Virasoro 代数，W_N 代数，量子変形 *

小竹 悟
信州大学理学部
松本市旭 3-1-1（旭合同研究棟）
E-mail: odake@yukawa.kyoto-u.ac.jp

ABSTRACT

Virasoro 代数・W_N 代数の表現論を自由場表示の観点から概観し，その特異ベクトル (singular vector) と対称多項式の関係に基づいて Virasoro 代数・W_N 代数の量子変形を与える。†

Virasoro 代数は（world sheet theory としての）紘理論に於いて見いだされ，後に Virasoro 代数の対称性で不変な理論，つまり二次元時空に於ける共形場理論（CFT）として注目を浴び，物理学者のみならず数学者にも影響を与えながら CFT の詳しい研究が行われてきた。CFT は二次元空間に於ける統計臨界現象を記述する理論として捉える事も出来るし，また Virasoro 代数は行列模型・二次元量子重力など様々な所に登場している。

CFT は massless 理論であり無限個の保存量を統制しているのは Virasoro 代数である。CFT に摂動を加えて massive 理論に変形するともはや Virasoro 代数の対称性は無くなってしまう。しかし上手い摂動を加えた場合には無限個の保存量を持つ massive 理論を得る事が出来る。この様な

massive な解ける模型の無限個の保存量を保証する対称性は何か？

という問題が最近の大きな課題である。ある場合には量子群・ヤンギアンが重要な役割を果たしている。例えば京都グループの XXZ スピン鎖の研究では量子アフィン Lie 代数の対称性に基づいて相関関数が計算されている。しかしながらこの量子アフィン Lie 代数は CFT に於けるカレント代数（アフィン Lie 代数）に相当するもので，Virasoro 代数に相当するものではない。ナイーブには Virasoro 代数の “量子版”（q-変形）が存在するのではな

---

* この量子変形の “量子” は量子群の “量子” と同じ意味，つまり q-変形の事である。

† 共同研究 [1,4,5,7] に基づく。
御嶽山に於ける講義では §0 Introduction, §1 Virasoro 代数, §2 W_N 代数, §3 q-変形 として話したが，本報告では紙面の都合もあるので，§0 で話した q-変形の方針に付いて述べ，講義では殆ど触れなかった参考文献を挙げる事にする。

いかと期待されてきた。量子群という名前に物理学者の目が向き始めた頃から Virasoro 代数の q-変形への試みが行われてきて幾つかの q-変形が提唱されたが，明確な指導原理が無かった為（少なくとも私にとっては）満足のいく q-変形は得られていなかった。[a]

今夏 Virasoro 代数・W_N 代数の満足のいく q-変形が得られた [5,6,7] のでその指導原理を述べておきたい。massive な解ける模型の対称性を明らかにするという動機は暫く脇に置く事にして，我々は

代数・表現論・自由場表示

という観点に立つ事にする。

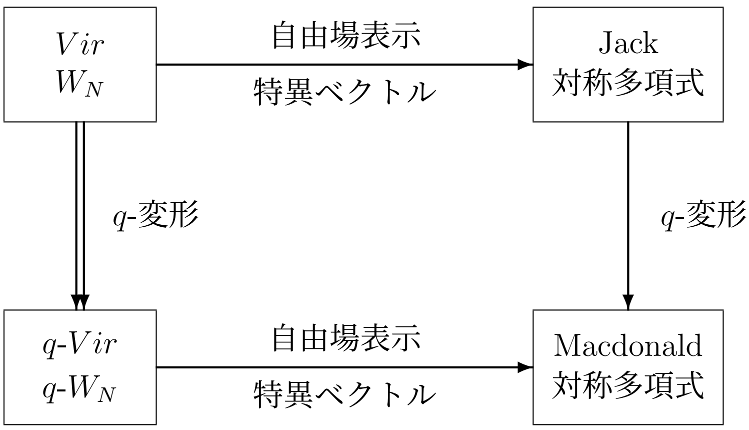
Virasoro 代数・W_N 代数の q-変形を導いた際の我々の指導原理は以下の通りである。先ず次の二つの事実に着目する：

