特集／

対称性
ー 量子力学と群・代数の表現論 ー

小竹　悟

1. はじめに ー物理と対称性ー

対称性は現代物理学の基礎的概念の1つである．考えている対象にある操作を施した時にその対象が変わらない場合，その操作を**対称操作**と言い，この系には対称性があると言う．例えば，正三角形の板は中心の回りに120度回転すると元と同じ状態に戻るので（図1），120度の回転対称性がある．更に表裏を区別しないのであれば，中線に関して180度回転しても不変であり，これらの対称操作は D_3 と呼ばれる群（正二面体群）をなしている．**群**とは，集合 G に積が定義されていて（$G \times G \to G : (a, b) \mapsto ab$），

(i) 結合則 ：$\forall a, b, c \in G, (ab)c = a(bc)$
(ii) 単位元：$\exists e \in G, \forall a \in G, ae = ea = a$
(iii) 逆元 ：$\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G, aa^{-1} = a^{-1}a = e$

の条件が満たされている場合に，積の規則を抽象的に捉えた代数構造の事である．この簡単な定義から想像できない程に，群には豊富な内容が含まれている．量子力学の黎明期には分子の電子状態や振動モードを扱う問題等に群論が応用され，グルッペンペスト（Gruppen Pest，群論のペスト）という言葉が生まれる程の大流行であった．分子の問題では，分子の形を保つ対称操作のなす群（点群）の表現論を用いる事で波動関数の形がどの様になるべきかをおさえられるので（それは分子を構成している原子の種類に依らずに分子の形だけで定まる），解析が非常に容易になるのである．対称性の議論の利点の一つは，この様に**対称性を表す群や代数の表現論を用いる事により，系の詳細に依らない普遍的な性質を議論できる**点である．

模型（理論）を調べて対称性を見つけて解析に利用するだけでなく，流れを逆転して対称性を出発点にする事も考えられる．特殊相対性理論，一般相対性理論，ゲージ理論はそれぞれローレンツ変換，一般座標変換，ゲージ変換の下での不変性を要請して得られる理論である．勿論，対称性だけで全てが決まる訳ではなく，特殊相対論では光速度不変の原理，一般相対論では等価原理といった物理的に重要なインプットも必要である．対称性の議論のもう一つの利点は，この様に**対称性を理論構築の指導原理として用いる事ができる**点である．

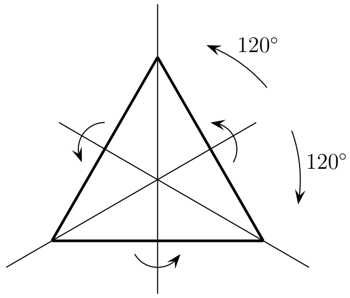

図 1　正三角形の板の合同変換

本稿では，対称性が群や代数の表現として物理系に現れてくる事を，角運動量を中心として簡単な例を通して見ていく．

2. 対称性，保存則，量子力学

保存則は対称性と密接に関係している．例えば，エネルギー，運動量，角運動量の保存則は時間や空間の一様性・等方性という観点から理解できる：

保存則	対称性
エネルギー保存則	時間の一様性
運動量保存則	空間の一様性
角運動量保存則	空間の等方性

これを見るには解析力学で学ぶ**ネーターの定理**,「連続

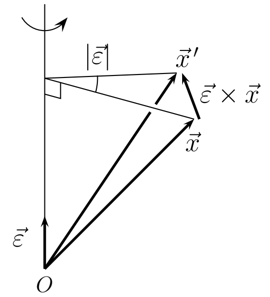

図 2　無限小回転

パラメータを含む変換で作用が不変ならば，運動方程式の下で，保存量（保存カレント）が存在する」を用いればよい．式で書くと，変換

$$\begin{cases} q'(t') = q(t) + \Delta q(t) \\ t' = t + \delta t(t) \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \Delta q, \delta t \text{ は} \\ \text{微小量} \end{pmatrix} \tag{1}$$

の下で作用が不変ならば，運動方程式（$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} - \frac{\partial L}{\partial q^j} = 0$）の下で，保存則 $\frac{d}{dt}\Theta = 0$ が成り立つ．ここで保存量 Θ は

$$\Theta = \sum_j \delta q^j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} + \delta t\, L = \sum_j \Delta q^j\, p_j - \delta t\, H \tag{2}$$

