平成12年度

信州大学大学院工学系研究科博士前期過程

物質基礎科学専攻 入試問題

外国語科目 （英語）

I 物理学系、 II 化学系の問題から１問を選択して解答せよ。

I 物理学系の問題に解答する場合は、解答用紙は１枚、
II 化学系の問題に解答する場合は解答用紙は２枚、それぞれに問題番号、受験番号を記入して提出すること。

I 物理学系英語

問題　次の英文を和訳せよ。

（１） The quantum theory of light began in 1900 when Planck found that he could account for mesurements of the spectral distribution of the electromagnetic energy radiated by a thermal source by postulating that the energy of a harmonic oscillator is quantized. That is, a harmonic oscillator of angular frequency ω can only have energies that are integral multiples of the fundamental quantum $\hbar\omega$, where $\hbar = h/2\pi$ and h is Planck's original constant. In 1905, Einstein showed how the photoelectric effect could be explained on the hypothesis of corpuscularity of electromagnetic radiation. The quantum of radiation was named a photon much later, in 1926. The work of Planck and Einstein initiated much of the development of quantum mechanics.

Another main stream in the early formulation of the quantum theory was concerned with the explanation of atomic spectral lines. The interaction of electromagnetic radiation with atoms was discussed by Einstein in 1917. His theory of the absorption and emission of light by an atom depends upon simple phenomenological considerations but leads to correct predictions and is still frequently used.

It is generally accepted that quantum mechanics provides the best current picture of physical phenomena, and the most complete description of radiation field must be sought in quantum-mechanical terms, where the field observables $\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}$ are represented by operators. The quantum theory of radiation field has many similarities with the classical theory. The field vectors in quantum theory must be taken as operators instead of the algebraic quantities of classical theory, but both theories are based on Maxwell's equations. It is not, of course, possible to derive the quantum theory from the classical equations, but the transition to quantum mechanics can be accomplished most easily if the equations of classical electromagnetic theory are first put into a suitably suggestive form.

(ヒント photoelectric effect:光電効果 corpuscularity：微粒子性)

（２） When I got on my feet, I had a look about me, and I am forced to say that I have not ever seen a more beautiful view. The country round me seemed like one great garden, and the walled-in field, which were generally 40 feet square, were like beds of flowers. There were woods among these fields eight and a quarter feet square, and the tallest trees, from what I was able to see, seemed to be seven feet high. The town, which I saw on my left hand, had the look of a painted backcloth in a theatre.

I had been very tired for some hours, however, so I went into my house, shutting the door after me. But it was no use attempting to get away from so great a number of persons. I had to come out again, and get a little change by stepping forward and back as far as my chains would let me.

（ヒント　これはJ.Swiftのガリバー旅行記の一節である。）

問題II　次の文を訳せよ英訳せよ。

１．　太陽は空で見るうちで最も明るい物体だ。

２．　その建物の表と側面は石でできている。

３．　この機械を動かすには電力が用いられます。

４．　その柱は四角柱で、断面の各辺のサイズはそれぞれ３センチメートルと５センチメートルで、その高さは１３メートルです。

平成12年度

信州大学大学院工学系研究科博士前期過程

物質基礎科学専攻 入試問題

専門科目 （物理学系）

次の６問中４問を選択して解答せよ。

１．解答用紙は１問につき一枚使用し、無解答の場合でも必ず４枚提出すること。
２．各問題用紙には、選択した問題番号、受験番号を必ず記入すること。
３．必要ならば、解答用紙の両面を使用してよい。

1

（A）ポテンシャルエネルギーが

$$U(x) = -\frac{a}{x} + \frac{b}{x^2},$$

で表されるような力を受けて、x の正の軸上を運動する質量 m の質点がある。ここで、a、b は正の定数である。この運動は、全力学的エネルギーが小さいとき振動をするが、エネルギーが大きいときは非周期的で、無限遠まで飛び去ってしまう。

問1． 質点が受ける力 f を求め、そのつりあいの位置を求めよ。

問2． 質点のラグランジアン L を求め、運動方程式を導け。

問3． **問1** のつりあいの位置を中心として、質点が小さな振幅の（微小）振動をする場合、その周期を求めよ。

問4． つりあいの位置に静止していた質点が、初速度 v_0 で x の正の方向に動き始めた。この質点が無限遠方に飛び去るためには、v_0 がどれ程でなければならないか。

