Ruijsenaars-Schneider 模型の古典平衡点と変形された直交多項式

信州大学理学部　小竹 悟

E-mail: odake@azusa.shinshu-u.ac.jp

Calogero-Sutherland-Moser 模型とは，長距離相互作用 (ポテンシャルは $\frac{1}{r^2}, \frac{1}{\sin^2 r}, \wp(r)$ などで，近距離では $\frac{1}{r^2}$) を持つ，1 次元 (量子) 可積分多体系である．この模型はルート系に付随する模型であり，これの‘(1 パラメータ) 変形版’ (‘相対論版’，‘離散化版’) が Ruijsenaars-Schneider 模型である．あるパラメータを特別な値に近づけると (例えば‘光速度’を無限大にすると)，Ruijsenaars-Schneider 模型は Calogero-Sutherland-Moser 模型に帰着する．これらの模型と (数理) 物理学との関係は，例えば，分数排他統計，量子 Hall 効果との関連などの元々の物性理論との関係の他に，超対称ゲージ理論の厳密解を与える Seiberg-Witten 理論との関連，2 次元共形場理論で重要な役割を果たす (変形) Virasoro 代数や (変形) W_N 代数との関連など，多岐にわたっており，古典論・量子論共に大変興味深い模型となっている．

本講演では，古典ルート系 (A, B, C, D, BC) に付随する，有理関数または三角関数のポテンシャルを持つ，Ruijsenaars-Schneider 模型の古典平衡点についての研究成果を発表した．古典ルート系に付随する Calogero 模型 (有理関数ポテンシャル)・Sutherland 模型 (三角関数ポテンシャル) の古典平衡点は，Hermite, Laguerre, Chebyshev, Legendre, Gegenbauer, Jacobi の多項式の零点になっている．Calogero-Sutherland 模型・Ruijsenaars-Schneider 模型と (変形)Virasoro 代数・(変形) W_N 代数との関係を見出した時の経験などから，Ruijsenaars-Schneider 模型は Calogero-Sutherland 模型の良い変形になっている事を知っているので，Ruijsenaars-Schneider 模型の古典平衡点は Hermite, Laguerre 等の多項式を性質良く変形した多項式の零点になっている事が期待される．

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
\boxed{\begin{array}{c}\text{Calogero-Sutherland}\\ \text{systems}\end{array}} \arrow[r, "\text{equilibrium positions}"] \arrow[d, "\text{‘good’ deformation}"] & \boxed{\begin{array}{c}\text{classical}\\ \text{orthogonal polynomials}\end{array}} \arrow[d, "\begin{array}{c}\text{‘good’ deformation}\\ \text{expected}\end{array}"] \\
\boxed{\begin{array}{c}\text{Ruijsenaars-Schneider}\\ \text{systems}\end{array}} \arrow[r, "\text{equilibrium positions}"] & \boxed{\begin{array}{c}\text{deformed classical}\\ \text{orthogonal polynomials}\end{array}}
\end{tikzcd}
$$

例えば，Hermite, Laguerre 等の多項式は古典直交多項式として知られているが，この直交性という性質は変形後も保持される事が期待され，実際その様になっていた．

最初は，Ruijsenaars-Schneider 模型の古典平衡点の式を数値的に解いて，その古典平衡点を零点とする多項式を計算する作業を繰り返し，それらを眺めて多項式が満たしている三項関係式 (これは直交性と等価である) を見い出したのあるが，古典平衡点の式と (ほぼ) 等価な関数方程式を考えればよい事が分かったので，多項式に対する関数方程式を解く事によって，変形された Hermite, Laguerre, Jacobi の直交多項式の具体形を決定した．これらの変形された直交多項式は，Askey scheme として知られいる直交多項式の一群 (Meixner-Pollaczek, continuous Hahn, continuous dual Hahn, Wilson, Askey-Wilson 多項式) の特別な場合またはそのものになっていた．

これらの詳細については下に記した佐々木隆氏との共同論文を参照して頂きたい．

S. Odake and R. Sasaki, “Equilibria of ‘Discrete’ Integrable Systems and Deformations of Classical Polynomials”, hep-th/0407155.