元格子の各格子点 j に交換関係

$$[S_j^a, S_{j'}^b] = \delta_{jj'} i \epsilon^{abc} S_j^c, \quad (9)$$

を満足するスピン s の演算子 S_j^a ($a=1,2,3$) ($S^\pm = S^1 \pm iS^2$) がのっている系の事である。最も簡単な XXX 模型 (Heisenberg 模型) から見ていこう。ハミルトニアンは

$$H_{XXX} = J \sum_j \vec{S}_{j+1} \cdot \vec{S}_j, \quad S^a = \frac{1}{2} \sigma^a \quad (10)$$

で

$$\begin{aligned} J^3 &= \sum_j \cdots \otimes 1 \otimes \overset{j}{S^3} \otimes 1 \otimes \cdots = \sum_j S_j^3, \\ J^\pm &= \sum_j \cdots \otimes 1 \otimes S^\pm \otimes 1 \otimes \cdots = \sum_j S_j^\pm \end{aligned} \quad (11)$$

から生成される $su(2)$ の下で不変である。これに非等方性を入れた可積分 XXZ 鎖

$$H_{XXZ} = J \sum_j \left(S_{j+1}^1 S_j^1 + S_{j+1}^2 S_j^2 + \frac{q+q^{-1}}{2} S_{j+1}^3 S_j^3 + \frac{q-q^{-1}}{4} (S_{j+1}^3 - S_j^3) \right) \quad (12)$$

ではもはや $su(2)$ の対称性はなくなっているが, 代わりに量子群 $U_q su(2)$ の下で不変になっている。 $U_q su(2)$ の生成元は (11) で与えられる J^3 及び

$$J^\pm = \sum_j \cdots \otimes q^{S^3} \otimes \overset{j}{S^\pm} \otimes q^{-S^3} \otimes \cdots \quad (13)$$

であり, J^\pm では (11) と違って加法的ではなくなっている。 $U_q su(2)$ の交換関係は

$$[J^3, J^\pm] = \pm J^\pm, \quad [J^+, J^-] = \frac{q^{2J^3} - q^{-2J^3}}{q - q^{-1}} \quad (14)$$

で, $q \rightarrow 1$ では $su(2)$ に帰着する。鎖の長さが無限に長い場合には (12) の最後の境界項は無視する事が出来, 対称性は (レベル 0 の) アフィン量子群 $U_q \widehat{su}(2)_0$ に持ち上がる [16]。 $U_q \widehat{su}(2)_k$ の定義は H_i, E_i^\pm ($i=0,1$) を Chevalley 生成元として, 関係式

$$\begin{aligned} [H_i, H_j] &= 0, \\ [H_i, E_j^\pm] &= \pm a_{ij} E_j^\pm, \quad a_{ij} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$[E_i^+, E_j^-] = \delta_{ij}[H_i], \quad [x] = \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}},$$

$$\sum_{\nu=0}^{1-a_{ij}} (-1)^\nu \begin{bmatrix} 1 - a_{ij} \\ \nu \end{bmatrix}_q (E_i^\pm)^{1-a_{ij}-\nu} E_j^\pm (E_i^\pm)^\nu = 0 \quad (15)$$

で与えられる（レベルは $k = H_0 + H_1$ ） [3]。今の場合

$$H_1 = 2J^3, \quad E_1^\pm = J^\pm,$$

$$H_0 = -2J^3, \quad E_0^\pm = z^{\pm 1} \sum_j \cdots \otimes q^{-S^3} \otimes S^\mp \otimes q^{S^3} \otimes \cdots \quad (16)$$

である（ z はスペクトルパラメーター）。

次にスピン 1 に話しを移す。Heisenberg 模型

$$H = J \sum_j \vec{S}_{j+1} \cdot \vec{S}_j, \quad S^3 = \text{diag}(1, 0, -1), \quad S^+ = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S^- = (S^+)^\dagger \quad (17)$$

には、Haldane 予想としてしられるエネルギーギャップがあり [17]、このままでは連続極限をとると励起状態が無限の質量を持ち意味の無いものになってしまう。そこで

$$H = J \sum_n \left(\vec{S}_{n+1} \cdot \vec{S}_n - b(\vec{S}_{n+1} \cdot \vec{S}_n)^2 \right) \quad (18)$$

を考えると、一般にはやはりギャップがあるが、 $b = \pm 1$ では可積分で gapless になっている [18]。今から連続極限をとろうとするのはこの $b = 1$ の場合である。この $b = 1$ のハミルトニアン H_{XXZ} に可積分性を保ったまま非等方性を入れると

$$H_{\text{XXZ}} = J \sum_n \left(\vec{S}_{n+1} \cdot \vec{S}_n - (\vec{S}_{n+1} \cdot \vec{S}_n)^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{2}(q - q^{-1})^2 (S_{n+1}^3 S_n^3 - (S_{n+1}^3 S_n^3)^2 + (S_{n+1}^3)^2 + (S_n^3)^2) \right. \\ \left. - \frac{1}{2}(q + q^{-1} - 2) \{ S_{n+1}^3 S_n^3, S_{n+1}^+ S_n^- + S_{n+1}^- S_n^+ \} + \frac{1}{2}(q^2 - q^{-2})(S_{n+1}^3 - S_n^3) \right) \quad (19)$$

となり [19, 20],

$$H_1 = \sum_j \cdots \otimes 1 \otimes 2S^3 \otimes 1 \otimes \cdots,$$

$$E_1^\pm = \sqrt{\frac{[2]}{2}} \sum_j \cdots \otimes q^{S^3} \otimes S^\pm \otimes q^{-S^3} \otimes \cdots \quad (20)$$

から生成される $U_q \mathfrak{su}(2)$ の下で不変である。鎖の長さが無限に長い場合には (19) の最後の境界項は無視する事が出来、対称性は（レベル 0 の）アフィン量子群 $U_q \widehat{\mathfrak{su}}(2)_0$ に持ち

上がる。その生成元は (20) 及び

$$H_0 = -H_1, \quad E_0^\pm = z^{\pm 1} \sqrt{\frac{[2]}{2}} \sum_j \cdots \otimes q^{-S^3} \otimes S^\mp \otimes q^{S^3} \otimes \cdots \quad (21)$$