（B）質量 m の同一原子からなる直線状3原子分子（図1）がある。平衡状態では、原子間距離は同じであるとする。隣り合う原子間には、バネ定数 k で表される力が働いているものとして、この系の基準振動を論ぜよ。なお、垂直方向には原子は変位しないものとする。

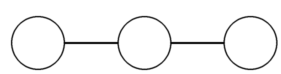


図1

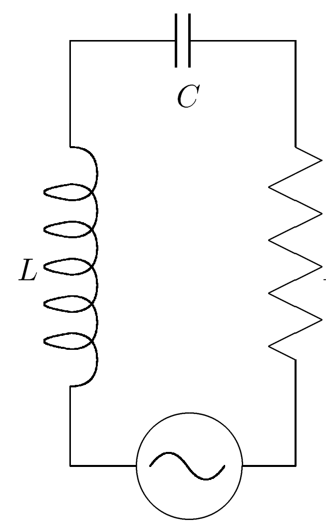
2

(a) 図のような LCR 回路に周期的に変化する交流起電力 $E(t) = V_0 \cos(\omega t)$ を流すとどうなるか。定常状態の電荷 $q(t)$、電流 $i(t)$、及び交流抵抗 $Z(\omega)$ を求めよ。この回路の共振曲線について説明せよ。先ずキルヒホフの電圧に関する法則を満たす方程式を作り、定常状態を記述する解を $q(t) = A\cos(\omega t - \phi)$ として A, ϕ を定めよ。どんな力学系と同等か説明せよ。

(b) 電場 $\mathbf{E}$ と磁束密度 $\mathbf{B}$ の共存する空間のエネルギー密度は次のように表される。

$$u = \frac{1}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}). \tag{1}$$

ポインティングベクトルを導出せよ。必要な Maxwell 方程式を書き次に $div(\mathbf{E}\times\mathbf{H})$ の結果（ベクトル解析）を用いよ。



交流電源
$E(t) = V_0 \cos\omega t$

3

１次元調和振動子のハミルトニアン $\hat{H}$ は、次で与えられる。

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}^2$$

ここで、演算子 $\hat{q}$ と $\hat{p}$ は正準交換関係 $[\hat{q},\hat{p}] = i\hbar$ を満たす。以下の問 1–5 に答えよ。

1. 次で定義される演算子 $\hat{a}$ および $\hat{a}^\dagger$ が交換関係 $[\hat{a},\hat{a}^\dagger] = 1$ を満たすことを示せ。

$$\hat{a} \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{q} + \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right), \qquad \hat{a}^\dagger \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{q} - \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right)$$

   また、$\hat{H}$ が次の形に書き表せることを示せ。

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{N} + \frac{1}{2})$$

   ここで、$\hat{N}(\equiv \hat{a}^\dagger\hat{a})$ は個数演算子。

2. $\hat{H}$ の固有値 E_n および規格化された固有状態ベクトル $|n\rangle$ はそれぞれ次の式で与えられる。

$$E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}), \qquad |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0\rangle, \quad (n = 0, 1, 2, ...)$$

   ここで、$|0\rangle$ は基底状態を表わすベクトルで $\hat{a}|0\rangle = 0$ を満たす。演算子 $\hat{a}$ および $\hat{a}^\dagger$ が次の性質を満たすことを示せ。

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \qquad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$$

   さらに、$|n\rangle$ が $\hat{H}$ の固有値 E_n の固有状態 $(\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle)$ であることを示せ。

(次のページに続く。)

3. $|\alpha\rangle$ を演算子 $\hat{a}$ に関する固有値 α の規格化された固有状態ベクトルとする。すなわち、$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$、$\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$ とする。状態 $|\alpha\rangle$ に対して、粒子数の期待値 $\langle N\rangle \equiv \langle\alpha|\hat{N}|\alpha\rangle$ を求めよ。
   $|\alpha\rangle$ は次の公式で与えられる。
   $$|\alpha\rangle = \exp(-\frac{1}{2}|\alpha|^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$$
   実際に、上で与えられた $|\alpha\rangle$ が $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ を満たすことを示せ。

4. 状態 $|\alpha\rangle$ において、粒子数が n である確率 $P_n = |\langle n|\alpha\rangle|^2$ を計算し、P_n を $\langle N\rangle$ の関数として書き表わせ。($|n\rangle$ に関する直交性 $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$ を使え。)

