平成10年度

信州大学大学院工学系研究科博士前期過程
物質基礎科学専攻(第2次募集)

入試問題

外国語科目（英語）

I 物理系, II 化学系の問題から1問を選択して解答せよ。
選択した問題と、受験番号を記入して提出すること。

I 物理学系

以下の文章を読んで後ろの問に答えよ。

『 How and when did the universe come into existence? We do have an idea of the when (between 10 and 20 billion years ago), but the how is another story. The universe is now expanding. If it is "closed", that is, if its density is greater than about $6.5 \cdot 10^{-30} g/cm^3$ (which we do not know yet), it will slow down, stop, and then collapse over itself in a giant cosmocrunch, some 100 billion years in the future. All particles will collapse into a "singularity", a point of extremely high (perhaps infinite) density and extremely high (perhaps infinite) temperature. Space itself may collapse into that point. Inside that point, matter and energy will be indistinguishable. It is a truly unimaginable situation : a point containing all the mass and energy of the universe,around which there may have been no space and for which no time passed. How long will this situation last? The question is meaningless: if time does not flow, an eternity, or no time at all, is all the same. What seems certain, however, is that this state is totally unstable and the "singularity" has to blow up. This may have been the situation 10-20 billion years ago— a point consisting of "singularity". The "singularity" blew up, the rest is predictable. 』

For the first $3 \cdot 10^{-10} s$, temperature was too high for matter to be stable—only radiation would be stable. During this time, tenperature is given by

$$T = 1.5 \cdot 10^{10} \times t^{-1/2} \qquad (1)$$

where T is the tenperature in kelvins, and t is the time in seconds since the beginning. Equration (1) shows that at the beginning ($t = 0$), temperature was infinite. The events immediately after the "singularity" blew up proceeded at such a furious pace. But we have a big problem with the "singularity", because nothing is known about the Planckian. The Planckian, the first aeon of cosmic time, which ranged from 0 to $\boxed{\text{(ア)}}$ s, is defined as the time it takes for light to cross the *Planck length* equal to $(Gh/2\pi c^3)^{1/2} = 1.6 \cdot 10^{-35} m$ (G = gravitational constant, c = speed of light). In fact, we do not know if the fundamental constants that work in our world (c, h, k, G,etc.) even worked during that time. So things could have gone differently.

The Planckian was followed by the Gamowian, the second aeon of cosmic time, about which we know quite a bit. The Gamowian ranges from $\boxed{\text{(ア)}}$ second after time zero to 4.6 billion years ago, when the solar system formed. It is the longest aeon of cosmic time. During this time, the universe has been expanding. The rate of expansion has been either increasing, constant, or decreasing. A decreasing rate may leads to an open universe —a universe that will keep expanding forever. A decreasing rate may lead asymptotically to a finite radius (a *flate* universe) or it may decrease to zero and then reverse itserf. In the latter case the universe is *closed*; it will fall back on itself and eventually end in a cosmocrunch. 『During the earliest Gamowian, the four forces of nature were part of a single "superforce". In order to see how that could be, consider gravtation, the weakest of the four forces of nature. The mass of a particle increases with increasing temperature because the spead of the particle increases. In fact, the mass of even the smallest particle would reach infinity if the particle could be accelerated to the speed of light. At the very high temperatures ($\boxed{\text{(イ)}}$ K) pervailing at time $t = 10^{-43}s$, the mass of the particles was so large (because of their speed) that the gravitational force between the particles was so strong as the strong force. The other two forces, the elecromagnetic and weak force, which are intermediate in strength between gravity and the strong force, follow suit. As a result, above $10^{31}K$, the four forces are indistinguishable. 』

(参考) aeon ; 宇宙の一時代のこと。宇宙時代。

(注) 以下の単語は、解答の中で原語のまま記しても構わない。
cosmocrunch, Planckian, Gamowian, superforce

問題１ ; 文中　の『』部分を和訳せよ。

問題２ ; 文中の $\boxed{}$ に、文意からして適当と思われる数値を計算せよ。計算過程も書くこと。

問題２ ; 筆者は、　の『』部分で力の統一に関する説明を試みている。その大意を諸君自らの言葉で簡潔に要約せよ。またその要約を英訳せよ。ただし、問題の中の英文を英訳に使わないこと。