である。

スピン鎖の連続極限に付いてであるが, Heisenberg 模型ではスピン $s \rightarrow \infty$ の極限で θ 項の付いた非線型 σ 模型になる (s が整数では $\theta = 0$, 半奇数では $\theta = \pi$) [21]。スピン $\frac{1}{2}$ の XXZ 鎖 (より正確には XYZ 鎖で XXZ 鎖に近付ける) ではパラメーターが適当な範囲にある時は連続極限は sine-Gordon 模型になる [22]。本稿ではスピン 1 の XXZ 模型の連続極限が supersymmetric sine-Gordon 模型になる事を示す。より高いスピン s の可積分 XXZ 模型のハミルトニアンは, $U_q \mathfrak{su}(2)$ のスピン s の (スペクトルパラメーター付きの) R 行列をスペクトルパラメーターで微分して得られ, その連続極限は fractional super sine-Gordon 模型になると予想している。その雰囲気は, スピン s XXZ 模型の連続極限を考えるとレベル $k = 2s$ の $\widehat{\mathfrak{su}}(2)$ カレントが現れ, そのカレントを実ボソンと \mathbf{Z}_k パラフェルミオンで実現する事により, fractional super sine-Gordon 模型が得られるという具合である。

本稿のもう一つの目標は, 無限に長い XXZ スピン鎖の対称性である $U_q \widehat{\mathfrak{su}}(2)$ と (super)sine-Gordon 模型の non-local charge のつながりを明らかにする事である。スピン鎖に於いては $U_q \widehat{\mathfrak{su}}(2)$ が対称性 (即ちハミルトニアンと可換) である事はハミルトニアンの構成法から良く理解できるのであるが, (super)sine-Gordon 模型ではラグランジアンを見ても $U_q \widehat{\mathfrak{su}}(2)$ の対称性 (non-local charge) がある事はすぐには見えず, 共形場の摂動という手続きを経てようやく分かる事である。そこでスピン鎖の連続極限が (super)sine-Gordon 模型になるのであれば, スピン鎖に於けるアフィン量子群の生成元が連続極限に於いて (super)sine-Gordon 模型の non-local charge になる事を見ておく事は有意義であろう。

スピン鎖の数理物理的側面ばかりを述べてきたが, これらのハミルトニアン (但し非等方性はない) で記述される擬一次元物質が実際に存在している。スピン $\frac{1}{2}$ では数多くあり, スピン 1 でも $CsNiCl_3$, NENP 等があり幾つかの物理量も測定されている [23]。

以下の構成は §2 でスピン $\frac{1}{2}$ の場合をレビューし, §3 でスピン 1 の XXZ 鎖の連続極限が supersymmetric sine-Gordon 模型になる事を示す。§4 でスピン $\frac{1}{2}, 1$ の XXZ スピン鎖の対称性であるアフィン量子群 $U_q \widehat{\mathfrak{su}}(2)$ の生成元が, 連続極限に於いて, sine-Gordon, supersymmetric sine-Gordon 模型の non-local charge になる事を示し, §5 で議論を与える。

2. スピン $s = \frac{1}{2}$

ハミルトニアンは (12) である。先ずスピン変数 S_j^a を振動子で表す事から始めよう。これには2通りの方法が考えられる：

1. Jordan-Wigner (one 複素フェルミオン)
2. フェルミオン双線型 (doublet 複素フェルミオン)

前者は状態に制限をつける必要がなく、後者は $SU(2)$ 対称性が見やすいという長所がある。

最初に Jordan-Wigner 変換を紹介する。これは各格子点 j に複素フェルミオン ψ_j ($\{\psi_j, \psi_{j'}^\dagger\} = \delta_{jj'}$, $\{\psi_j, \psi_{j'}\} = \{\psi_j^\dagger, \psi_{j'}^\dagger\} = 0$) を導入するものである。交換関係 $[\psi_j^\dagger, \psi_j] = 2\psi_j^\dagger\psi_j - 1$ に注意すると、 S_j^a は

$$S_j^3 = n_j - \frac{1}{2}, \quad S_j^- = \psi_j \exp(i\pi \sum_{j'>j} n_{j'}), \quad S_j^+ = S_j^{-\dagger} \quad (22)$$

と表される。ここで位相因子は違う格子点での S_j^a が可換となる様につけてあり、 $n_j = \psi_j^\dagger\psi_j$ である。各格子点 j での Fock 空間は $|0\rangle_j, \psi_j^\dagger|0\rangle_j$ (但し $\psi_j|0\rangle_j = 0$) の2次元空間であるが、これを $s = \frac{1}{2}$ の表現空間と考えるのである。

先ず $H_0 = J \sum_j (S_{j+1}^1 S_j^1 + S_{j+1}^2 S_j^2)$ を考える。これは $H_0 = \frac{1}{2} J \sum_j (\psi_{j+1}^\dagger \psi_j - \psi_{j+1} \psi_j^\dagger)$ と書き直され、連続極限 ($\frac{1}{\sqrt{a}}\psi_j \rightarrow \psi(x)$, $x = aj$) を考えて運動量表示に移ると分散関係は $E \sim \cos k$ である。この理論の基底状態はフェルミ面 (1次元空間なのでフェルミ点、 $k_F = \frac{\pi}{2a}$) までフェルミオンが詰まった状態で、我々はこのフェルミ点のまわりの励起に興味がある。運動量 $k \sim \pm k_F$ の様子を見たいので、 $\frac{1}{\sqrt{a}}\psi_j$ を $\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{ik_F x} \psi_+(x) + e^{-ik_F x} \psi_-(x))$ と置き換えて、ゆっくり変化する場 $\psi_\pm(x)$ の低エネルギー有効場の理論を導く事を行う。今述べた事は普通の場合の理論の言葉で言えば Dirac sea を考えろという事である。

Jordan-Wigner に付いては方針と結果だけを簡単に述べておく。先ず H_0 から2次元の massless 自由フェルミオンが得られ、ボソン化する事により massless 自由ボソンが得られる。ハミルトニアンからラグランジアンに移るには通常の手続き