5. $\hat{q}$ と $\hat{p}$ は $\hat{a}$ および $\hat{a}^\dagger$ を使って次のように書き表せる。
   $$\hat{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \qquad \hat{p} = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)$$
   状態 $|\alpha\rangle$ は、物理量 $\hat{q}$ と $\hat{p}$ のゆらぎの積が最小になる状態 $(\Delta q \cdot \Delta p = \hbar/2)$ である。このことを示すために、以下の量を計算せよ。

   (a) $\langle\alpha|\hat{q}|\alpha\rangle$, (b) $\langle\alpha|\hat{p}|\alpha\rangle$, (c) $\langle\alpha|\hat{q}^2|\alpha\rangle$, (d) $\langle\alpha|\hat{p}^2|\alpha\rangle$

   (e) $\Delta q \equiv \sqrt{\langle\alpha|\hat{q}^2|\alpha\rangle - (\langle\alpha|\hat{q}|\alpha\rangle)^2}$, (f) $\Delta p \equiv \sqrt{\langle\alpha|\hat{p}^2|\alpha\rangle - (\langle\alpha|\hat{p}|\alpha\rangle)^2}$

4

１種類の原子から構成される結晶１モルを考える。各原子は、その平衡位置のまわりで、独立に振動し、また１個の原子の振動は、３つの独立な一次元調和振動子の重ね合わせと見なせるとする。　これらの調和振動子の固有角振動数はすべて等しいとし、それを ω とする。この結晶が絶対温度 T で熱平衡にあるとき、以下の問に答えよ。

(1)　固有角振動数 ω を持つ１個の一次元調和振動子の量子力学的なエネルギー固有値を記せ。

(2)　固有角振動数 ω を持つ１個の一次元調和振動子の分配関数 Z_1 を求めよ。

(3)　この結晶のエネルギーとして、上述の格子振動を考えるとき、この結晶の平均エネルギー U を求めよ。

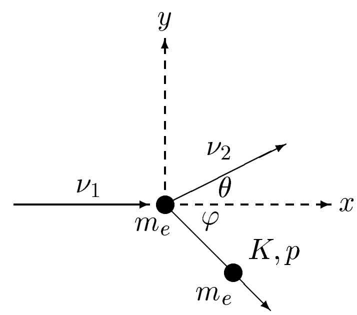
(4)　この結晶の比熱 C を求めよ。　また、その高温と低温における極限を求めよ。

(5)　この結晶のエントロピー S を求めよ。

(6)　上の問い (4) と問い (5) の結果は、熱力学第３法則と両立するか否かを検討せよ。

5

以下は平成 4 年度の信州大学理学部の入学試験問題のうちの一問である（原文のまま）。



『光の粒子性を示すコンプトン効果について考えてみよう。図は原点に静止している質量 m_e の電子に、x 軸方向の左側から振動数 ν_1 の光子が衝突し、衝突後 x 軸とのなす角 θ 方向に散乱された光子（振動数 ν_2）と、x 軸とのなす角 φ 方向に反跳された電子（運動エネルギー K、運動量の大きさ p）になったことを表している。以下の $\boxed{}$ の中に適当な式または数値を入れよ。ただし、c を光の速さ、h をプランク定数とする。

(1) 振動数 ν_1 の光子のエネルギー E_1 は $\boxed{（ア）}$ で与えられ、運動量 p_1 は $\boxed{（イ）}$ で与えられる。よって、E_1 と p_1 との間には $\boxed{（ウ）}$ の関係式がなりたつ。

(2) この衝突（弾性衝突）では、エネルギー保存則より $\boxed{（エ）}$ がなりたち、また x 方向の運動量保存則より $\boxed{（オ）}$、y 方向の運動量保存則より $\boxed{（カ）}$ がなりたつ。これらの式（エ)、(オ)、(カ）を解くと、$\lambda_2 - \lambda_1 = \dfrac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$ となる。ここで、λ_1, λ_2 はそれぞれ振動数 ν_1, ν_2 の光子の波長である。この式は、散乱光子の波長は入射光子の波長より長くなることを示している。$\lambda_c = \dfrac{h}{m_e c} = 2.4 \times 10^{-12}\mathrm{m}$ をコンプトン波長という。

(3) $\theta = 90^\circ$ のとき、反跳電子の運動エネルギー K を $\lambda_1, \lambda_c, c, h$ で表すと $\boxed{（キ）}$ となる。