平成10年度

信州大学大学院工学系研究科博士前期過程
物質基礎科学専攻(第2次募集)

入試問題

専門科目（物理学系）

次の６問中４問を選択して解答せよ。

1. 解答用紙は１枚につき１枚使用し，無解答の場合でも必ず４枚提出すること。

2. 各解答用紙には，選択した問題番号，受験番号を必ず記入すること。

3. 必要ならば，解答用紙の両面を使用してもよい。

$\boxed{1}$

1. Kepler 問題 (惑星運動) において，太陽の質量を M とし，その位置は原点に固定されているとする。惑星の質量，位置ベクトル，速度及び角運動量を，それぞれ, m , $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ 及び $\mathbf{l}$ とし，万有引力定数を G とするとき，

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{l} \times \mathbf{v} + GmM\,\frac{\mathbf{r}}{r} \qquad (1)$$

が保存することを証明せよ。[ヒント: $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$]

2. Laplace が気付いたといわれるこの風変りな保存量 $\mathbf{A}$, 式 (1), が何を表しているか説明せよ。[ヒント: 近日点]

3. 惑星が空間の有限な範囲内を運動する場合について、運動エネルギー K とポテンシャルエネルギー V を長時間平均すると

$$2 < K > + < V >= 0 \qquad (2)$$

の関係が成立つことを示せ。[ヒント: 部分積分]

2

問１）(a) 3 個の点電荷 $-q$, $2q$, $-q$ $(q > 0)$ が直線上に等間隔に置かれているとき、(b) 正の電荷が無限に広い平面に一様に分布しているとき，電場の大体の様子を電気力線で示せ。

問２） z 軸の方向を向いた一様な磁場 $\mathbf{B} = (\ 0 \ , 0 \ , B \ )$ は、ベクトルポテンシャル

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{r}) = (\ -B_y \ , \ 0 \ , \ 0 \ )$$
$$\mathbf{A}_2(\mathbf{r}) = (\ 0 \ , \ B_x \ , \ 0 \ )$$
$$\mathbf{A}_3(\mathbf{r}) = (\ -\frac{1}{2}B_y \ , \ \frac{1}{2}B_x \ , \ 0 \ )$$

のいずれでも表されることを示せ。また，これらのベクトルポテンシャルは

$$\mathbf{A}^{'}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla \ \chi \ (\mathbf{r})$$

で関係づけられることを示せ。(左辺は，微分ではなく別の関数と理解しなさい。)
具体的には、$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$ の相互の差を取って、３つの $\chi \ (\mathbf{r})$ を求めればよい。この任意性は，便利か不便か。

$\boxed{3}$

質量mの自由電子N個が体積Vを占めていて，絶対温度Tで熱平衡にある。

(a) 一電子エネルギー ε の関数として、一電子状態密度D (ε) を求めよ。

(b) Fermi 分布関数 $f($ ε $)$ を用いて、一電子あたりの化学ポテンシャル μ を定める式を書け。

(c) 絶対 0 度における化学ポテンシャル μ_0 を求めよ。

(d) 有限温度 $(T > 0)$ の場合に、(b) で得た表式を、粒子密度 $n \equiv \frac{N}{V}$ および熱的 de Broglie 波長 $\lambda \equiv \frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}}$ を用いて書き表せ。ここで k は、Boltzmann 定数, h は Planck 定数である。

(e) $n\lambda^3 \ll 1$ のとき、Fermi 分布関数 $f($ ε $)$ は、Maxwell-Boltzmann 分布になることを示せ。

$\boxed{4}$

磁気モーメントをもっている原子核に、外部磁場 $\mathbf{H}(t)$ をかける。このとき, 系のシュレディンガー方程式は、次式で与えられるとする。

$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\ \Psi(t) = \hat{H}(t)\Psi(t)$ .... (1)