で与えられ，$\delta q(t) = q'(t) - q(t)$ は関数形の変化を表す．更にこの保存量が変換を引き起こす生成元になっている．無限小変換である事を明示するために $\Theta = \varepsilon Q$（ε は微小量．パラメータが複数ある場合には $\Theta = \sum_a \varepsilon_a Q_a$）と書いておく．$\Delta q$ が q のみの関数として，上の変換 (1) は

$$q'(t) = q(t) + \frac{i}{\hbar}[\varepsilon Q, q(t)] \tag{3}$$

のように保存量で生成されている．運動量も $p'(t) = p(t) + \frac{i}{\hbar}[\varepsilon Q, p(t)]$ と変換させればこれは**正準変換**である．古典論では交換子をポアッソン括弧にすればよい．

角運動量保存則について見てみよう．例えば $L = \sum_j \frac{1}{2} m_j \dot{\vec{x}}_j^2 - \sum_{j<k} V_{jk}(|\vec{x}_j - \vec{x}_k|)$ ならば，時間を変えずに（$t' = t$），空間の回転 $\vec{x}\,' = R(\vec{\theta})\vec{x}$ （回転軸が $\vec{\theta}$ の向きで回転角が $|\theta|$ の回転を表す一次変換が $R(\vec{\theta})$）を行う変換に対して，L は不変なので作用が不変となる．無限小回転を考えると（図 2）

$$\vec{x}\,' = \vec{x} + \vec{\varepsilon} \times \vec{x} \tag{4}$$

となり，この場合の保存量は (2) より $\Theta = \sum_j (\vec{\varepsilon} \times \vec{x}_j) \cdot m_j \dot{\vec{x}}_j = \sum_j \vec{\varepsilon} \cdot (\vec{x}_j \times m_j \dot{\vec{x}}_j) = \vec{\varepsilon} \cdot \sum_j \vec{x}_j \times \vec{p}_j$，つまり（全）角運動量 $\vec{L} = \sum_j \vec{x}_j \times \vec{p}_j$ が保存する．

波動関数 ψ の変換の様子を見てみると，波動関数はスカラー量なので，変換後の波動関数は元の位置での元の波動関数の値を持ってくればよい: $\psi'(t', \vec{x}\,') = \psi(t, \vec{x})$．回転 $\vec{x}\,' = R(\vec{\theta})\vec{x}$ の場合には，$R(\vec{\theta})^{-1} = R(-\vec{\theta})$ であるから，これを書き換えて $\psi'(t, \vec{x}) = \psi(t, R(-\vec{\theta})\vec{x})$ となる．定数ベクトル $\vec{a}$ と角運動量 $\vec{L} = -i\hbar\vec{x}\times\vec{\nabla}$ の内積を $\vec{x}$ にかけると $\frac{i}{\hbar}(\vec{a}\cdot\vec{L})\vec{x} = \vec{a}\times\vec{x}$ となるので，無限小変換 (4) は $\vec{x}\,' = \vec{x} + \frac{i}{\hbar}(\vec{\varepsilon}\cdot\vec{L})\vec{x} = (1 + \frac{i}{\hbar}\vec{\varepsilon}\cdot\vec{L})\vec{x} = R(\vec{\varepsilon})\vec{x}$ と書き直される．有限の回転は無限小の回転を積み重ねて得られるので，

$$\begin{aligned} R(\vec{\theta}) &= \lim_{N\to\infty} R(\tfrac{1}{N}\vec{\theta})^N = \lim_{N\to\infty}\left(1 + \frac{\frac{i}{\hbar}\vec{\theta}\cdot\vec{L}}{N}\right)^N \\ &= e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\theta}\cdot\vec{L}} \end{aligned} \tag{5}$$

を得る [*1)]．よって回転は $\vec{x}\,' = e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\theta}\cdot\vec{L}}\vec{x}$，変換後の波動関数は $\psi'(t, \vec{x}) = \psi(t, e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\theta}\cdot\vec{L}}\vec{x}) = e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\theta}\cdot\vec{L}}\psi(t, \vec{x})$ と表される．ここで $\vec{L}$ は波動関数の引数の $\vec{x}$ に働く微分演算子 $\vec{L} = -i\hbar\vec{x} \times \vec{\nabla}$ として表されていた．

式 (3) は**ハイゼンベルグ表示**での式であり，$\vec{L} = \vec{x}\times\vec{p}$ と $[x_j, p_k] = i\hbar\delta_{jk}$ を用いれば $\frac{i}{\hbar}[\vec{\varepsilon}\cdot\vec{L}, \vec{x}] = \vec{\varepsilon}\times\vec{x}$ を得るので確かに正しい．無限小変換の式を $\vec{x}\,' = \vec{x} + \frac{i}{\hbar}[\vec{\varepsilon}\cdot\vec{L}, \vec{x}] = e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\varepsilon}\cdot\vec{L}}\vec{x}e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\varepsilon}\cdot\vec{L}}$ と書き換えると，有限の変換はこれを積み重ねて得られるので $\vec{x}\,' = e^{\frac{i}{\hbar}\vec{\theta}\cdot\vec{L}}\vec{x}e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{\theta}\cdot\vec{L}}$ という表式を得る．

