

場の理論的方法によるスピン鎖¹

信州大教養 小竹 悟

この講演では、スピン鎖の基底状態からの低エネルギー励起を、連続極限（格子間隔 $\rightarrow 0$ ）をとった（有効）場の理論によって記述する事を考察する。特にスピン $\frac{1}{2}$ 及び 1 の可積分 XXZ (XYZ) スピン鎖の連続極限がそれぞれ sine-Gordon 及び supersymmetric sine-Gordon 模型になる事を示す。主にスピン $\frac{1}{2}$ の場合を紹介するが、スピン 1 の場合も同様である。又、量子代数 $U_qsu(2)$ 、アフィン量子代数 $U_q\hat{su}(2)$ についても触れる。

1. 序論

一次元量子スピン鎖は強相関電子系の模型として、又、特別なハミルトニアンの場合には可解模型として多くの人々によって調べられてきた。スピン鎖を解析する方法の一つとして場の理論を用いる方法がある。それはスピン鎖の基底状態からの低エネルギー励起を、格子間隔を零にする事（連続極限）により得られる（有効）場の理論で記述するというものである。よく知られた例として、

1. スピン s の反強磁性の Heisenberg 模型 $H = \sum_j \vec{S}_{j+1} \cdot \vec{S}_j$ の large s 極限が、 θ 項 ($\theta = 2\pi s$) の付いた $O(3)$ 非線型シグマ模型で記述される。
2. スピン $\frac{1}{2}$ XXZ (XYZ) 鎖の（適当なパラメーター領域での）連続極限が sine-Gordon 模型になる。

などがある。2. については、Baxter による 8 頂点模型の解析から得られる XYZ 鎖の厳密解に基づいて、Luther 達によってかなり厳密に示されている [2]。

我々がこれから考察するのは、スピン s （特に $s = \frac{1}{2}, 1$ ）の XXZ (XYZ) 鎖の連続極限がどういう場の理論になるかという問題である。スピン $\frac{1}{2}$ の場合には既に厳密な議論が存在するのに今一度スピン $\frac{1}{2}$ についても考察するのには幾つかの理由がある。一つには超弦理論の登場に端を発した二次元時空における共形場理論の著しい発展が挙げられる。スピン鎖の連続極限は二次元時空の場の理論になるのであるから、共形場理論及びその変形理論の成果・計算技術を十分に使う事ができる。Luther 達の議論より厳密さには欠けるかもしれないが、場の理論的方法でより易しい・分かり易い導出を行いたい。もう一つの理由として量子群が挙げられる。量子群は新しい概念であるから当時の解析では当然全く触れられていない。共形場の理論は massless 理論であり、Virasoro 代数やアフィン Lie 代数 $\hat{\mathfrak{g}}$ といった無限次元代数が重要な役割を果たしている。共形場の理論には無

¹ この講演は稲見武夫氏との共同研究 [1] に基づくものです。

限個の保存量があり，その無限個の保存量を保つ様に摂動を加えて可解な massive 理論を得る事が出来る。この時もはや Virasoro 代数はなくなってしまうが，アフィン量子代数 $U_q \hat{\mathcal{G}}$ が Virasoro 代数にとって変わって重要な役割を果たす場合が度々ある。sine-Gordon 模型はそのような例で，Bernard 達の non-local charge と呼ばれるアフィン量子代数の対称性を持っている [3]。一方 XXZ 鎖も量子代数の対称性を持っている。例えばスピン $\frac{1}{2}$ ($S_j^a = \frac{1}{2}\sigma^a$) の XXZ 鎖のハミルトニアン

$$H_{XXZ} = -\mathcal{J} \sum_j \left(S_{j+1}^x S_j^x + S_{j+1}^y S_j^y + \Delta S_{j+1}^z S_j^z + \frac{q-q^{-1}}{4} (S_{j+1}^z - S_j^z) \right), \quad \Delta = \frac{1}{2}(q + q^{-1}) \quad (1)$$

は，XXX 鎖 ($q = 1$) の場合と違ってもはや $su(2)$ の対称性はないが，

$$h_1 = \sum_j 2S_j^z, \quad e_1^\pm = \sum_j q^{\sum_{j'>j} S_{j'}^z} S_j^\pm q^{-\sum_{j'<j} S_{j'}^z} \quad (2)$$