ここで、ハミルトニアン $\hat{H}(t)$ は、 $\hat{H}(t) = -\ \hat{\boldsymbol{\mu}}\cdot\mathbf{H}(t)$ であり、$\hat{\boldsymbol{\mu}}$ は原子核の磁気モーメント演算子で、$\hat{\boldsymbol{\mu}}= \gamma\hat{\boldsymbol{J}}$, $\hat{\boldsymbol{J}}$は原子核の全角運動量演算子、γ は定数である。$\hat{\boldsymbol{J}}= \hbar\hat{\boldsymbol{I}}$ で無次元の角運動量演算子 $\hat{\boldsymbol{I}}$ を導入すれば、$\hat{\boldsymbol{\mu}}= \gamma\hbar\ \hat{\boldsymbol{I}}$ となる。

(交換関係は、$[\ \hat{I}_x\ ,\ \hat{I}_y\ ] = i\hat{I}_z$ などであることに注意しよう。)

外部磁場 $\mathbf{H}(t)$ は、Z 軸方向と、X－Y 平面内の回転磁場の和、即ち

$\mathbf{H}(t)= H_1(\ \cos\omega t e_x + \sin\omega t e_y\ ) + H_0 e_z$

であるとする。そうすると、ハミルトニアン $\hat{H}(t)$ は、次式のようになる。

$\hat{H}(t) = -\gamma\hbar[\ H_0\hat{I}_z + H_1(\ \hat{I}_x\cos\omega t + \hat{I}_y\sin\omega t\ )\ ]$ .... (2)

(1) , (2) 式の解 $\Psi(t)$ を、以下の方法で求めてみよう。

1)　$e^{-i\omega t\hat{I}_z}\hat{I}_x e^{\ i\omega t\hat{I}_z}= \hat{I}_x\cos\omega t + \hat{I}_y\sin\omega t$ .... (3) となることを示せ。

2)　状態 $\Psi(t)$ に，ユニタリー変換をほどこして、$\Psi'(t) = e^{i\omega t\hat{I}_z}\Psi(t)$ .... (4) とする。
$\Psi'(t)$ のみたすシュレディンガー方程式は、次式になることを示せ。

$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\ \Psi'(t) = \hat{H}'(t)\Psi'(t)$

ただし、 $\hat{H}'(t) = -\hbar[\ (\omega + \gamma H_0\ )\ \hat{I}_z + \gamma H_1\hat{I}_x\ ]$ .... (5)

3)　(5) 式を解き $\Psi'(t)$ を求め，(4) 式より， $\Psi(t)$ を求めよ。

4)　磁気モーメント演算子 $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ の期待値 $<\boldsymbol{\mu}(t)>$は

$<\boldsymbol{\mu}(t)>=<\Psi(t)\mid\hat{\boldsymbol{\mu}}\mid\Psi(t)>$

$=<\Psi(t)\mid\hat{\mu}_x\mid\Psi(t)>e_x+<\Psi(t)\mid\hat{\mu}_y\mid\Psi(t)>e_y+<\Psi(t)\mid\hat{\mu}_z\mid\Psi(t)>e_z$ ... (6)

で与えられる。さて、特に、$\omega + \gamma H_0 = 0$ の場合を考える。このとき期待値 $<\boldsymbol{\mu}\ (t)>$ は次式になることを示せ。

$<\boldsymbol{\mu}(t)>=<\mu_x(0)>e_x(t) + [\ <\mu_y(0)>\cos\gamma H_1 t+<\mu_z(0)>\sin\gamma H_1 t\ ]e_y(t)$
$+[\ -<\mu_y(0)>\sin\gamma H_1 t+<\mu_z(0)>\cos\gamma H_1 t\ ]e_z$ ... (7)

ただし、 $<\mu_x(0)>=<\Psi(0)\mid\hat{\mu}_z\mid\Psi(0)>$ などであり、

$e_x(t) = \cos\omega t e_x + \sin\omega t e_y$, $e_y(t) = -\sin\omega t e_x + \cos\omega t e_y$, である。

5)　時刻 $t = 0$ のとき，磁気モーメントがZ 軸方向を向いていたとする。期待値 $<\boldsymbol{\mu}(t)>$ のふるまいを論ぜよ。

5

Plank の放射式

$$U(\ \lambda\ ,\ T\ ) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp(\frac{hc}{\lambda kT}) - 1}$$