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} i (\psi_+^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_0 \psi_+ + \psi_-^\dagger \overleftrightarrow{\partial}_0 \psi_-) - \mathcal{H} \quad (23)$$

に従えば良い。 $\psi_\pm(x)$ は右 (左) 進行フェルミオン $\psi_\pm(x^\pm)$ になる ($x^\pm = x^0 \mp x^1 = t \mp x$)。次に $\sum_j S_{j+1}^3 S_j^3$ を摂動として加えていくと、フェルミオンの free term と4乗項 (この項はナイーブには0である) が得られ、ボソン化するとボソンの free term と cos 項にな

る。これによりボソンの規格化がずれてしまったので rescale する必要が生じ、結局一般の β を持つ sine-Gordon 模型のラグランジアンが得られる³。

次にフェルミオン双線型を紹介する。各格子点 j に doublet の複素フェルミオン ψ_j^α ($\alpha = 1, 2$) ($\{\psi_j^\alpha, \psi_{j'}^{\beta\dagger}\} = \delta_{jj'}\delta^{\alpha\beta}$, その他 = 0) を導入する。 S_j^a は

$$S_j^a = \frac{1}{2}\psi_j^{\alpha\dagger}\sigma_{\alpha\beta}^a\psi_j^\beta \quad (24)$$

と表される。各格子点 j での Fock 空間は $|0\rangle_j, \psi_j^{1\dagger}|0\rangle_j, \psi_j^{2\dagger}|0\rangle_j, \psi_j^{1\dagger}\psi_j^{2\dagger}|0\rangle_j$ (但し $\psi_j^\alpha|0\rangle_j = 0$) の 4次元空間であるが、 $SU(2)$ で分解すると $0 \oplus \frac{1}{2} \oplus 0$ である。今はスピン $\frac{1}{2}$ を考えたのであるから Fock 空間を $s = \frac{1}{2}$ の表現空間に制限する必要がある。その状態は

$$\vec{S}_j^2|*\rangle^L = \frac{3}{4}|*\rangle^L, \quad \text{又は同値な条件として} \quad \psi_j^{\alpha\dagger}\psi_j^\alpha|*\rangle^L = |*\rangle^L \quad (25)$$

で特徴づけられる。この条件の第 2 式は各格子点にフェルミオンが半分いるという事であるが、Hubbard 模型の考察から [21], 運動量空間でフェルミオンが下から半分まで詰まっている事が分かっている。そこで Jordan-Wigner の時と同様にフェルミ点のまわりの低エネルギー有効場の理論を導く為に $\frac{1}{\sqrt{a}}\psi_j^\alpha$ を $\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{ik_F x}\psi_+^\alpha(x) + e^{-ik_F x}\psi_-^\alpha(x))$ で置き換える事にする。実際にはより厳密性を期す為に、(格子上で自由度を保つ様に) 偶数番目の格子点と奇数番目の格子点を組にして

$$\psi_{2\ell}^\alpha = (-1)^\ell \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{+, \ell}^\alpha + \psi_{-, \ell}^\alpha), \quad \psi_{2\ell-1}^{\alpha f} = (-1)^\ell \frac{1}{\sqrt{2i}}(\psi_{+, \ell}^\alpha - \psi_{-, \ell}^\alpha) \quad (26)$$

と置き換える。ここで速く振動する項 $(-1)^\ell$ は $\exp(\pm ik_F a 2\ell)$, $\exp(\pm ik_F a (2\ell - 1))$ から来ている。 $\psi_{\pm, \ell}^\alpha$ は通常の反交換関係 ($\{\psi_{\pm, \ell}^\alpha, \psi_{\pm, \ell'}^{\beta\dagger}\} = \delta_{\ell\ell'}\delta^{\alpha\beta}$, その他 = 0) を満たしている。 S_j^a は

$$S_{2\ell}^a = \frac{1}{2}(J_\ell^a + G_\ell^a), \quad S_{2\ell-1}^a = \frac{1}{2}(J_\ell^a - G_\ell^a), \quad (27)$$

と表される。ここで $J_{\pm, \ell}^a, G_\ell^a$ は

$$J_{\pm, \ell}^a = \frac{1}{2}\psi_{\pm, \ell}^{\alpha\dagger}\sigma_{\alpha\beta}^a\psi_{\pm, \ell}^\beta, \quad J_\ell^a = J_{+, \ell}^a + J_{-, \ell}^a, \quad G_\ell^a = \frac{1}{2}(\psi_{+, \ell}^{\alpha\dagger}\sigma_{\alpha\beta}^a\psi_{-, \ell}^\beta + \psi_{-, \ell}^{\alpha\dagger}\sigma_{\alpha\beta}^a\psi_{+, \ell}^\beta) \quad (28)$$

である。

格子間隔 a を $a \rightarrow 0$ にする事によりこの模型の連続極限を考えよう。空間座標は $x = 2a\ell$ で (格子 ℓ では格子間隔は $2a$ になっている), 和は積分になる $2a \sum_\ell \rightarrow \int dx$ 。これからハミルトニアンを計算していくのであるが, どの段階で $a \rightarrow 0$ の極限をとるか

³ この計算は例えば [21, 24] に紹介されているが, 厳密性の観点からは不満足なものである。しかしながら正しい結果 [22] の本質的な部分を比較的簡単な計算で得る事ができる点に魅力がある。本稿の計算もこれと同様である。

(言い換えるとどこまで厳密に量子論の計算を行えるか) によって得られる答は微妙に違ってくるであろう。ここでは比較的早い段階で $a \rightarrow 0$ の極限をとった計算を紹介する。我々はこの他にも出来るだけ格子で計算しておいて最後に $a \rightarrow 0$ とする計算も行って見たが、正則化に依存すると思われる係数のずれを除いてほぼ同じ結果が得られた。