から生成される量子代数 $U_q su(2)$ の対称性を持っている ($[H_{XXZ}, U_q su(2)] = 0$)。更に鎖の長さが無限に長い場合には (1) の最後の境界項は無視する事ができ，対称性は (レベル 0 の) アフィン量子代数 $U_q \hat{su}(2)_0$ に持ち上がる。これは無限次元の代数である為，丁度共形場理論での Virasoro 代数やアフィン Lie 代数の様に，表現論だけからかなりの情報を引き出す事が出来る。実際 $\Delta < -1$ の領域では q -頂点演算子を用いて XXZ 鎖の相関関数を全て求める事ができる。これについては加藤氏の報告を参照されたい。sine-Gordon 模型

$$S_{SG} = \int d^2x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \lambda \cos \beta \phi \right) \quad (3)$$

の \cos 項は，XYZ 鎖

$$H_{XYZ} = -\mathcal{J} \sum_j \left(S_{j+1}^x S_j^x + S_{j+1}^y S_j^y + \Delta S_{j+1}^z S_j^z + \gamma (S_{j+1}^x S_j^x - S_{j+1}^y S_j^y) \right) \quad (4)$$

の XY 非等方性の係数 γ を，格子間隔 a を 0 に近づけると同時に 0 に近づける事によって得られる項であるため (H_{XYZ} は $\gamma = 0$, $|\Delta| \leq 1$ では gapless)，式 (2) のような量子代数の生成元が連続極限において直接 non-local charge になるわけではない。[1] ではこの点を少し誤解していた。

doublet フェルミオンを用いてスピン鎖から sine-Gordon 型の模型を導く粗筋は以下の様である。スピン s の S_j^a を $k = 2s$ 個の doublet フェルミオンの双線型で表してやると自然にレベル k の $\hat{su}(2)$ カレントが現れるのであるが，スピン s の可積分 XXX 鎖 ($su(2)$ 対称性がある) からは，レベル k の $SU(2)$ WZNW 模型にカレント-カレント相互作用 ($\vec{J}_+ \cdot \vec{J}_-$) が加わった模型が得られる。一方共形場の変形理論から，レベル k の $SU(2)$ WZNW 模型にカレント-カレントの摂動を加えると共形不変性が破れて sine-Gordon 型の massive な理論 ($k = 1$ の場合が sine-Gordon 模型， $k = 2$ の場合がボソンとフェルミ

オンを入れ換える対称性がある supersymmetric sine-Gordon 模型) になり, 更に $SU(2)$ 対称性を破ると結合定数 β が変わる:

$$SU(2)_k \text{ WZNW} + \vec{J}_+ \cdot \vec{J}_- \longrightarrow (\text{fractional super}) \text{ sine-Gordon with } \beta = \sqrt{\frac{8\pi}{k}} \quad (5)$$

$$SU(2)_k \text{ WZNW} + J_+^x J_-^x + J_+^y J_-^y + g J_+^z J_-^z \longrightarrow \beta \text{ が変わる} \quad (6)$$

という事が知られている。よって XXX 鎖は, $\widehat{su}(2)_k$ カレントをボソンと \mathbf{Z}_k パラフェルミオンを使って書き直すと, $\beta = \sqrt{\frac{8\pi}{k}}$ の (fractional super) sine-Gordon 模型になる。そして Z 方向の非等方性を入れた可積分 XXZ 鎖 ($U_q su(2)$ 対称性がある) を考えると β を変える事ができるという具合である。しかし厳密にやろうとすると XYZ 鎖を考えて XXZ 鎖に近づけるといふ手順が必要でそこが難しい点である。

2. スピン $\frac{1}{2}$

式 (4) の連続極限を考えるのであるが, スピン変数 S_j^a を振動子で表す事から始めよう。これには幾つかの方法がある: 1. Jordan-Wigner (1 複素フェルミオン), 2. フェルミオン双線型 (doublet 複素フェルミオン), 3. Holstein-Primakov (ボソン)。高いスピンの場合にも通用するのは方法 2. であるが, スピン $\frac{1}{2}$ の場合には方法 1. が最も便利なので先ず方法 1. について連続極限を求める手順について説明する。