において、最大の放射エネルギーを与える波長を λ_m とする。

次の各問いに答えよ。

(1) 長波長領域では Plank の公式は、Rayleigh-Jeans の公式と一致することを示せ。

(2) $\lambda = \lambda_m$ のとき、$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = 0$ となることを用いて、Plank の公式から Wien の変位則

$\lambda_m T = C$ (定数)

が得られることを示せ。必要なら次式

$e^\alpha = \frac{5}{5-\alpha}$

を満足する数値解は $\alpha = 4.965$ であることを用いよ。

(3) 2.7 K の黒体放射におけるピークの波長と周波数を求めよ。必要なら次の数値を用いること。

Plank 定数 $h = 6.6 \times 10^{-34}\ J \cdot s$　　　真空中の光の速さ $c = 3.0 \times 10^8\ m/s$

Boltzmann 定数 $k = 1.38 \times 10^{-23}\ J/K$

6

X線回折装置を用いた実験について、以下の問いに答えよ。

1) 次の事柄について、説明せよ。

(a) X線管球　(b) ブラッグの反射条件　(c) ラウエ斑点

(2) 図１に示すように、デバイシェラー環を用いて銅の格子定数を求める実験を行った。なお，銅は，面心立方格子を形成している。

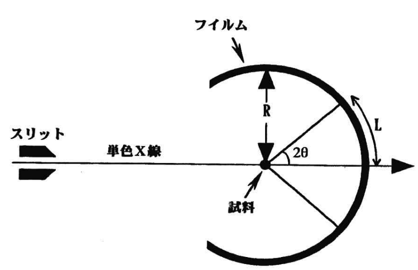
(a) 図１において、θ を R , L を用いて表せ。

(b) 立方晶系の格子定数を a とし、ミラー指数を h , k , ℓ とすると、原子面 (h , k , ℓ) 間の距離 d はどのように表せるか。

(c) 格子定数 a を、h , k , ℓ , θ 及びX線の波長 λ を用いて表せ。

(d) 図２は $R = 50mm$, $\lambda = 1.542$ Å で行ったときの実際の写真である。中心から外側に向かって、1 , 2 , $\cdots$, 5 の線間の距離 $2\ell_1$, $2\ell_2$, $\cdots$, $2\ell_5$ はそれぞれ、 76.2 , 88.8 , 129.7 , 157.6 , 161.1mm であった。１の線が (1 , 1 , 1) 面からのものであるとして、銅の格子定数を求めよ。また、この時，３の線の原子面 (h , k , l ,) は何か。