連続極限に移行するため $\frac{1}{\sqrt{2a}}\psi_{\pm,\ell}^\alpha \rightarrow \psi_\pm^\alpha(x)$ として、自由場の伝播関数 $\langle \psi_\pm^{\alpha\dagger}(x)\psi_\pm^\beta(y) \rangle = \delta^{\alpha\beta}(\mp 2\pi i)^{-1}(x-y \pm i\epsilon)^{-1}$ を用いる。格子でのスピン $\frac{1}{2}$ 状態と真空が素直に連続理論の状態に移行すると仮定する: $|*\rangle^L \rightarrow |*\rangle^{FT}, |0\rangle^{HF} \rightarrow |0\rangle^{FT}$ (L, FT, HF はそれぞれ格子, 場の理論, half filling を意味する)。フェルミオンの正規順序積はこの $|0\rangle^{FT}$ に対して行う。カレントは

$$\frac{1}{2a}J_{\pm,\ell}^a \rightarrow J_\pm^a(x) = \frac{1}{2}(\psi_\pm^{\alpha\dagger}\sigma_{\alpha\beta}^a\psi_\pm^\beta)(x), \quad (29)$$

$$\frac{1}{2a}G_\ell^a \rightarrow G^a(x) = \frac{1}{2}(\psi_+^{\alpha\dagger}\sigma_{\alpha\beta}^a\psi_-^\beta + \psi_-^{\alpha\dagger}\sigma_{\alpha\beta}^a\psi_+^\beta)(x) \quad (30)$$

となり, これらの演算子積展開 (OPE) は Wick の定理を用いて容易に計算される。例えば

$$J_\pm^a(x)J_\pm^b(0) = (\mp 2\pi i x)^{-2}s\delta^{ab} + (\mp 2\pi i x)^{-1}i\epsilon^{abc}J_\pm^c(0) + (J_\pm^aJ_\pm^b)(0) + \dots, \quad (31)$$

$$J_\pm^a(x)G^b(0) = (\mp 2\pi i x)^{-1}(\pm \frac{1}{4}\delta^{ab}F(0) + \frac{1}{2}i\epsilon^{abc}G_\pm^c(0)) + (J_\pm^aG^b)(0) + \dots \quad (32)$$

で, ここで $F(x) = (\psi_+^{\alpha\dagger}\psi_-^\alpha - \psi_-^{\alpha\dagger}\psi_+^\alpha)(x)$ であり, J_\pm^a はレベル $k = 2s = 1$ の $\widehat{su}(2)$ カレントである。スピン $\frac{1}{2}$ の状態に制限する条件 (25) は

$$(\vec{J}^2 + \vec{G}^2)(x)|*\rangle^{FT} = 0, \quad (\vec{J} \cdot \vec{G} + \vec{G} \cdot \vec{J})(x)|*\rangle^{FT} = 0 \quad (33)$$

となる [2]。ここで $(AB)(x)$ は OPE の regular part として定義される正規順序積である。

等方的な場合 (10) を先ず考える。OPE を用いて

$$H_{XXX} = 2aJ \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{2}(\vec{J}^2 - \vec{G}^2)(x) \quad (34)$$

となる。(33) を用いれば

$$\begin{aligned} H_{XXX} &= 2aJ \int_{-\infty}^{\infty} dx \vec{J}^2(x) \\ &= 2aJ \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{\pi}{2}(\vec{J}_+^2 + \vec{J}_-^2)(x) + \pi(\vec{J}_+ \cdot \vec{J}_-)(x) \right) \end{aligned} \quad (35)$$

となる。これはレベル $k = 1$ の $SU(2)$ WZW 模型にカレントカレントの摂動を加えたもので, $\beta = \sqrt{8\pi}$ の sine-Gordon 模型である。より見慣れた形にもって行くにはカレントをボソン化すれば良い。レベル 1 の $\widehat{su}(2)$ カレントは実ボソン 1 つで実現できる:

$$J_\pm^3(x^\pm) = \pm \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\partial_\pm\phi_\pm(x^\pm), \quad J_\pm^+(x^\pm) = \frac{\mu}{2\pi}e^{\pm i\sqrt{8\pi}\phi_\pm(x^\pm)}, \quad J_\pm^- = (J_\pm^+)^\dagger. \quad (36)$$

ここでボソンの伝播関数は $\langle \phi_{\pm}(x^{\pm})\phi_{\pm}(0) \rangle = -\frac{1}{4\pi} \log(i\mu x^{\pm})$ であり、 $::$ は省略した。 H_{XXX} から得られるラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi + \lambda \cos \beta \phi \quad (37)$$

となり ($\beta = \sqrt{8\pi}$, $\lambda = -2(\frac{\mu}{2\pi})^2$), これは sine-Gordon 模型のラグランジアンである。

$\beta < \sqrt{8\pi}$ を得るには非等方性を入れる必要がある。上と同様な計算により

$$J \sum_j S_{j+1}^3 S_j^3 = 2aJ \int dx \frac{1}{2} (J^3 J^3 - G^3 G^3)(x) \quad (38)$$

である。やはり ($G^3 G^3$) の項を消去する為に (25) を用いる。今度は (25) の第 2 式を少し詳しく調べる必要がある。その為にはフェルミオンをボソン化してやると良い。その結果、($G^3 G^3$) を (36) のボソンを用いて free term と $\cos(\sqrt{8\pi}\phi)$ 項の和として表す事が出来る。 $J^3 J^3$ は ϕ の free term を与える。この結果、 H_{XXZ} ではボソンの規格化がずれるので $\phi \rightarrow \frac{\beta}{\sqrt{8\pi}} \phi$ とする必要が生じ⁴, 結局 (37) の一般の β を持つ sine-Gordon 模型になる。

3. スピン $s = 1$

ハミルトニアンは (19) である。スピン変数 S_j^a を振動子で表す方法としては次の 3 通りが考えられる：

1. “Jordan-Wigner”? (one “パラフェルミオン”?)
2. フェルミオン双線型 (triplet 実フェルミオン)
3. フェルミオン双線型 (two doublet 複素フェルミオン)

