平成１４年度

信州大学大学院工学系研究科博士前期課程
物質基礎科学専攻

入試問題

外国語科目（英語）

I物理学系、II化学系の問題からいずれかを選択して解答せよ。選択した問題と、受験番号を記入して提出すること。

I 物理学系

次の文章は”The Feynman LECTURES ON PHYSICS”からの引用である。

This two-year course in physics is presented from the point of view that you, the reader, are going to be a physicist. This is not necessarily the case of course, but that is what every professor in every subject assumes.! もしも諸君が将来物理学者になろうというのならば，これから実にたくさんのことを勉強しなければならない。そこにあるのは，この 200 年間に非常ないきおいで発展してきた知識の世界である。そんなに厖大な知識は，とても４年の間に知りつくせるものではない，と諸君は思うだろう。まさにそのとおりである。そして諸君は将来更に大学院へも行かなければならないのだ。

Surprisingly enough, in spite of the tremendous amount of work that has been done for all this time it is possible to condense the enormous mass of results to a large extent-that is, to find *laws* which summarize all our knowledge. Even so, the laws are so hard to grasp that it is unfair to you to start exploring this tremendous subject without some kind of map or outline of the relationship of one part of the subject of science to another. Following these preliminary remarks, the first three chapters will therefore outline the relation of physics to the rest of the sciences, the relations of the sciences to each other, and the meaning of science, to help us develop a ”feel” for the subject.

You might ask why we cannot teach physics by just giving the basic laws on page one and then showing how they work in all possible circumstances, as we do in Euclidean geometry, where we state the axioms and then make all sorts of deduction. (So, not satisfied to learn physics in four years, you want to learn it in four minutes?) We cannot do it in this way for two reasons. First, we do not yet *know* all the basic laws: there is an expanding frontier of ignorance. Second, the correct statement of the laws of physics involves some very unfamiliar ideas which require advanced mathematics for their description. Therefore, one needs a considerable amount of preparatory training even to learn what the *words* mean. No, it is not possible to do it that way. We can only do it piece by piece.

Each piece, or part, of the whole of nature is always merely an *approximation* to the complete truth, or the complete truth so far as we know it. じっさい，我々の知っていることは，すべてなんらかの近似である。というのは，**我々はまだすべての法則を知りつくしているのではない**ということを承知しているからである。だから，これからいろいろのことを勉強しても，それはやがて忘れてしまわなければならず，そうでないにしても，多

くの場合，修正を加えなければならないのである。

The principle of science, the definition, almost, is the following: *The test of all knowledge is experiment.* Experiment is the *sole judge* of scientific ”truth.” But what is the source of knowledge? Where do the laws that are to be tested come from? Experiment, itself, helps to produce these laws, in the sense that it gives us hints. But also needed is *imagination* to creat from these hints the great generalizations-to guess at the wonderful, simple, but very strange patterns beneath them all, and then to experiment to check again whether we have made the right guess. This imagining process is so difficult that there is a division of labor in physics: there are *theoretical* physicists who imagine, deduce, and guess at new laws, but do not experiment; and then there are *experimental* physicists who experiment, imagine, deduce, and guess.

(1) 第 2 段落（Surprisingly enough, ...）を和訳せよ。
(2) 第 5 段落（The principle of science, ...）を和訳せよ。
(3) 第 3 段落（You might ask ...）を要約せよ。
(4) 第 1 段落の和文（もしも諸君が…）を英訳せよ。
(5) 第 4 段落の和文（じっさい，我々の…）を英訳せよ。

平成１４年度

信州大学大学院工学系研究科博士前期課程
物質基礎科学専攻

入試問題

専門科目（物理学系）

次の６問中４問を選択して解答せよ。

１．解答用紙は１問につき１枚使用し、無解答の場合でも必ず４枚提出すること。

２．各解答用紙には、選択した問題番号、受験番号を必ず記入すること。

３．必要ならば、解答用紙の両面を使用してもよい。

1

下図のように、摩擦のない机の上板の小穴を通る長さ l の糸で連結された質量それぞれ m_1、と m_2 の 2 つの質点を考える。質点 m_1 は机の上板の上に置かれており、質点 m_2 は連結された糸によりつり下げられているものとする。質点 m_1 に、上板に平行な面内でかつ中心方向に垂直な成分の初速度を与えたとき、質点 m_1 について円柱座標（r,θ,z）を用いて運動方程式をたて、その運動について考察してみよう。ただし、重力加速度を g、時間を t とし、糸と小穴との摩擦および糸の質量は無視できるものとする。