Jordan-Wigner 変換は, 各格子点 j に複素フェルミオン ψ_j ($\{\psi_j, \psi_{j'}^\dagger\} = \delta_{jj'}$, $\{\psi_j, \psi_{j'}\} = \{\psi_j^\dagger, \psi_{j'}^\dagger\} = 0$) を導入し, S_j^a ($S^\pm = S^x \pm iS^y$) を

$$S_j^- = \psi_j \exp(i\pi \sum_{j' < j} n_{j'}), \quad S_j^+ = S_j^{-\dagger}, \quad S_j^z = n_j - \frac{1}{2}, \quad n_j = \psi_j^\dagger \psi_j \quad (7)$$

と表すものである。各格子点 j での Fock 空間は $|0\rangle_j, \psi_j^\dagger|0\rangle_j$ (但し $\psi_j|0\rangle_j = 0$) の 2次元空間であるが, これを $s = \frac{1}{2}$ の表現空間と考えるのである。 $H_0 = -\mathcal{J} \sum_j (S_{j+1}^x S_j^x + S_{j+1}^y S_j^y)$ で ψ_j の運動量表示に移ると分散関係は $E \sim -\cos ka$ である (a は格子間隔で 0 にもっていく)。この基底状態はフェルミ点 ($k_F = \frac{\pi}{2a}$) までフェルミオンが詰まった状態で, 我々はこのフェルミ点のまわりの励起に興味がある。運動量 $k \sim \pm k_F$ の様子を見たいので, $\frac{1}{\sqrt{a}} \psi_j$ を $e^{ik_F x} \psi_+(x) + e^{-ik_F x} \psi_-(x)$ と置き換えて, ゆっくり変化する場 $\psi_\pm(x)$ の低エネルギー有効場の理論を導く事を行う。より精確には格子上での自由度を保つ様に偶数番目の格子点と奇数番目の格子点を組にして

$$\psi_{2\ell} = (-1)^\ell \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{+, \ell} + \psi_{-, \ell}), \quad \psi_{2\ell-1} = (-1)^\ell \frac{1}{\sqrt{2i}} (\psi_{+, \ell} - \psi_{-, \ell}) \quad (8)$$

と置き換える。そして $\frac{1}{\sqrt{2a}} \psi_{\pm, \ell} \rightarrow \psi_\pm(x) = \int \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} e^{\pm ikx} \tilde{\psi}_\pm(k)$ として, normal ordering $::$ は真空 $\prod_{k < 0} \tilde{\psi}_+^\dagger(k) \tilde{\psi}_-^\dagger(k) |0\rangle$ (但し $\tilde{\psi}_\pm(k) |0\rangle = 0$) について行う。

結局以下の (ナイーブな) 置き換え規則に従って計算せよと言うことである。

1. $\psi_j \rightarrow \psi_{\pm, \ell}$ (式 (8)).

2. $a \rightarrow 0$, $2a\ell \rightarrow x$, $2a\sum_{\ell} \rightarrow \int dx$,

$$\frac{1}{\sqrt{2a}}\psi_{\pm, \ell} \rightarrow \psi_{\pm}(x) \text{ with propagator } \langle \psi_{\pm}^{\dagger}(x')\psi_{\pm}(x) \rangle = \frac{1}{\mp 2\pi i} \frac{1}{x' - x \pm i\epsilon}.$$

3. normal ordering して a で展開.

この処方に従うと 式 (4) は

$$H_{XYZ} = \mathcal{J}a \int dx \left(\text{div. const.} - \frac{\Delta}{2\pi} \frac{1}{2a} F(x) + \frac{1}{2i} : \psi_+^{\dagger} \overleftrightarrow{\partial} \psi_+ - \psi_-^{\dagger} \overleftrightarrow{\partial} \psi_- : (x) \right. \\ \left. - \Delta \cdot (J^2 - G^2)(x) - \frac{\gamma}{a} i : \psi_+ \psi_- + \psi_+^{\dagger} \psi_-^{\dagger} : (x) \right) \quad (9)$$