対称変換を表すユニタリ変換を U（または上で見た連続変換の対称性の生成元を Q）とすると，

$$[H, U] = 0 \quad (\text{or } [H, Q] = 0) \tag{6}$$

である．互いに交換するので H と U（or Q）は**同時対角化可能**である．**エネルギー縮退**との関係を見てみよう．エネルギー固有状態 $|\psi\rangle$（$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$）に対して，$U|\psi\rangle$（or $Q|\psi\rangle$）は同じエネルギーの固有空間に属する状態である：$HU|\psi\rangle = UH|\psi\rangle = UE|\psi\rangle = EU|\psi\rangle$．$U|\psi\rangle$ が $|\psi\rangle$ と一次独立な状態であれば，エネルギー縮退が生じている事になる．U（or Q, Q^a）を更にかけても同様に同じエネルギー固有空間に属し，この様にして得られる一次独立な状態達は多重項を形成する．一般にエネルギー縮退が起きている場合にはその背後に何らかの対称性が潜んでいると期待される．その様な理由の無いエネルギー縮退は偶然縮退と呼ばれる．

*1)　正方行列（線型変換）の指数関数は $\exp A \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$ と定義され，$e^A \stackrel{\text{def}}{=} \exp A$ と略記する．

3. 群・代数の表現

群には要素の数が有限個の有限群と無限個の無限群があり，後者で要素が連続パラメータで指定される場合は**連続群**と呼ばれる．物理に登場する連続群は**リー群**（特に一般線型群の閉部分群である線型リー群）と呼ばれるものである．リー群 G の単位元近傍の様子を表すものが**リー代数** $\mathfrak{g}$ で，集合としては $\mathfrak{g} = \{X \,|\, e^{itX} \in G \ (\forall t \in \mathbb{R})\}$ と定義され（数学では $X \to -iX$ として $e^{tX} \in G$ とするのが普通），演算として和と実スカラー倍 [*2] と**交換子積**（$[A,B] = AB - BA$）が定義された代数構造である．大雑把に言ってリー群とリー代数の関係は

リー代数	: 無限小変換	X
リー群	: 有限の変換	e^{iX}

という感じである（式 (5) 参照）．無限小変換よりも有限の変換の方が扱いが大変というだけでなく，リー群は多様体という構造を持ちその大域的な性質は色々面倒な事があるので（例えば e^{iX} の積の形に表せない元がある），リー群はリー代数よりも難しい．

群や代数は抽象的に定義された代数的構造を持つ対象だが，それを行列に対応させて表そうというのが表現であり，**群や代数は物理系の中に表現として現れてくる**．群や代数の**表現** (ρ, V) とは，ベクトル空間 V を１つ決めて，群や代数の要素に対して V 上の線型変換を対応させるもので（その対応の写像が ρ），群では積を保ち（$\rho(ab) = \rho(a)\rho(b)$），リー代数では交換子積を保つ（$\rho([X,Y]) = [\rho(X), \rho(Y)]$）ものである．$V$ は表現空間と呼ばれ，基底 $\{|i\rangle\}$ を１つ決めれば線型変換 $\mathcal{A}$ は行列 $A = (A_{ij})$ として表される：$\mathcal{A}|j\rangle = \sum_i |i\rangle A_{ij}$．$\rho(a)$ や $\rho(X)$ を行列で表したものは**表現行列**と呼ばれ，V の次元を**表現の次元**という．群や代数の作用に対して非自明な不変部分空間が存在しない時，つまり基底を取り替えても次数の低い行列に帰着しない場合には**既約表現**という．例えばユニタリ行列を表現行列とする群の**ユニタリ表現**は既約表現の直和に分解されるので，既約表現が基本となる．

リー群の大域的に面倒な点を気にしなければ（$SU(n)$ [*3] の様な単連結な群ではその様な面倒な点は無い），リー群の表現とリー代数の表現には１対１の関係がある事が分かっているので，より簡単なリー代数の表現を調べれば十分である．リー代数の表現行列が分かったら，その指数関数を考えることでリー群の表現行列が得られる．