最初の “Jordan-Wigner” に付いてであるが、これは各格子点 j にその Fock 空間の次元が 3 次元である様なパラフェルミオン ψ_j を導入し、その Fock 空間全体を $s = 1$ の表現空間と考えようというのである。つまり各格子点 j での Fock 空間が $|0\rangle_j, \psi_j^{\dagger}|0\rangle_j, \psi_j^{\dagger 2}|0\rangle_j$ (但し $\psi_j|0\rangle_j = 0, \psi_j^{\dagger 3}|0\rangle_j = 0$) となっているものである [25]。この場合には (42) の様な拘束条件を課す必要がない利点があるがまだ研究が行われていない。

次にフェルミオン双線型 (triplet 実フェルミオン [26])⁵ を考えてみよう。各格子点 j に triplet の実フェルミオン ψ_j^a ($a = 1, 2, 3$) ($\{\psi_j^a, \psi_j^b\} = \delta_{jj'} \delta^{ab}$) を導入する。 S_j^a は

$$S_j^a = -\frac{1}{2} i \epsilon^{abc} \psi_j^b \psi_j^c \quad (39)$$

⁴ q と β の関係がここで (恐らく摂動論の範囲内で) 決まるのであるが、厳密解 [22, 21] との一致が余り良くなく計算ミスの可能性があるのでここでは書かない事にする。

⁵ triplet 複素フェルミオンを用いると $\widehat{su}(2)$ カレントのレベルが 2 ではなく 4 になってしまう。

と表される。 S_j^a は ψ_j^a に対して随伴作用によりスピン 1 で作用している：

$$[S_j^a, \psi_{j'}^b] = \delta_{jj'} i \epsilon^{abc} \psi_{j'}^c, \quad [S_j^a, [S_j^a, \psi_{j'}^b]] = \delta_{jj'} 2 \psi_{j'}^b. \quad (40)$$

しかし実フェルミオンである為粒子描像がはっきりしない。つまり複素フェルミオンの時と違って、 $S_j^a |0\rangle_j = 0$ で $\psi_j^a |0\rangle_j \neq 0$ となる $|0\rangle_j$ が存在しないのである。実際随伴作用の積 $[S_j^a, [S_j^a, \cdot]]$ ではなく単なる積をとると $S_j^a S_j^a = \frac{3}{4}$ (つまりスピン $\frac{1}{2}$) となっている。この為この方法は本当にスピン 1 を扱っているかどうかよく分からない。もしもこの点をうまく正当化する事が出来たなら、連続極限をとる計算は次の第 3 の方法よりずっと簡単である。何故なら序論で述べた様に実フェルミオン 3 つならもうこれ以上自由度を消去する必要がないからである。 S_j^a を (27) (但し $J_{\pm, \ell}^a = -\frac{1}{2} i \epsilon^{abc} \psi_{\pm, \ell}^b \psi_{\pm, \ell}^c$, $G_\ell^a = -i \epsilon^{abc} \psi_{+, \ell}^b \psi_{-, \ell}^c$) と表す。 $a \rightarrow 0$ を考えると J_\pm^a はレベル 2 の $\widehat{su}(2)$ カレントになりハミルトニアンは

$$H_{XXZ} = 2aJ \int_{-\infty}^{\infty} dx (A \vec{J}^2 + B J^3 J^3)(x) \quad (41)$$

となるので supersymmetric sine-Gordon 模型を得る。

さて本題の第 3 の方法に移ろう。より一般にスピン s を表す為には $2s$ 個の doublet 複素フェルミオン $\psi_j^{\alpha f}$ ($\alpha = 1, 2, f = 1, 2, \dots, 2s$) を各格子点 j に導入すればよい [2]。各格子点 j での Fock 空間は $|0\rangle_j, \psi_j^{\alpha f \dagger} |0\rangle_j, \psi_j^{\alpha f \dagger} \psi_j^{\beta g \dagger} |0\rangle_j, \dots, \Pi_\alpha \Pi_f \psi_j^{\alpha f \dagger} |0\rangle_j$ (但し $\psi_j^{\alpha f} |0\rangle_j = 0$) の 2^{4s} 次元空間であるが、 $SU(2)$ で分解すると $\frac{1}{2}^{\otimes 2s} = s \oplus + \dots$ である。今はスピン s を考えたいのであるから Fock 空間をスピン s の表現空間に制限する必要がある。スピン s の表現空間は最高ウェイト状態 $\Pi_f \psi_j^{1 f \dagger} |0\rangle_j$ に S_j^- を掛けて得られるが、その状態は

$$\vec{S}_j^2 |*\rangle^L = s(s+1) |*\rangle^L, \quad \text{又は同値な条件として } \psi_j^{\alpha f \dagger} \psi_j^{\alpha g} |*\rangle^L = \delta^{fg} |*\rangle^L \quad (42)$$

で特徴づけられる。この条件の第 2 式は各格子点にフェルミオンが半分いるという事であるが、 $s = \frac{1}{2}$ の時の拡張として多重バンド Hubbard 模型の考察により [21]、運動量空間でフェルミオンが下から半分まで詰まっている事が期待される。そこで $s = \frac{1}{2}$ の時と同様に $\psi_j^{\alpha f}$ を (26) の様書き換える (添字 f がつくだけ)。 S_j^a は (27) となり、 J_\pm^a, G^a は (28) で添字 f を付ければよい。

連続極限に移行するため $\frac{1}{\sqrt{2a}} \psi_{\pm, \ell}^{\alpha f} \rightarrow \psi_{\pm}^{\alpha f}(x)$ として、自由場の伝播関数 $\langle \psi_{\pm}^{\alpha f \dagger}(x) \psi_{\pm}^{\beta g}(y) \rangle = \delta^{\alpha\beta} \delta^{fg} (\mp 2\pi i)^{-1} (x - y \pm i\epsilon)^{-1}$ を用いる。 $J_\pm^a(x), G^a(x)$ は (29)(30) と同様 (添字 f が付くだけ) で、OPE は (31)(32) 等で $F(x) = (\psi_+^{\alpha f \dagger} \psi_-^{\alpha f} - \psi_-^{\alpha f \dagger} \psi_+^{\alpha f})(x)$ である。 J_\pm^a はレベル $k = 2s = 2$ の $\widehat{su}(2)$ カレントである。スピン 1 の状態に制限する条件 (42) は (33) となる [2]。