(1) 全力学的エネルギーを、m_1、m_2、r、θ、l、t 及び g を用いて表わせ。

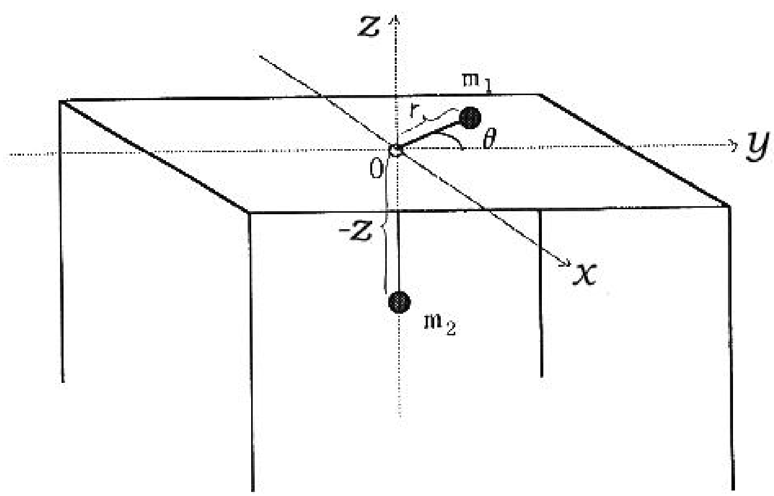
(2) 質点の質量が等しい（$m_1 = m_2 =$ m）として動径方向（r 方向）の運動方程式を導け。

(3) 質点 m_1 に働く力は中心力である。中心力が働くとき、角運動量が保存されることを示せ。

(4) 角運動量の絶対値を L として全力学的エネルギーを m、r、L、l、t 及び g を用いて書き直せ。

(5) 質点 m_1 が実際に感じるポテンシャル（有効ポテンシャル）を、縦軸にポテンシャル、横軸に r をとり図示せよ。

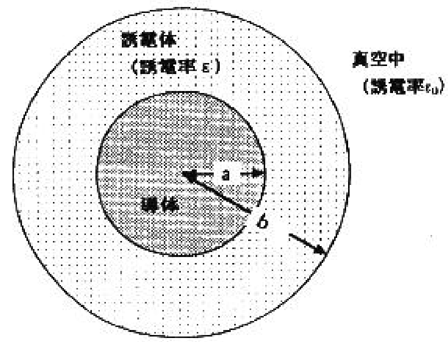
(6) 机の真上から見た質点 m_1 の運動の様子（軌跡の例）を図示せよ。



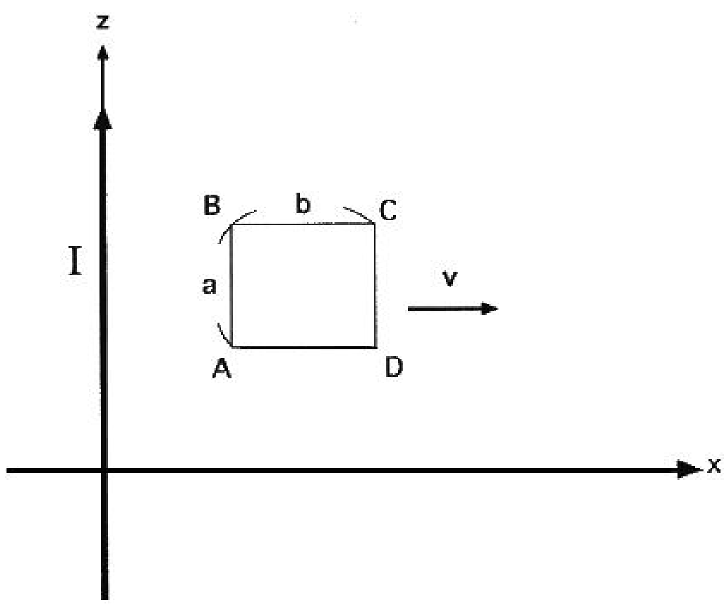
2

問　次の２つの問題について、答えなさい。

1. 半径 a の導体球の周りに半径 b(＞a) まで誘電率 ϵ の誘電体球殻がおおっている。（その外は真空である。）導体球に電荷 Q を与えたとき、電束密度、電場、電位をそれぞれ求めよ。ただし、電位は、無限遠を基準点とする。