4. 水素原子

水素原子の量子力学は，量子力学の発展・応用上重要であっただけではなく，厳密に解ける事と角運動量の量子化が現れる事で量子力学を学ぶ上で大切な例である．そのハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2\mu}\vec{p}^{\,2} - \frac{A}{r}, \quad A = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \tag{7}$$

である（μ は換算質量）．中心力なので角運動量 $\vec{L}$ が保存する．シュレディンガー方程式 $H\phi(\vec{x}) = E\phi(\vec{x})$ は極座標 (r,θ,φ) に移って変数分離の方法で解けて，解は３つの量子数 n, l, m ($n = 1, 2, \ldots$; $l = 0, 1, \ldots, n-1$; $m = -l, -l+1, \ldots, l$) で指定され，

$$\phi(\vec{x}) = \phi_{n,l,m}(r,\theta,\varphi) = R_{n,l}(r) Y_{l,m}(\theta,\varphi) \tag{8}$$

という形に表される．エネルギーは主量子数 n にのみ依存し，$E = E_n = -\frac{\mu A^2}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2}$，$n^2$ 重の縮退がある．磁気量子数 m に関する縮退は回転不変性に起因するもので，角運動量保存則に対応する．例えば z 軸方向に磁場をかけるとこの縮退は解けてしまう．方位量子数 l に関する縮退は，幾何学的対称性によるものではなく，$\frac{1}{r}$ ポテンシャルという力の法則に起因するものなので**動力学的対称性**と呼ばれる．これにはルンゲ-レンツベクトルという保存するベクトル量が対応しており，角運動量と合わせて代数の表現論を用いる事により，シュレディンガー方程式を直接解く事無しにエネルギー固有値を縮退度まで込めて求める事ができる．[1]

角運動量 $\vec{\ell} = \frac{1}{\hbar}\vec{L} = -i\vec{x} \times \vec{\nabla}$ は θ と φ のみで表され，球面調和関数 $Y_{l,m}(\theta,\varphi)$ にかけると

$$\begin{aligned} &\vec{\ell}^{\,2} Y_{l,m} = l(l+1) Y_{l,m}, \quad \ell^3 Y_{l,m} = m Y_{l,m}, \\ &\ell^{\pm} Y_{l,m} = \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)}\, Y_{l,m\pm 1} \end{aligned} \tag{9}$$

となる（$\ell^{\pm} \overset{\text{def}}{=} \ell^1 \pm i\ell^2$）．これは回転群 $SO(3)$ [*4]（のリー代数 $\mathfrak{so}(3) \cong \mathfrak{su}(2)$）のスピン l 表現である．シュ

*2） リー代数によっては複素スカラー倍も定義される．例えば n 次特殊線型群 $SL(n,\mathbb{C}) = \{A : n \times n \text{ 複素行列} \mid \det A = 1\}$ のリー代数 $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ は複素リー代数．

*3） n 次ユニタリ群は $U(n) = \{A : n \times n \text{ 複素行列} \mid A^\dagger A = 1_n\}$ で，行列式が 1 の行列に限った群が特殊ユニタリ群 $SU(n)$．リー代数はそれぞれ $\mathfrak{u}(n)$, $\mathfrak{su}(n)$．

*4） n 次直交群は $O(n) = \{A : n \times n \text{ 実行列} \mid {}^t\!AA = 1_n\}$ で，行列式が 1 の行列に限った群が特殊直交群（回転群）$SO(n)$．リー代数はそれぞれ $\mathfrak{o}(n), \mathfrak{so}(n)$ で，$\mathfrak{o}(n) = \mathfrak{so}(n)$．

レディンガー方程式を解く事で回転群のスピン l 表現が自然と現れてきたが，一般的にリー代数 $\mathfrak{su}(2)$ の既約表現は**スピン j 表現**となる事が示される．$\mathfrak{su}(2)$ の生成元を $\vec{J}$ とすると，その交換関係は

$$[J^a, J^b] = if^{abc}J^c \tag{10}$$

である．ここで構造定数は $f^{abc} = \varepsilon^{abc}$ であり，繰り返された添字 c については和を取っている．基底を取り替えて $J^{\pm} \overset{\text{def}}{=} J^1 \pm iJ^2$ とおくと，上の交換関係は