等方的な場合 $H_{XXX} = J \sum_j (\vec{S}_{j+1} \cdot \vec{S}_j - (\vec{S}_{j+1} \cdot \vec{S}_j)^2)$ を先ず考えよう。この式を $H_{XXX} = J \sum_j (\frac{3}{2} \vec{S}_{j+1} \cdot \vec{S}_j - \frac{1}{4} \{S_{n+1}^a, S_{n+1}^b\} \{S_n^a, S_n^b\})$ と書き直しておく。Heisenberg 項は $s = \frac{1}{2}$ と

同様に

$$J \sum_j \vec{S}_{j+1} \cdot \vec{S}_j = 2aJ \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{2} (\vec{J}^2 - \vec{G}^2)(x) \quad (43)$$

となる。\$S^a\$ の 4 乗項は例えば

$$\begin{aligned} & (2a)^{-2} \frac{1}{4} \{S_{2\ell+1}^a, S_{2\ell+1}^b\} \{S_{2\ell}^a, S_{2\ell}^b\} \\ & \rightarrow (2a)^2 \frac{1}{16} \left(\frac{1}{(\pi\epsilon)^2} \delta^{ab} + (J^a J^b + G^a G^b)(x+2a) - (J^a G^b + G^a J^b)(x+2a) \right) \\ & \quad \times \left(\frac{1}{(\pi\epsilon)^2} \delta^{ab} + (J^a J^b + G^a G^b)(x) + (J^a G^b + G^a J^b)(x) \right) \end{aligned} \quad (44)$$

という式を OPE を使って展開して \$a\$ の最低次を拾えばよい。結局

$$\begin{aligned} H_{XXX} = 2aJ \int_{-\infty}^{\infty} dx & \left(\frac{3}{2} \frac{1}{2} (\vec{J}^2 - \vec{G}^2) + \frac{1}{(2\pi)^2} (\frac{1}{2} (\vec{J}^2 - \vec{G}^2) + \frac{1}{2} (\vec{K}^2) + \frac{3}{4} (F^2)) \right. \\ & \left. - (\frac{a}{\pi\epsilon})^2 \frac{1}{2} (\vec{J}^2 + \vec{G}^2) + \frac{1}{2a} \frac{15i}{32\pi^3} F \right) \end{aligned} \quad (45)$$

となる⁶。ここで \$\vec{K} = \vec{J}_+ - \vec{J}_-\$ である。

\$\psi_j\$ から \$\psi_{\pm, \ell}\$ に移る時に \$2\ell\$ と \$2\ell - 1\$ を組にした為格子 1 つ分の並進不変性を見えなくしたのであるが、そのしわ寄せが発散項 \$\frac{1}{2a} F\$ に現れたと考えてこの項を無視する事にする。\$\vec{G}^2\$ は (33) により \$J^a\$ で書き表す事ができるが \$F^2\$ はどうであろうか。その為に \$G^a(x^+, x^-)\$, \$F(x^+, x^-)\$ の \$J_{\pm}^a\$ (\$\widehat{su}(2)_2 \times \widehat{su}(2)_2\$) の下での変換性をみてみると、\$G^a\$, \$F\$ はスピン \$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\$ の多重項をなしており、\$(\vec{G}^2 - \frac{1}{4} F^2)\$ はスピン \$(0, 0)\$ の一重項になっている事が分かる。よって \$(F^2 - 4\vec{G}^2)(x) = 0\$ とおく事にする。(33) を用いると結局

$$H = 2aJ \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(A(\vec{J}_+^2 + \vec{J}_-^2)(x) + 2B(\vec{J}_+ \cdot \vec{J}_-)(x) \right), \quad (46)$$

$$A = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{(2\pi)^2} \right), \quad B = \frac{1}{2} \left(3 - \frac{5}{(2\pi)^2} \right) \quad (47)$$

になる。これはレベル \$k=2\$ の \$SU(2)\$ WZW 模型にカレントカレントの摂動を加えたもので、\$\beta = \sqrt{4\pi}\$ の supersymmetric sine-Gordon 模型である。より見慣れた形にもって行くにはカレントをボソン化すれば良い。レベル 2 の \$\widehat{su}(2)\$ カレントは実ボソン 1 つと実フェルミオン 1 つ (\$\mathbf{Z}_2\$ パラフェルミオン) とで実現できる：

$$J_{\pm}^3(x^{\pm}) = \pm \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_{\pm} \phi_{\pm}(x^{\pm}), \quad J_{\pm}^{\pm}(x^{\pm}) = \psi_{\pm}(x^{\pm}) \sqrt{\frac{\mu}{\pi}} e^{\pm i\sqrt{4\pi}\phi_{\pm}(x^{\pm})}, \quad J_{\pm}^{-} = (J_{\pm}^{+})^{\dagger}. \quad (48)$$

ボソン及びフェルミオンの伝播関数は \$\langle \phi_{\pm}(x^{\pm}) \phi_{\pm}(0) \rangle = -\frac{1}{4\pi} \log(i\mu x^{\pm})\$, \$\langle \psi_{\pm}(x^{\pm}) \psi_{\pm}(0) \rangle = (2\pi i x^{\pm})^{-1}\$ である。: : 及び “cocycle factor” は省略した。恒等式 (7) を用いると \$H_{XXX}\$ から得られるラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi + \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^{\mu} \partial_{\mu} \psi + \frac{1}{4} \lambda \beta^2 \bar{\psi} \psi \cos \beta \phi + \frac{1}{8} \lambda^2 \beta^2 \cos^2 \beta \phi \quad (49)$$

⁶ 連続理論を定義する際にどの様な正則化を採用したかによって係数は変わり得る。

となり ($\beta = \sqrt{4\pi}$, $\lambda = \frac{\mu B}{2\pi A}$, $\psi = {}^t(\psi_+, \psi_-)$), これは supersymmetric sine-Gordon 模型のラグランジアンである。