となる。ここで $J_{\pm}(x) =: \psi_{\pm}^{\dagger} \psi_{\pm} : (x)$, $J = J_+ + J_-$, $G(x) =: \psi_+^{\dagger} \psi_- + \psi_-^{\dagger} \psi_+ : (x)$, $F(x) = i : \psi_+^{\dagger} \psi_- - \psi_-^{\dagger} \psi_+ : (x)$ で, $(AB)(x)$ は point splitting による normal ordering $A(x)B(y) = \dots + \frac{C(y)}{x-y} + (AB)(y) + (x-y)D(y) + \dots$ である。 $\frac{1}{2a}F$ の項は 式 (8) において格子一つ分の並進不変性を壊した事によるしわ寄せなので捨ててよい。フェルミオンをボソン化

$$\psi_{\pm}(x) = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi}} c_{\pm} : e^{\pm i\sqrt{4\pi}\phi_{\pm}(x)} :, \quad \psi_{\pm}^{\dagger}(x) = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi}} c_{\pm} : e^{\mp i\sqrt{4\pi}\phi_{\pm}(x)} : \quad (10)$$

してやり ($\langle \phi_{\pm}(x)\phi_{\pm}(y) \rangle = -\frac{1}{4\pi} \log \mp i\mu(x-y \pm i\epsilon)$, $c_{\pm}^2 = 1$, $\{c_+, c_-\} = 0$), 作用に移ると

$$S = \mathcal{J}a \int d^2x \left((1 - \frac{2}{\pi}\Delta) \frac{1}{2} (\partial_{\nu}\phi)^2 + \Delta 2 \left(\frac{\mu'}{2\pi}\right)^2 \cos 2\sqrt{4\pi}\phi + \frac{\gamma}{a} \frac{\mu}{\pi} \cos \sqrt{4\pi}\tilde{\phi} \right) \quad (11)$$

になる ($\phi = \phi_+ + \phi_-$, $\tilde{\phi} = \phi_+ - \phi_-$)。今は $\Delta = \gamma = 0$ の自由場からの摂動と考えており, ボソンを

$$\phi \rightarrow \frac{\beta}{2\sqrt{4\pi}}\phi, \quad \tilde{\phi} \rightarrow \frac{2\sqrt{4\pi}}{\beta}\tilde{\phi} = \frac{\beta'}{\sqrt{4\pi}}\tilde{\phi}, \quad \frac{\beta^2}{16\pi} = 1/(1 - \frac{2}{\pi}\Delta) \quad (12)$$

と rescale すると

$$S = \mathcal{J}a \int d^2x \left(\frac{1}{2} (\partial_{\nu}\phi)^2 + \Delta 2 \left(\frac{\mu'}{2\pi}\right)^2 \cos \beta\phi + \frac{\gamma}{a} \frac{\mu}{\pi} \cos \beta'\tilde{\phi} \right) \quad (13)$$

となり sine-Gordon 模型のハミルトニアンを得る。 \cos の項を二つ残して書いたが, β の方は Z 方向の非等方性からでる項で β' の方は XY の非等方性からでる項である。それらの次元は 式 (12) より $\frac{\beta^2}{4\pi} = 4/(1 - \frac{2}{\pi}\Delta)$, $\frac{\beta'^2}{4\pi} = 1 - \frac{2}{\pi}\Delta$ となるが, $\Delta = 0$ のまわりの摂動の範囲内で厳密解 ($\frac{\beta^2}{4\pi} = 2\pi/\cos^{-1}\Delta$, $\frac{\beta'^2}{4\pi} = \frac{2}{\pi}\cos^{-1}\Delta$) と一致している。 β の方は ($\Delta = -1$ を除いて) irrelevant で β' の方が relevant である。 γ は $\Delta = 0$ のまわりの摂動の範囲内で $\gamma \sim a$ と scale させるがこれも厳密解 ($\gamma \sim a^{\frac{2}{\pi}\cos^{-1}\Delta}$) と一致している。