$$[J^3, J^{\pm}] = \pm J^{\pm}, \quad [J^+, J^-] = 2J^3 \tag{11}$$

となる．表現空間の基底として J^3 を対角化したものを選んでおく．式 (11) の第 1 式より，$J^3|m\rangle = m|m\rangle \Rightarrow J^3J^{\pm}|m\rangle = (m \pm 1)J^{\pm}|m\rangle$ となるので，$J^{\pm}$ は J^3 の固有値を ± 1 だけ変える演算子である．J^3 の最大固有値状態を $|j\rangle$ とすると，これは J^+ をかけると消える状態であり，J^- を次々にかけると新しい状態が出てくる．しかし表現空間が有限次元とするとどこかで消される必要があり，それを $(J^-)^{n+1}|j\rangle = 0$ とすると，規格化定数まで丁寧に計算してやると $n = 2j$ が結論される．こうして得られる $n+1 = 2j+1$ 次元表現がスピン j 表現（$j = \frac{n}{2} = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$）である．基底を改めて $|j,m\rangle$ と書くと

$$\begin{aligned} &\vec{J}^2|j,m\rangle = j(j+1)|j,m\rangle, \quad J^3|j,m\rangle = m|j,m\rangle \\ &J^{\pm}|j,m\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}\,|j, m \pm 1\rangle \end{aligned} \tag{12}$$

であり，式 (9) は実際この形をしていた．スピン j 表現の**指標**は，表現空間を $V_{(2j)}$ と書く事にして，

$$\chi_j(\theta) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Tr}_{V_{(2j)}} e^{i\theta J^3} = \sum_m e^{i\theta m} = \frac{\sin(j+\frac{1}{2})\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta} \tag{13}$$

で与えられる．ランクの高いリー代数に対しても，同時対角化できるもの（J^3 に相当）を対角化した基底を選び，上げる演算子（J^+ に相当）の全てで消される状態（**最高重み状態**．$|j,j\rangle$ に相当）を出発点にして，下げる演算子（J^- に相当）を次々とかけて新しい状態を作っていくという方法で表現が得られる．

リー代数の複素化について少し述べておく．量子力学は “複素数の世界” なので i 倍して線型結合を取り $J^{\pm}$ という演算子を考える事に何ら問題は無い．しかし，リー代数という観点から述べると，リー代数は “実数の世界” に住んでおり，$\mathfrak{su}(2)$ など一般には i 倍する事は許されない．それでは $J^{\pm}$ は一体何をやっているのかと言うと，リー代数の複素化という手続きを行っているのである．複素化とは，実数 2 つから複素数を作ったのと同様に，実リー代数 2 つ分を考えて複素スカラー倍が許されるようにしたものである．例えば $\mathfrak{su}(2)$ の複素化は $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ である．元の実リー代数と複素化したリー代数の複素既約表現の間には 1 対 1 の対応があるので，一旦複素化して考えておいて最後に実数の世界に戻って来ればよいのである．

5. 調和振動子

調和振動子は比較的易しく厳密に解ける事で量子力学の諸概念を理解する際に大切であるだけでなく，生成消滅演算子という概念が場の量子論へと受け継がれて行くという点で，量子力学の中で最も重要な例である．調和振動子のハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \tag{14}$$

である．この形を変えない変換で一目で分かるものはパリティ変換 $P: x \to -x$ （$p \to -p$）である．この対称性 $[H, P] = 0$ から H と P は同時対角化できるので，$H\phi(x) = E\phi(x)$ の解は偶関数または奇関数に選ぶ事ができる．更に 1 次元束縛系には縮退が無いので，波動関数は偶関数または奇関数となる事が分かる．シュレディンガー方程式を解く方法は色々あるが，生成消滅演算子を用いる方法が簡明だし後々の応用上も重要である．**生成消滅演算子**

$$a \overset{\text{def}}{=} \frac{ip + m\omega x}{\sqrt{2m\hbar\omega}}, \quad a^{\dagger} = \frac{-ip + m\omega x}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \tag{15}$$

を導入すると（$[a, a^{\dagger}] = 1$），ハミルトニアンは

$$H = \hbar\omega(a^{\dagger}a + \tfrac{1}{2}) \tag{16}$$

となる．この形を変えない変換は，位相変換

$$a' = e^{i\theta}a \quad (\theta \in \mathbb{R}) \ (\Rightarrow a'^{\dagger} = a^{\dagger}e^{-i\theta}) \tag{17}$$

である．この変換がなす群は $U(1)$ であり，元の x と p で見ると正準変換になっている．座標と運動量の 1 次変換 $\binom{p'}{x'} = \left(\begin{smallmatrix}\alpha & \gamma \\ \beta & \delta\end{smallmatrix}\right)\binom{p}{x}$（$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$）が正準変換となるのは，$\alpha\delta - \gamma\beta = 1$ の場合であり，この変換がなす群は $Sp(2,\mathbb{R})$ である [*5]．式 (17) の $U(1)$ はこの $Sp(2,\mathbb{R})$ の部分群になっている．この $U(1)$ に属さない $Sp(2,\mathbb{R})$ の正準変換を生成消滅演算子の言葉に直す