$\beta < \sqrt{4\pi}$ を得るには非等方性を入れる必要がある。上と同様な計算を行うと ($G^3 G^3$) の項が現れる。やはり ($G^3 G^3$) の項を消去する為に (42) を用いるのであるが, $s = \frac{1}{2}$ の時よりも消去すべき自由度が多い為まだ完全に解ききっていない。しかし ($G^3 G^3$) を (48) のボソンとフェルミオンを用いて free term と $\bar{\psi}\psi \cos(\sqrt{4\pi}\phi)$ 項の和として表す事が出来ると予想している。 $J^3 J^3$ は ϕ の free term を与える。この結果, H_{XXZ} ではボソンの規格化がずれるので $\phi \rightarrow \frac{\beta}{\sqrt{4\pi}}\phi$ とする必要が生じ, 結局 (49) の一般の β を持つ supersymmetric sine-Gordon 模型になる。 q と β の関係はこの段階で決まるはずである。

4. 量子群の生成元と non-local charge

スピン $s = \frac{1}{2}, 1$ の H_{XXZ} (12)(19) は

$$\begin{aligned} q^{H_1} &= q^{2\sum_j S_j^3}, & E_1^\pm &= \sqrt{\frac{[2s]}{2s}} \sum_j q^{\sum_{j'>j} S_{j'}^3} S_j^\pm q^{-\sum_{j'<j} S_{j'}^3}, \\ q^{H_0} &= q^{-2\sum_j S_j^3}, & E_0^\pm &= z^{\pm 1} \sqrt{\frac{[2s]}{2s}} \sum_j q^{-\sum_{j'>j} S_{j'}^3} S_j^\mp q^{\sum_{j'<j} S_{j'}^3} \end{aligned} \quad (50)$$

で生成される $U_q \widehat{su}(2)_0$ で不変であった。§2, §3 で調べた $2s$ ($s = \frac{1}{2}, 1$) 個の doublet 複素フェルミオンを用いた連続極限において $U_q \widehat{su}(2)$ の生成元がどうなるかを調べてみよう。(27) を用いると $U_q \widehat{su}(2)$ の生成元は

$$\begin{aligned} q^{H_1} &= q^{2\sum_\ell J_\ell^3}, & E_1^\pm &= \sqrt{\frac{[2s]}{2s}} \sum_\ell q^{\sum_{\ell'>\ell} J_{\ell'}^3} \left(S_{2\ell}^\pm q^{-S_{2\ell-1}^3} + q^{S_{2\ell}^3} S_{2\ell-1}^\pm \right) q^{-\sum_{\ell'<\ell} J_{\ell'}^3}, \\ q^{H_0} &= q^{-2\sum_\ell J_\ell^3}, & E_0^\pm &= z^{\pm 1} \sqrt{\frac{[2s]}{2s}} \sum_\ell q^{-\sum_{\ell'>\ell} J_{\ell'}^3} \left(S_{2\ell}^\mp q^{S_{2\ell-1}^3} + q^{S_{-2\ell}^3} S_{2\ell-1}^\mp \right) q^{\sum_{\ell'<\ell} J_{\ell'}^3} \end{aligned} \quad (51)$$

と書き表される。この式ではまだ何も近似を行っていない。 $a \rightarrow 0$ を考えるとこれらは

$$\begin{aligned} q^{H_1} &= q^{2\int dx J^3(x)}, & E_1^\pm &= \sqrt{\frac{[2s]}{2s}} \int_{-\infty}^{\infty} dx q^{\int_x^{\infty} dx' J^3(x')} J^\pm(x) q^{-\int_{-\infty}^x dx' J^3(x')}, \\ q^{H_0} &= q^{-2\int dx J^3(x)}, & E_0^\pm &= z^{\pm 1} \sqrt{\frac{[2s]}{2s}} \int_{-\infty}^{\infty} dx q^{-\int_x^{\infty} dx' J^3(x')} J^\mp(x) q^{\int_{-\infty}^x dx' J^3(x')} \end{aligned} \quad (52)$$

の様に J_\pm^a だけで書き表される。 J_\pm^a をボソン化して, 更にボソンを rescale して (super) sine-Gordon 模型を得たわけだが, カイラルボソンがこの rescale でどう置き換えられるかを見ておこう。カイラルボソン ϕ_\pm は ϕ とその正準共役運動量 $\pi = \partial_0 \phi$ を使って $\phi_\pm(t, x) = \frac{1}{2} \left(\phi(t, x) \mp \int_{-\infty}^x dx' \pi(t, x') \right)$ と表される。 $\phi \rightarrow \sqrt{\frac{s}{4\pi}} \beta \phi$ なる rescale の下で正準共役運動量は $\pi \rightarrow \sqrt{\frac{4\pi}{s}} \frac{1}{\beta} \pi$ と rescale されねばならないので, ϕ_\pm は $\phi_\pm \rightarrow \sqrt{\frac{s}{4\pi}} \beta \frac{1}{2} \left(\phi(t, x) \mp \int_{-\infty}^x dx' \pi(t, x') \right)$

$\frac{4\pi}{s\beta^2} \int_{-\infty}^x dx' \pi(t, x')$ と置き換えられる。よって量子群の生成元は、 $s = \frac{1}{2}$ の場合には sine-Gordon 模型に現れる場を用いて

$$\begin{aligned} q^{H_1} &= q^{-\frac{\beta}{2\pi}(\phi(\infty)-\phi(-\infty))}, \quad q = e^{i\frac{8\pi^2}{\beta^2}-i\pi}, \\ E_1^+ &= \frac{\mu}{2\pi} q^{-\frac{\beta}{4\pi}(\phi(\infty)+\phi(-\infty))} \int_{-\infty}^{\infty} dx (e^{i\frac{8\pi}{\beta}\phi_+} + e^{i\frac{8\pi}{\beta}\phi_+ - i\beta\phi}), \end{aligned} \quad (53)$$

$s = 1$ の場合には supersymmetric sine-Gordon 模型に現れる場を用いて

$$\begin{aligned} q^{H_1} &= q^{-\frac{\beta}{\pi}(\phi(\infty)-\phi(-\infty))}, \quad q = e^{i\frac{2\pi^2}{\beta^2}-i\frac{\pi}{2}}, \\ E_1^+ &= \sqrt{\frac{[2]}{2}} \sqrt{\frac{\mu}{\pi}} q^{-\frac{\beta}{2\pi}(\phi(\infty)+\phi(-\infty))} \int_{-\infty}^{\infty} dx (\psi_+ e^{i\frac{4\pi}{\beta}\phi_+} + \psi_- e^{i\frac{4\pi}{\beta}\phi_+ - i\beta\phi}) \end{aligned} \quad (54)$$