(4) 光子が $\theta = 90^\circ$ 方向に散乱されるとき、入射光子の波長が次の場合について比 K/E_1（E_1 は入射光子のエネルギー）の値を求めると、(a) $\lambda_1 = 6\times 10^{-7}\mathrm{m}$（可視光）では $K/E_1 = \boxed{（ク）}$、(b) $\lambda_1 = 10^{-10}\mathrm{m}$ （X 線）では $K/E_1 = \boxed{（ケ）}$、(c) $\lambda_1 = 10^{-12}\mathrm{m}$ （γ 線）では $K/E_1 =$ $\boxed{（コ）}$ 、となる。これらより、入射光子の波長が短いほど、すなわち、エネルギーが大きいほど、反跳電子がもらうエネルギーの割合は大きいことがわかる。』

この入試問題を読んで以下の設問に答えよ。

（あ）この大学入試問題を解け。

（い）大学入試問題なので電子の運動は非相対論的に扱われる。衝突後の電子の速さを v とする時、K と p はどのように表されるか。そして、(エ)（オ)（カ）を解いて、$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$ を導け。但しどのような近似を行なったかも明記せよ。

次に電子の運動も相対論的に扱ってみる。

（う）電子の速さを v とする時、K と p はどのように表されるか。また、非相対論的極限とは何であるかを述べて、K と p が非相対論極限でどうなるかを式を使って説明せよ。

（え）（エ）（オ）（カ）を解いて、$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$ を導け。また、近似を行なった場合にはどのような近似を行なったかを述べ、近似を行なわなかった場合にはそう述べよ。

6 は以下の２問中１問に回答せよ。

6 の１

問１　実験レポートを作成する際に必ず記述しなければならない事柄を３つ挙げよ。
また、その際に留意しなければならない点を３つ挙げよ。

問２　以下に、相関係数 r について、その解釈を行う際に注意すべき点を挙げる。
空欄を埋めよ。

1　相関と（　A　）は混同してはならない。

2　２変数間に（　A　）があると考えられる場合でも、相関係数はどちらの変数が他の変数に（　B　）しているかを確定できない。

3　線形相関がないといえるのは r の値が 0 と（　C　）に限る。

4　X と Y の特定な（　D　）で確立された線形相関は、（　E　）によってこの（　D　）外でも成立すると考えてはならない。

問３　放射線のエネルギー分布を測定する場合、検出器のエネルギー分解能が重要となる。単一エネルギー E_0 の放射線のエネルギーを測定したとして、検出器のエネルギー分解能を定義せよ。

問４　GM計数管は最も古い放射線検出器の一つであり、電離に基づく検出器である。充填ガスとしては希ガス（通常 He、Ar がもっとも多く使われる）が主として用いられるが、"quench gas"と呼ばれる第二の成分を添加してあるのが普通である。このガスは何を目的として添加されるか。できるだけ詳しく述べよ。また、通常用いられる"quench gas"は、充填ガスに比べて、どのような特徴を持っているか。

問５　電子の比電荷（e/m）を測定する原理を説明せよ。ただし、必要な式と次のキーワードを用いて説明すること。
キーワード；ローレンツ力、サイクロトロン運動、電子銃、運動エネルギー

6 の2

1）家庭用コンセント（１００V、５０Hｚとする）の電圧を１／１０におとしてオシロスコープで観察したときの様子を示せ。

2）１００Hｚの交流電源（電圧は任意）を図１の回路を通してオシロスコープで観測したときの様子を記せ。

3）図２に示すような、コイル（インダクタンスL、抵抗は無視できる）と抵抗Rを用いた回路の1-2間に周波数ｆの交流を流す。

ａ）端子3-5間と4-5間の電圧比を求めよ。

ｂ）電圧と電流の位相差を求めよ。

ｃ）端子3-5間をオシロスコープの水平入力端子に、4-5間を垂直入力端子に入れると図３に示すようなリサージュ図形が得られた。この図形から位相差を求める原理と方法を記せ。

図1

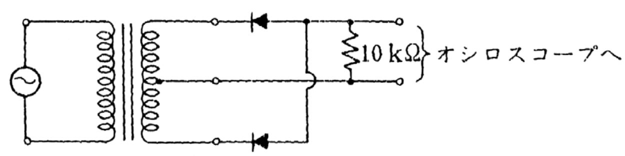


図2

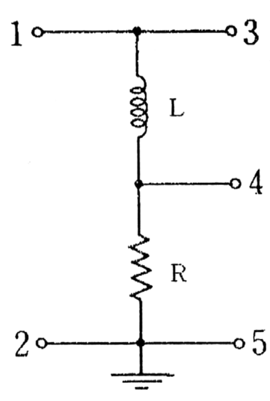


図3