*5） $Sp(2n,\mathbb{R}) = \{A : 2n \times 2n$ 実行列 $|\, {}^tAJA = J, J \overset{\text{def}}{=} \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{smallmatrix}\right)\}$ は $2n$ 次シンプレクティック群（斜交群）．

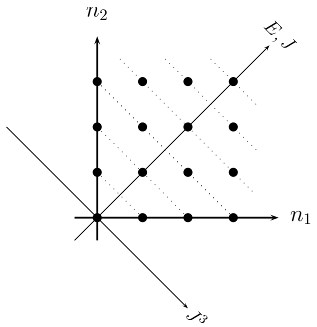

図 3　2 次元等方的調和振動子の量子数

と，a と $a^\dagger$ を混ぜる変換（一般にその様な変換はボゴリューボフ変換と呼ばれる）になっている．基底状態 $|0\rangle$ は a で消される状態 $a|0\rangle = 0$ であり，これに $a^\dagger$ を作用させて励起状態 $|n\rangle$ が得られる（$n = 0, 1, 2, \ldots$）：

$$E_n = \hbar\omega(n + \tfrac{1}{2}), \quad |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\, a^{\dagger\, n}|0\rangle. \tag{18}$$

波動関数 $\phi_n(x) = \langle x|n\rangle$ はエルミートの多項式を用いて書き表され，確かに偶関数・奇関数となっている．ヒルベルト空間は**フォック空間** $F = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbb{C}\,|n\rangle$ と呼ばれる．調和振動子の**分配関数**は

$$Z_1 = \mathrm{Tr}_F e^{-\beta H} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\beta\hbar\omega}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} \tag{19}$$

と計算される．上で述べた対称性 $U(1)$ の生成元（つまり $\mathfrak{u}(1)$ の基底）は $J = a^\dagger a$ と表され，これは**数演算子**そのものである．ハミルトニアンは $H = \hbar\omega(J + \frac{1}{2})$ と表され，$q = e^{-\beta\hbar\omega}$ とおくと，

$$q^{-\frac{1}{2}} Z_1 = \mathrm{Tr}_F q^J = \frac{1}{1-q} \tag{20}$$

となる．$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots$ は $|0\rangle$ に $1, a^\dagger, a^{\dagger\,2}, a^{\dagger\,3}, \ldots$ をかけた状態に対応する．

独立な調和振動子 2 つから成る系を考えると，エネルギー固有値は $E_{n_1,n_2} = \hbar\omega_1(n_1 + \frac{1}{2}) + \hbar\omega_2(n_2 + \frac{1}{2})$ となり（$n_1, n_2 = 0, 1, 2, \ldots$），$\omega_1$ と ω_2 の比が無理数の場合には縮退は生じない．比が 1 以外の有理数の場合には所々に縮退が生じるが，これは偶然縮退である．$\omega_1 = \omega_2$ の場合には（$\omega_1 = \omega_2 = \omega$ とする），

$$E_{n_1,n_2} = \hbar\omega(n_1 + n_2 + \tfrac{1}{2} \times 2) \tag{21}$$

となり，$E = \hbar\omega(n+1)$ には $n+1$ 重の縮退がある（図 3）．以下ではこれを詳しく見ていこう．$m_1 = m_2 = m$ として，等方的 2 次元調和振動子のハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2m}p_1^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x_1^2 + \frac{1}{2m}p_2^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x_2^2 \tag{22}$$

である．この形を変えない変換で一目で分かるものは独立なパリティ変換 $x_i \to -x_i$（$p_i \to -p_i$）と粒子の入れ替え $x_1 \leftrightarrow x_2$（$p_1 \leftrightarrow p_2$）である．ベクトルの記法 $\vec{x} = \binom{x_1}{x_2}, \vec{p} = \binom{p_1}{p_2}$ を用いると

$$H = \frac{1}{2m}\vec{p}^{\,2} + \frac{1}{2}m\omega^2 \vec{x}^{\,2} \tag{23}$$

となり，一目で分かるこの形を変えない変換は

$$\vec{x}\,' = A\vec{x} \ \bigl(A \in O(2)\bigr)\, (\Rightarrow \vec{p}\,' = {}^t\!A^{-1}\vec{p} = A\vec{p}) \tag{24}$$

である．$O(2)$ の主要部分の $SO(2)$ は**可換群**であり，可換群の既約表現は 1 次元表現となるため，この対称性ではエネルギー縮退は説明できない．生成消滅演算子

$$[a_j, a_k^\dagger] = \delta_{jk}, \quad [a_j, a_k] = [a_j^\dagger, a_k^\dagger] = 0 \tag{25}$$