必要に応じて別表を用いること。求める過程の式も書くこと。



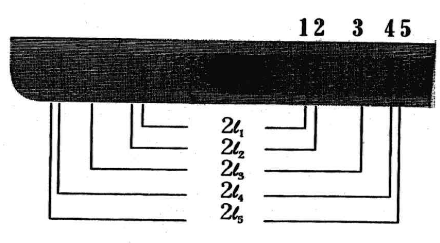


図2

平方・立方・平方根・立方根・逆数の表

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$	n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{n}$
1	1	1	1.0000	1.0000	1.00000	51	2601	132651	7.1414	3.7084	.01961
2	4	8	1.4142	1.2599	.50000	52	2704	140608	7.2111	3.7325	.01923
3	9	27	1.7321	1.4422	.33333	53	2809	148877	7.2801	3.7563	.01887
4	16	64	2.0000	1.5874	.25000	54	2916	157464	7.3485	3.7798	.01852
5	25	125	2.2361	1.7100	.20000	55	3025	166375	7.4162	3.8030	.01818
6	36	216	2.4495	1.8171	.16667	56	3136	175616	7.4833	3.8259	.01786
7	49	343	2.6458	1.9129	.14286	57	3249	185193	7.5498	3.8485	.01754
8	64	512	2.8284	2.0000	.12500	58	3364	195112	7.6158	3.8709	.01724
9	81	729	3.0000	2.0801	.11111	59	3481	205379	7.6811	3.8930	.01695
10	100	1000	3.1623	2.1544	.10000	60	3600	216000	7.7460	3.9149	.01667
11	121	1331	3.3166	2.2240	.09091	61	3721	226981	7.8102	3.9365	.01639
12	144	1728	3.4641	2.2894	.08333	62	3844	238328	7.8740	3.9579	.01613
13	169	2197	3.6056	2.3513	.07692	63	3969	250047	7.9373	3.9791	.01587
14	196	2744	3.7417	2.4101	.07143	64	4096	262144	8.0000	4.0000	.01563
15	225	3375	3.8730	2.4662	.06667	65	4225	274625	8.0623	4.0207	.01538
16	256	4096	4.0000	2.5198	.06250	66	4356	287496	8.1240	4.0412	.01515
17	289	4913	4.1231	2.5713	.05882	67	4489	300763	8.1854	4.0615	.01493
18	324	5832	4.2426	2.6207	.05556	68	4624	314432	8.2462	4.0817	.01471
19	361	6859	4.3589	2.6684	.05263	69	4761	328509	8.3066	4.1016	.01449
20	400	8000	4.4721	2.7144	.05000	70	4900	343000	8.3666	4.1213	.01429
21	441	9261	4.5826	2.7589	.04762	71	5041	357911	8.4261	4.1408	.01408
22	484	10648	4.6904	2.8020	.04545	72	5184	373248	8.4853	4.1602	.01389
23	529	12167	4.7958	2.8439	.04348	73	5329	389017	8.5440	4.1793	.01370
24	576	13824	4.8990	2.8845	.04167	74	5476	405224	8.6023	4.1983	.01351
25	625	15625	5.0000	2.9240	.04000	75	5625	421875	8.6603	4.2172	.01333
26	676	17576	5.0990	2.9625	.03846	76	5776	438976	8.7178	4.2358	.01316
27	729	19683	5.1962	3.0000	.03704	77	5929	456533	8.7750	4.2543	.01299
28	784	21952	5.2915	3.0366	.03571	78	6084	474552	8.8318	4.2727	.01282
29	841	24389	5.3852	3.0723	.03448	79	6241	493039	8.8882	4.2908	.01266
30	900	27000	5.4772	3.1072	.03333	80	6400	512000	8.9443	4.3089	.01250
31	961	29791	5.5678	3.1414	.03226	81	6561	531441	9.0000	4.3267	.01235
32	1024	32768	5.6569	3.1748	.03125	82	6724	551368	9.0554	4.3445	.01220
33	1089	35937	5.7446	3.2075	.03030	83	6889	571787	9.1104	4.3621	.01205
34	1156	39304	5.8310	3.2396	.02941	84	7056	592704	9.1652	4.3795	.01190
35	1225	42875	5.9161	3.2711	.02857	85	7225	614125	9.2195	4.3968	.01176
36	1296	46656	6.0000	3.3019	.02778	86	7396	636056	9.2736	4.4140	.01163
37	1369	50653	6.0828	3.3322	.02703	87	7569	658503	9.3274	4.4310	.01149
38	1444	54872	6.1644	3.3620	.02632	88	7744	681472	9.3808	4.4480	.01136
39	1521	59319	6.2450	3.3912	.02564	89	7921	704969	9.4340	4.4647	.01124
40	1600	64000	6.3246	3.4200	.02500	90	8100	729000	9.4868	4.4814	.01111
41	1681	68921	6.4031	3.4482	.02439	91	8281	753571	9.5394	4.4979	.01099
42	1764	74088	6.4807	3.4760	.02381	92	8464	778688	9.5917	4.5144	.01087
43	1849	79507	6.5574	3.5034	.02326	93	8649	804357	9.6437	4.5307	.01075
44	1936	85184	6.6332	3.5303	.02273	94	8836	830584	9.6954	4.5468	.01064
45	2025	91125	6.7082	3.5569	.02222	95	9025	857375	9.7468	4.5629	.01053
46	2116	97336	6.7823	3.5830	.02174	96	9216	884736	9.7980	4.5789	.01042
47	2209	103823	6.8557	3.6088	.02128	97	9409	912673	9.8489	4.5947	.01031
48	2304	110592	6.9282	3.6342	.02083	98	9604	941192	9.8995	4.6104	.01020
49	2401	117649	7.0000	3.6593	.02041	99	9801	970299	9.9499	4.6261	.01010
50	2500	125000	7.0711	3.6840	.02000	100	10000	1000000	10.0000	4.6416	.01000

