Unified Theory of Annihilation-Creation Operators for Solvable ('Discrete') Quantum Mechanics[1]

信州大学理学部　小竹 悟
E-mail: odake@azusa.shinshu-u.ac.jp

(調和振動子の) 生成消滅演算子は量子論において基礎的かつ重要な道具である．例えば場の量子論では，相互作用表示の場の演算子は調和振動子の生成消滅演算子の無限個の集まりである．本講演では，1 自由度の量子力学系の束縛状態を考察する：

$$\mathcal{H}\phi_n = \mathcal{E}_n\phi_n, \quad 0 = \mathcal{E}_0 < \mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_2 < \cdots, \quad ||\phi_n||^2 < \infty.$$

調和振動子の場合を思い出しておくと，$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(p^2 + x^2 - 1) = \frac{1}{2}(-ip + x)(ip + x) = a^\dagger a$, $\mathcal{E}_n = n$, $\phi_n(x) = \phi_0(x)H_n(x)$, $\phi_0(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ であるが，$[\mathcal{H}, [\mathcal{H}, x]] = x$ となる事から $(\mathrm{ad}\mathcal{H})^n x = [\mathcal{H}, [\mathcal{H}, \cdots, [\mathcal{H}, x]\cdots]]$ が容易に求まり，x に対する Heisenberg 演算子が厳密に求められる：

$$e^{it\mathcal{H}}xe^{-it\mathcal{H}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^n}{n!}(\mathrm{ad}\mathcal{H})^n x = x\,\cos t + p\,\sin t = \frac{1}{2}(x - ip)\,e^{it} + \frac{1}{2}(x + ip)\,e^{-it}.$$

正/負振動数部分の係数が消滅/生成演算子になっている事に注意しておく．

エネルギースペクトル $\{\mathcal{E}_n\}$ と固有関数 $\{\phi_n\}$ が全て具体的に求まる場合に解ける系と呼ぶが，$\mathcal{H}$ が (2 階の) 微分演算子である通常の量子力学だけではなく，$\mathcal{H}$ が (2 階の解析的) 差分演算子で与えられる '離散' 量子力学の場合にも様々な例が知られている．系に生成消滅演算子が存在するという事は，消滅演算子で消される基底状態に生成演算子を次々と掛ける事により励起状態が全て得られる事になるので，必然的に解ける系を意味する．そこで逆に

「解ける系には生成消滅演算子が存在するか？」

という問が考えられる．ここで欲しい生成消滅演算子は微分 (差分) 演算子として具体的に書き表されるものである．この問に対する答えは,「多くの場合に存在する」である．より詳しく述べると，固有関数が $\phi_n(x) = \phi_0(x)P_n(\eta(x))$ ($P_n(\eta)$ は $\eta = \eta(x)$ の n 次式) という形をしていて，closure relation と呼ぶ次の関係式

$$[\mathcal{H}, [\mathcal{H}, \eta]] = \eta R_0(\mathcal{H}) + [\mathcal{H}, \eta]R_1(\mathcal{H}) + R_{-1}(\mathcal{H})$$

($R_i(\mathcal{H})$ は $\mathcal{H}$ の関数) が満たされる場合に，生成消滅演算子を微分 (差分) 演算子として具体的に構成する事ができる．方針は調和振動子の場合と同じで，closure relation により $(\mathrm{ad}\mathcal{H})^n\eta$ が容易に求まり，'sinusoidal coordinate' η に対する Heisenberg 演算子が厳密に求められるので，その正/負振動数部分の係数を消滅/生成演算子とするのである．詳しくは参考文献を御覧頂きたい．

参考文献：S. Odake and R. Sasaki, J. Math. Phys. **47** (2006) 102102 (33pages) (quant-ph/0605215), Phys. Lett. **B641** (2006) 112-117 (quant-ph/0605221).

[1]本講演は佐々木隆氏 (京大基研) との共同研究に基づく．