を導入すると，ベクトルの記法 $\vec{a} = \binom{a_1}{a_2}$ を用いて

$$H = \hbar\omega\bigl(\vec{a}^{\,\dagger}\vec{a} + \tfrac{1}{2} \times 2\bigr) \tag{26}$$

となり，この形を変えない変換は

$$\vec{a}\,' = A\vec{a} \ \ \bigl(A \in U(2)\bigr) \ \ (\Rightarrow \vec{a}\,'^{\dagger} = \vec{a}^{\,\dagger}A^\dagger) \tag{27}$$

である．$U(2) = U(1) \times SU(2)$ であり，この $SU(2)$ 部分群がエネルギー縮退を説明してくれる．座標と運動量の 1 次変換 $\binom{\vec{p}\,'}{\vec{x}\,'} = {}^t\!A\binom{\vec{p}}{\vec{x}}$ （A は 4×4 実行列）が正準変換となるのは A が $Sp(4, \mathbb{R})$ に属する場合で，上の $U(2)$ はこの $Sp(4, \mathbb{R})$ の部分群であり，生成消滅演算子の構造を変えないものである．

フォック空間は $F = \bigoplus_{n_1,n_2=0}^{\infty} \mathbb{C}\,|n_1, n_2\rangle$，$|n_1, n_2\rangle = \frac{a_1^{\dagger\, n_1}}{\sqrt{n_1!}}\frac{a_2^{\dagger\, n_2}}{\sqrt{n_2!}}\,|\mathbf{0}\rangle$ （$a_1|\mathbf{0}\rangle = a_2|\mathbf{0}\rangle = 0$）で，$F$ 上で $U(2)$ の リー代数 $\mathfrak{u}(2) = \mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{su}(2)$ は

$$\mathfrak{u}(1) : J = \vec{a}^{\dagger} 1_2 \vec{a} = a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2, \tag{28}$$

$$\mathfrak{su}(2) : J^a = \vec{a}^{\dagger}\frac{\sigma^a}{2}\,\vec{a} \ \ (\sigma^a\text{: パウリ行列}) \tag{29}$$

と実現される．2×2 行列 A に対して

$$J_A = \vec{a}^{\dagger} A \vec{a} \tag{30}$$

とおくと，交換関係 (25) を用いて

$$[J_A, J_B] = J_{[A,B]} \tag{31}$$

となる事が容易に確認できる．これを用いれば

$$[J, J^a] = 0, \quad [J^a, J^b] = if^{abc}J^c \tag{32}$$

となり（今の場合 $f^{abc} = \varepsilon^{abc}$），確かに $\mathfrak{u}(2)$ が実現されている．

フォック空間の状態をリー代数 $\mathfrak{u}(2)$ を用いて分類してみよう．$\mathfrak{u}(1)$ 部分の J は $H=\hbar\omega(J+1)$ であるからエネルギーに対応する．$\mathfrak{su}(2)$ 部分は，$[H,J^a]=0$ であるから，その表現がエネルギー縮退に対応しているはずである．基底 $|n_1,n_2\rangle$ は既に J^3 が対角化されており，$J=n$ となる固有空間（つまりエネルギーが $\hbar\omega(n+1)$）内の J^3 の最大固有値状態は $|n,0\rangle$ で，J^- をかけることで，

$$0 \xleftarrow{J^+} |n,0\rangle \xrightarrow{J^-} |n-1,1\rangle \xrightarrow{J^-} |n-2,2\rangle \xrightarrow{J^-} \cdots \xrightarrow{J^-} |0,n\rangle \xrightarrow{J^-} 0$$

となる (比例係数は省略した)．つまり $n+1$ 個の状態 $|n_1,n_2\rangle$ $(n_1+n_2=n)$ が $\mathfrak{su}(2)$ の $n+1$ 次元既約表現 (スピン $\frac{n}{2}$ 表現) の基底になっている．これがエネルギーの $n+1$ 重縮退の出所であった．

分配関数を考えてみると $Z_2=\mathrm{Tr}_F e^{-\beta H}=Z_1^2$ となるが，式 (20) に対応して

$$q^{-\frac{1}{2}\times 2}Z_2=\mathrm{Tr}_F q^J=\frac{1}{(1-q)^2} \tag{33}$$

と書かれる．$[J,J^3]=0$ であったから同時対角化可能で，J の値だけではなく J^3 の値も同時に指定した，より詳しい分配関数（指標）が考えられ（$z=e^{i\theta}$），

$$\mathrm{Tr}_F q^J e^{i\theta J^3}=\frac{1}{(1-qz^{\frac{1}{2}})(1-qz^{-\frac{1}{2}})} \tag{34}$$