1. Virasoro 代数（W_N 代数）を自由場表示した場合に，特異ベクトルは Jack 対称多項式で与えられる（に関係している）。[1,2]
2. Jack 対称多項式には Macdonald 対称多項式と呼ばれる良い q-変形が存在する。[10,4]

これに対して次の問題設定は自然であろう：

- 自由場表示した場合に特異ベクトルが Macdonald 対称多項式で与えられる（に関係している）様な代数を構成せよ。

結果として得られる代数は，この視点から Virasoro 代数（W_N 代数）の量子変形（q-変形）と呼ぶに値するものである（q-Vir, q-W_N と呼ぼう）。
今述べた事を図にまとめておく。



[a] 一般に，q-変形にははっきりとした定義があるわけではないが，(i) $q \to 1$ で元の理論に戻る様にパラメーター q を入れて変形したもの，で，(ii) 元の理論の持っていた性質を q が入った世界でも保っているもの，と言って良いであろう。(ii) の部分は曖昧であるため q-変形は一意的ではない。無理矢理 q を導入したものも q-変形ではあるが意味のある q-変形とは限らない。q-変形には良い q-変形・悪い q-変形・普通の q-変形が存在するのである。

この様な指導原理で得られた q-Vir, q-W_N は，元々の動機であった massive な解ける模型の対称性とは先験的には何ら関係が無いのであるが，両者には必ず密接な関係があるはずである。実際幾つかの関係が指摘されている。[3,8,9]

詳しい内容に付いては論文を御覧下さい。

Acknowledgements

I would like to thank M. Bando, I. Sanda and other organizers for managing this Ontake summer school. I also acknowledge my collaborators and Y. Yamada. This work is supported in part by the Grant-in-Aid for Scientific Research from the Ministry of Education, Science and Culture of Japan, and also by Japan-Korea exchange program of JSPS.

1. H. Awata, Y. Matsuo, S. Odake and J. Shiraishi, "Collective Field Theory, Calogero–Sutherland Model and Generalized Matrix Models" (hep-th/9411053), *Phys. Lett.* **B347** (1995) 49-55; "Excited States of Calogero-Sutherland Model and Singular Vectors of the W_N Algebra" (hep-th/9503043), *Nucl. Phys.* **B449** (1995) 347-374; "A Note on Calogero-Sutherland Model, W_n Singular Vectors and Generalized Matrix Models" (hep-th/9503028), *Soryushiron Kenkyu*(Kyoto) **91** (1995) A69-A75.
2. K. Mimachi and Y. Yamada, "Singlar vectors of the Virasoro algebra in terms of Jack symmetric polynomials", Kyushu univ. preprint (November 1994), to appear in *Comm. Math. Phys.*; RIMS *Kokyuroku* **919** (1995) 68 (in Japanese).
3. E. Frenkel and N. Reshetikhin, "Quantum Affine Algebras and Deformations of The Virasoro and $\mathcal{W}$-Algebra" (q-alg/9505025).
4. H. Awata, S. Odake and J. Shiraishi, "Integral Representations of the Macdonald Symmetric Functions" (q-alg/9506006), to appear in *Comm. Math. Phys.*
5. J. Shiraishi, H. Kubo, H. Awata and S. Odake, "A Quantum Deformation of the Virasoro Algebra and the Macdonald Symmetric Functions"(q-alg/9507034), to appear in *Lett. Math. Phys.*
6. B. Feigin and E. Frenkel, "Quantum $\mathcal{W}$-algebras and elliptic algebras" (q-alg/9508009).
7. H. Awata, H. Kubo, S. Odake and J. Shiraishi, "Quantum $\mathcal{W}_N$ Algebras and Macdonald Polynomials" (q-alg/9508011), to appear in *Comm. Math. Phys.*
8. S. Lukyanov, "A note on the deformed Virasoro algebra" (hep-th/9509 037).
9. E. Frenkel, "Deformation of the KdV Hierarchy and Related Soliton Equations" (q-alg/9511003).
10. I.G. Macdonald, "Symmetric Functions and Hall Functions" (2nd ed.), Oxford University Press 1995.