の様に表される（他の生成元についても同様）。この表式は若干の数因子を除いて sine-Gordon 及び supersymmetric sine-Gordon 模型の non-local charge の式 [8, 10] と一致している。

5. 議論

スピン 1 の XXZ 鎖が連続極限で supersymmetric sine-Gordon 模型になる事を示した訳だが、§2 の脚注で述べた様にこの導出は厳密なものではない。しかし、無限に長いスピン鎖の対称性であるアフィン量子群の生成元と、(super)sine-Gordon 模型の重要な対称性である non-local charge との関係が得られたのであるから、この結論は正しいと考えられる。より厳密に示すには $s = \frac{1}{2}$ XXZ 鎖と sine-Gordon 模型との関係を示した時と同様に [22], Bethe 仮設の結果を用いるなどして最初のハミルトニアンが可積分であったという情報を用いる必要がある。これに付いては現在研究中である。

連続極限を導く本稿の方法は他の可積分スピン鎖にも適用できるであろう。例えば式 (18) で $b = -1$ の場合は $su(3)$ の対称性がある [27]。この場合の連続極限は $SU(3)$ のアフィン戸田場理論になると予想している。他にも高いスピンの $su(2)$ の XXZ 鎖の場合は序論で述べた様に fractional super sine-Gordon 模型に、高いランクの場合にはそのリー代数の戸田場理論になるのではないかと考えられるが、これらは今後の課題である。又 $su(2)$ のスピン 1 表現と $osp(1|2)$ の 3 次元表現は非常に関係しているので、 $osp(1|2)$ スピン鎖 [28] に付いても考えてみたい。

参考文献

- [1] T. Inami and S. Odake, “Continuum Limit of Spin-1 Chain”, preprint YITP/K-987 (hep-th/9209019).
- [2] I. Affleck, Phys. Rev. Lett. **55** (1985) 1355; Nucl. Phys. **B265** (1986) 409.
- [3] M. Jimbo, Lett. Math. Phys. **10** (1985) 63; V.G. Drinfeld, Sov. Math. Dokl. **32** (1985) 254.
- [4] V. Pasquier and H. Saleur, Nucl. Phys. **B330** (1990) 523.
- [5] A.B. Zamolodchikov, in Advanced Studies in Pure Mathematics 19.
- [6] T. Eguchi and S.-K. Yang, Phys. Lett. **B224** (1989) 373; **B235** (1990) 282.
- [7] S. Coleman Phys. Rev. **D11** (1975) 2088; S. Mandelstam Phys. Rev. **D11** (1975) 3026; T.R. Klassen and E. Melzer, preprint, CLNS-92/1149 (ITP-SB-92-36, hep-th/9206114).
- [8] D. Bernard and A. LeClair, Comm. Math. Phys. **142** (1991) 99.
- [9] R. Shankar and E. Witten, Phys. Rev. **D17** (1978) 2134; Nucl. Phys. **B141** (1978) 525.
- [10] K. Kobayashi and T. Uematsu, preprint, KUCP-29/91.
- [11] S. Coleman and J. Mandula, Phys. Rev. **159** (1967) 1251.
- [12] R. Haag, J.T. Lopuszanski and M. Sohnius, Nucl. Phys. **B88** (1975) 257.
- [13] E. Witten, Nucl. Phys. **B142** (1975) 285.
- [14] C. Ahn, D. Bernard and A. LeClair, Nucl. Phys. **B346** (1990) 409.
- [15] D. Bernard and A. LeClair, Phys. Lett. **B247** (1990) 309; S. Mizoguchi and T. Nakatsu, Phys. Lett. **B276** (1992) 72.
- [16] B. Davies, O. Foda, M. Jimbo, T. Miwa and A. Nakayashiki, preprint, RIMS-873; M. Jimbo, K. Miki, T. Miwa and A. Nakayashiki, preprint, RIMS-877.
- [17] F.D.M. Haldane, Phys. Lett. **93A** (1983) 464.

- [18] P. Kulish and E. Sklyanin, Lecture Note in Physics **151** (1982) 61; L.A. Takhtajan, Phys. Lett. **87A** (1982) 479; J. Babudjian, Phys. Lett. **90A** (1982) 479.
- [19] A. Zamolodchikov and V.A. Fateev, Sov. J. Nucl. Phys. **32** (1981) 298.
- [20] P. Di Francesco, H. Saleur and J.B. Zuber, Nucl. Phys. **B300** (1988) 393; M.T. Batchelor, L. Mezincescu, R.I. Nepomechie and V. Rittenberg, J. Phys. **A23** (1990) L141; L. Mezincescu, R.I. Nepomechie and V. Rittenberg, Phys. Lett. **A147** (1990) 70.
- [21] I. Affleck, in “Fields, Strings and Critical Phenomena”, Elsevier Sci. Publ., 1989.
- [22] A. Luther, Phys. Rev. **B14** (1976) 2153; M. Lüscher, Nucl. Phys. **B117** (1976) 475; M.P.M. den Nijs, Phys. Rev. **B23** (1981) 6111.
- [23] J.P. Renard, L.P. Regnault and M. Verdaguer, J. Physique Coll. **49**, C8 (1988) 1425.
- [24] E. Fradkin, “Field Theories of Condensed Matter Systems”, Addison-Wesley, 1991.
- [25] 高橋 康, “物性研究者のための場の量子論 I”, 培風館.
- [26] A.M. Tsvetlik, Phys. Rev. **B42** (1990) 10499.
- [27] B. Sutherland, Phys. Rev. **B12** (1975) 3795.
- [28] P.P. Kulish and N.Yu. Reshetikhin, Lett. Math. Phys. **18** (1989) 143; H. Saleur, Nucl. Phys. **B336** (1990) 363.