次に方法 2. に話を移そう [4]。今度は各格子点 j に doublet の複素フェルミオン ψ_j^{α} ($\alpha = 1, 2$) ($\{\psi_j^{\alpha}, \psi_{j'}^{\beta\dagger}\} = \delta_{jj'}\delta^{\alpha\beta}$, その他 = 0) を導入し, S_j^a を

$$S_j^a = \frac{1}{2} \psi_j^{\alpha\dagger} \sigma_{\alpha\beta}^a \psi_j^{\beta} \quad (14)$$

と表してやる。各格子点 j での Fock 空間は $|0\rangle_j, \psi_j^{1\dagger}|0\rangle_j, \psi_j^{2\dagger}|0\rangle_j, \psi_j^{1\dagger}\psi_j^{2\dagger}|0\rangle_j$ (但し $\psi_j^\alpha|0\rangle_j = 0$) の 4次元空間 ($SU(2)$ で分解すると $0 \oplus \frac{1}{2} \oplus 0$) で、今はスピン $\frac{1}{2}$ を考えたのであるから Fock 空間を $s = \frac{1}{2}$ の表現空間に制限する必要がある。その状態は

$$\vec{S}_j^2|*\rangle = \frac{3}{4}|*\rangle, \quad \text{又は同値な条件として} \quad \psi_j^{\alpha\dagger}\psi_j^\alpha|*\rangle = |*\rangle \quad (15)$$

で特徴づけられる。格子一つおきに Z 軸の回りに 180 度回転したハミルトニアン

$$H_{XYZ} = \mathcal{J} \sum_j \left(\vec{S}_{j+1} \cdot \vec{S}_j - (1 + \Delta) S_{j+1}^z S_j^z + \gamma (S_{j+1}^x S_j^x - S_{j+1}^y S_j^y) \right) \quad (16)$$

を出発点にとり、先程の (ナイーブな) 置き換え規則に従うとこれは

$$H_{XXX} = \mathcal{J} a \int dx \left((\vec{J}^2 - \vec{G}^2)(x) - (1 + \Delta)(J^z J^z - G^z G^z)(x) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \gamma (J^+ J^+ + J^- J^- - G^+ G^+ - G^- G^-)(x) \right) \quad (17)$$

となる。ここで $J_\pm^a(x) = \frac{1}{2} : \psi_\pm^{\alpha\dagger} \sigma_{\alpha\beta}^a \psi_\pm^\beta : (x)$ (レベル 1 の $\widehat{su}(2)$ カレント), $J^a = J_+^a + J_-^a$, $G^a(x) = \frac{1}{2} : \psi_+^{\alpha\dagger} \sigma_{\alpha\beta}^a \psi_-^\beta + \psi_-^{\alpha\dagger} \sigma_{\alpha\beta}^a \psi_+^\beta : (x)$ で, div. const. と $\frac{1}{2a} F$ の項は落とした。先ず XXX 鎖を考える。式 (15) より $(\vec{J}^2 + \vec{G}^2)(x) = \text{const.}$ なので $(\vec{G}^2)(x)$ を消去すると $H_{XXX} = 2\mathcal{J} a \int dx (\vec{J}^2)(x) = 2\mathcal{J} a \int dx (\vec{J}_+^2 + \vec{J}_-^2 + 2\vec{J}_+ \cdot \vec{J}_-)(x)$ となるが、これはレベル 1 の $SU(2)$ WZNW 模型にカレント-カレント相互作用が加わったものである。カレントをボソン化

$$J_\pm^z(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \partial \phi_\pm(x), \quad J_\pm^+(x) = \frac{\mu}{2\pi} : e^{\pm i\sqrt{8\pi}\phi_\pm(x)} :, \quad J_\pm^-(x) = \frac{\mu}{2\pi} : e^{\mp i\sqrt{8\pi}\phi_\pm(x)} : \quad (18)$$

すると $\beta = \sqrt{8\pi}$ の sine-Gordon 模型を得る。次に XXZ 鎖を考えると、スピン $\frac{1}{2}$ の場合には $(S_j^z)^2 = \frac{1}{4}$ より $(J^z J^z + G^z G^z)(x) = \text{const.}$ なので G を消去すると

$$S = \mathcal{J} a \frac{4}{\pi} \int d^2x \left(\left(1 - \frac{1+\Delta}{2}\right) \frac{1}{2} (\partial_\nu \phi)^2 - \pi \left(\frac{\mu}{2\pi}\right)^2 \cos \sqrt{8\pi} \phi \right) \quad (19)$$