$\pi = 3.1415926536$,　$\frac{1}{\pi} = 0.31831$,　$\sqrt{\pi} = 1.7725$,　$\sqrt[3]{\pi} = 1.4646$

三角関数表

角	sin	cos	tan	角	sin	cos	tan
0°	.0000	1.0000	.0000	45°	.7071	.7071	1.0000
1°	.0175	.9998	.0175	46°	.7193	.6947	1.0355
2°	.0349	.9994	.0349	47°	.7314	.6820	1.0724
3°	.0523	.9986	.0524	48°	.7431	.6691	1.1106
4°	.0698	.9976	.0699	49°	.7547	.6561	1.1504
5°	.0872	.9962	.0875	50°	.7660	.6428	1.1918
6°	.1045	.9945	.1051	51°	.7771	.6293	1.2349
7°	.1219	.9925	.1228	52°	.7880	.6157	1.2799
8°	.1392	.9903	.1405	53°	.7986	.6018	1.3270
9°	.1564	.9877	.1584	54°	.8090	.5878	1.3764
10°	.1736	.9848	.1763	55°	.8192	.5736	1.4281
11°	.1908	.9816	.1944	56°	.8290	.5592	1.4826
12°	.2079	.9781	.2126	57°	.8387	.5446	1.5399
13°	.2250	.9744	.2309	58°	.8480	.5299	1.6003
14°	.2419	.9703	.2493	59°	.8572	.5150	1.6643
15°	.2588	.9659	.2679	60°	.8660	.5000	1.7321
16°	.2756	.9613	.2867	61°	.8746	.4848	1.8040
17°	.2924	.9563	.3057	62°	.8829	.4695	1.8807
18°	.3090	.9511	.3249	63°	.8910	.4540	1.9626
19°	.3256	.9455	.3443	64°	.8988	.4384	2.0503
20°	.3420	.9397	.3640	65°	.9063	.4226	2.1445
21°	.3584	.9336	.3839	66°	.9135	.4067	2.2460
22°	.3746	.9272	.4040	67°	.9205	.3907	2.3559
23°	.3907	.9205	.4245	68°	.9272	.3746	2.4751
24°	.4067	.9135	.4452	69°	.9336	.3584	2.6051
25°	.4226	.9063	.4663	70°	.9397	.3420	2.7475
26°	.4384	.8988	.4877	71°	.9455	.3256	2.9042
27°	.4540	.8910	.5095	72°	.9511	.3090	3.0777
28°	.4695	.8829	.5317	73°	.9563	.2924	3.2709
29°	.4848	.8746	.5543	74°	.9613	.2756	3.4874
30°	.5000	.8660	.5774	75°	.9659	.2588	3.7321
31°	.5150	.8572	.6009	76°	.9703	.2419	4.0108
32°	.5299	.8480	.6249	77°	.9744	.2250	4.3315
33°	.5446	.8387	.6494	78°	.9781	.2079	4.7046
34°	.5592	.8290	.6745	79°	.9816	.1908	5.1446
35°	.5736	.8192	.7002	80°	.9848	.1736	5.6713
36°	.5878	.8090	.7265	81°	.9877	.1564	6.3138
37°	.6018	.7986	.7536	82°	.9903	.1392	7.1154
38°	.6157	.7880	.7813	83°	.9925	.1219	8.1443
39°	.6293	.7771	.8098	84°	.9945	.1045	9.5144
40°	.6428	.7660	.8391	85°	.9962	.0872	11.4301
41°	.6561	.7547	.8693	86°	.9976	.0698	14.3007
42°	.6691	.7431	.9004	87°	.9986	.0523	19.0811
43°	.6820	.7314	.9325	88°	.9994	.0349	28.6363
44°	.6947	.7193	.9657	89°	.9998	.0175	57.2900
45°	.7071	.7071	1.0000	90°	1.0000	.0000	∞