と計算される．何故なら，右辺を展開すると $(1+qz^{\frac{1}{2}}+(qz^{\frac{1}{2}})^2+\cdots)\times(1+qz^{-\frac{1}{2}}+(qz^{-\frac{1}{2}})^2+\cdots)$ であるが，1 つ目の括弧は $1,a_1^\dagger,a_1^{\dagger\,2},\ldots$ を，2 つ目の括弧は $1,a_2^\dagger,a_2^{\dagger\,2},\ldots$ を $|\mathbf{0}\rangle$ にかけたものからくる寄与を表しており，展開すると全ての $|n_1,n_2\rangle$ からの寄与をもらさず 1 回ずつ取り入れられるからである．式 (34) はフォック空間という表現空間での $\mathfrak{u}(2)$ の指標であるが，それを $\mathfrak{su}(2)$ の既約指標 (13) で分解する事ができる．実際，式 (34) の右辺は

$$\sum_{n_1=0}^{\infty}(qz^{\frac{1}{2}})^{n_1}\sum_{n_2=0}^{\infty}(qz^{-\frac{1}{2}})^{n_2}=\sum_{n_1,n_2=0}^{\infty}q^{n_1+n_2}z^{\frac{n_1-n_2}{2}}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}q^n\sum_{n_2=0}^{n}z^{\frac{n}{2}-n_2}=\sum_{n=0}^{\infty}q^n\chi_{\frac{n}{2}}(\theta) \tag{35}$$

と書き直される．これはフォック空間が $\mathfrak{su}(2)$ で

$$F=\bigoplus_{n=0}^{\infty}V_{(n)} \tag{36}$$

と既約分解される事を意味し（更にスピン $\frac{n}{2}$ 表現の持つ $U(1)$ チャージが n である事を意味する），前段落で述べた結果と一致する．

6. おわりに

5 節では等方的 2 次元調和振動子を考察したが，これは N 次元に容易に拡張される．エネルギー固有値は $E_{n_1,\ldots,n_N}=\hbar\omega(n_1+\cdots+n_N+\frac{1}{2}\times N)$ で，$E=\hbar\omega(n+\frac{1}{2}\times N)$ には ${}_NH_n={}_{N+n-1}C_n$ 重の縮退がある．N 個の生成消滅演算子 (25) によりハミルトニアンは式 (26) と表され（但し $\times 2$ の部分は $\times N$ とする），$U(N)$ 対称性が存在し，これがエネルギー縮退を説明してくれる．この場合に現れる $\mathfrak{su}(N)$ の既約表現は n 階対称テンソル表現で（その表現空間を $V_{(n)}$ と書こう），その次元はちょうど ${}_{N+n-1}C_n$ である．フォック空間は式 (36) の形に分解され，状態を詳しく調べる方法（$a_1^{\dagger\,n}|\mathbf{0}\rangle$ が最高重み状態となる）でも，指標を用いる方法（フォック空間の指標は式 (34) の様に簡単な積の形に書ける）でも確認できる．交換関係 (25) の代わりに反交換関係（$\{A,B\}=AB+BA$）に従うフェルミオン的な振動子を考えても式 (31) が成立し，同様な議論ができてこの場合は $\mathfrak{su}(N)$ の n 階反対称テンソル表現が現れる．

調和振動子 a_i を用いてリー代数の生成元 J^a を実現する方法 (30) は，a_i を自由場（調和振動子の無限個の集まり）に，J^a をカレントの場に "昇格" させる事ができて，カレント代数（**アファインリー代数**）と呼ばれる無限次元代数の実現を与えてくれる．この様に抽象的で難しい対象を自由場という性質がよく分かったものを用いて調べる方法は**自由場表示の方法**と呼ばれ，物理屋にとっては大変便利な方法であり，様々な無限次元代数や可解格子模型の解析などに用いられて威力を発揮している．

素粒子理論や数理物理ではリー群・リー代数は不可欠な道具である．興味を持たれた読者は文献[2] 辺りから学ばれてみては如何であろうか．

参考文献

1) 島和久：数理科学 1969 年 12 月号; 国場敦夫：数理科学 2007 年 7 月号.

2) 窪田高弘：『物理のためのリー群とリー代数』，サイエンス社，2008; H. Georgi, Lie Algebras in Particle Physics, 2nd ed., Westview Press, 1999.

（おだけ さとる，信州大学理学部）