となる。ボソンを rescale すると β が $\sqrt{8\pi}$ からずれる事になる。今は $\Delta = -1$ ($su(2)$ point) のまわりの摂動をやっているのだが、 $\frac{\beta^2}{4\pi}$ の値は厳密解とは定性的には合っているものの定量的には一致しない。これを合わせるには [5] のような解析が必要になる。

(\vec{G}^2) や $(G^z G^z)$ は上の様に消去できたが、XY 非等方性からくる $(G^+ G^+ + G^- G^-)$ はすぐには J^a で表す事ができない。そこでフェルミオンを非可換ボソン化 (ϕ は $\widehat{su}(2)$ を表すボソンで φ は $\widehat{u}(1)$ を表すボソン)

$$\psi_\pm^2 = \left(\frac{\mu}{2\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\pm i\sqrt{2\pi}\phi_\pm} \cdot \left(\frac{\mu}{2\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\mp i\sqrt{2\pi}\varphi_\pm}, \quad \psi_\pm^{1\dagger} = \left(\frac{\mu}{2\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\pm i\sqrt{2\pi}\phi_\pm} \cdot \left(\frac{\mu}{2\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\pm i\sqrt{2\pi}\varphi_\pm}, \\ -\psi_\pm^{1\dagger} = \left(\frac{\mu}{2\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\mp i\sqrt{2\pi}\phi_\pm} \cdot \left(\frac{\mu}{2\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\mp i\sqrt{2\pi}\varphi_\pm}, \quad \psi_\pm^{2\dagger} = \left(\frac{\mu}{2\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\mp i\sqrt{2\pi}\phi_\pm} \cdot \left(\frac{\mu}{2\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{\pm i\sqrt{2\pi}\varphi_\pm} \quad (20)$$

して式(15)を解いてやる事にする。この方法だと全てを ϕ と φ で表す事ができ、式(15)より φ の方を捨てる事ができるので結局 ϕ だけの式を得る。この結果の詳細は紙面の都合上別の場所で報告したい。

3. 議論

スピン1の場合には doublet フェルミオンを二組用意して S_j^a を表してやればよい。やはり Fock 空間をスピン1の表現空間に制限する必要があるが、式(15)の様な制限条件が課されるが、§2の最後に議論した様なフェルミオンの非可換ボソン化を用いて解く事ができる。まだ XXZ 鎖の場合にしか実行していないが XYZ 鎖の場合にも困難は無いはずである。Luther 達の様厳密な議論を行うには 21 頂点模型を解く必要があるこれは現在解析中である。

H_{XYZ} と可換な代数を見つける事ができればその連続極限として sine-Gordon 模型の non-local charge を得る事ができるはずである。この代数は量子群の楕円関数版の拡張に当たるため見つける事は相当に困難であると予想されるが、連続極限において無視できる項を除いて H_{XYZ} と可換な代数ならば何とか求められるかもしれないと考えている。

謝辞

共同研究者である稲見武夫氏と、講演の後有益な指摘と議論をして頂いた江口徹氏、梁成吉氏に感謝致します。

参考文献

- [1] T. Inami and S. Odake, Phys. Rev. Lett. **70** (1993) 2016; 小竹 悟, 素粒子論研究 **87** (1993) 107.
- [2] A. Luther, Phys. Rev. **B14** (1976) 2153; M. Lüscher, Nucl. Phys. **B117** (1976) 475; M.P.M. den Nijs, Phys. Rev. **B23** (1981) 6111.
- [3] D. Bernard and A. LeClair, Comm. Math. Phys. **142** (1991) 99.
- [4] I. Affleck, Phys. Rev. Lett. **55** (1985) 1355; Nucl. Phys. **B265** (1986) 409; in “Fields, Strings and Critical Phenomena”, Elsevier Sci. Publ., 1989.
- [5] G.I. Japaridze, A.A. Nersesyan and P.B. Wiegmann, Nucl. Phys. **B230**[FS10] (1984) 511-547.