2. z 軸上に一定の電流 I が流れている。図のように、xz 平面内にある各辺が a,b の長方形の回路 ABCD（$\overline{AB}$=$\overline{CD}$=a, $\overline{BC}$=$\overline{DA}$=b, AB//z 軸）が x 軸方向に一定の速度 v で動いている。A 点の x 座標を $x = x_0 + vt$ とするとき、a)A 点での磁束密度を求めよ。また、b) 回路の起電力を求めよ。



3

ハミルトニアンが $\hat{H} = \dfrac{\hat{p}^2}{2m} + \dfrac{1}{2}m\omega^2\hat{q}^2 + i\omega\hat{\xi}\hat{\eta}$ で与えられる量子力学系について議論しよう。ここで、m,ω は実定数とする。また、演算子 $\hat{q}$ および $\hat{p}$ は交換関係
$[\hat{q},\hat{p}] \equiv \hat{q}\hat{p} - \hat{p}\hat{q} = i\hbar, [\hat{q},\hat{q}] = 0, [\hat{p},\hat{p}] = 0$ を満たし、演算子 $\hat{\xi}$ および $\hat{\eta}$ は反交換関係
$\{\hat{\xi},\hat{\eta}\} \equiv \hat{\xi}\hat{\eta} + \hat{\eta}\hat{\xi} = 0, \{\hat{\xi},\hat{\xi}\} = \dfrac{\hbar}{m\omega}, \{\hat{\eta},\hat{\eta}\} = m\hbar\omega$ を満足する。
以下の問 1-6 に答えよ。

1. 次で定義される演算子 $\hat{a}$ および $\hat{a}^\dagger$
$$\hat{a} \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{q} + \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right),\ \hat{a}^\dagger \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{q} - \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right)$$
に関する交換関係 $[\hat{a},\hat{a}^\dagger], [\hat{a},\hat{a}], [\hat{a}^\dagger,\hat{a}^\dagger]$ を計算せよ。
2. 次で定義される演算子 $\hat{b}$ および $\hat{b}^\dagger$
$$\hat{b} \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{\xi} + \frac{i\hat{\eta}}{m\omega}\right),\ \hat{b}^\dagger \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{\xi} - \frac{i\hat{\eta}}{m\omega}\right)$$
に関する反交換関係 $\{\hat{b},\hat{b}^\dagger\}, \{\hat{b},\hat{b}\}, \{\hat{b}^\dagger,\hat{b}^\dagger\}$ を計算せよ。
3. 演算子 $\hat{a},\hat{a}^\dagger,\hat{b},\hat{b}^\dagger$ を使って、ハミルトニアンは $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{b}^\dagger\hat{b})$ と書き表せることを示せ。
4. 恒等式 $[\hat{A}\hat{B},\hat{C}] = \hat{A}[\hat{B},\hat{C}] + [\hat{A},\hat{C}]\hat{B} = \hat{A}\{\hat{B},\hat{C}\} - \{\hat{A},\hat{C}\}\hat{B}$
および $\{\hat{A}\hat{B},\hat{C}\} = \hat{A}[\hat{B},\hat{C}] + \{\hat{A},\hat{C}\}\hat{B} = \hat{A}\{\hat{B},\hat{C}\} - [\hat{A},\hat{C}]\hat{B}$ を示せ。
ここで、$\hat{A},\hat{B},\hat{C}$ は結合律を満たす任意の演算子。
5. 演算子 $\hat{Q} \equiv \sqrt{\hbar\omega}\hat{a}^\dagger\hat{b}, \hat{Q}^\dagger \equiv \sqrt{\hbar\omega}\hat{b}^\dagger\hat{a}$ に関する以下の関係式を示せ。
(a)$[\hat{Q},\hat{a}] = -\sqrt{\hbar\omega}\hat{b}, \quad \{\hat{Q},\hat{b}\} = \sqrt{\hbar\omega}\hat{a}^\dagger$
(b)$\{\hat{Q},\hat{Q}^\dagger\} = \hat{H}, \quad \{\hat{Q},\hat{Q}\} = \{\hat{Q}^\dagger,\hat{Q}^\dagger\} = 0$
(c)$[\hat{Q},\hat{H}] = [\hat{Q}^\dagger,\hat{H}] = 0$
6. エネルギーの固有状態は基底状態を除いて、励起状態はすべて 2 重に縮退していることを示せ。

4

N 個の粒子からなる一次元結晶を考え、両端は結んで周期的にしておく。各粒子は磁気モーメント μ を持ち、上向き ($\uparrow$)、下向き ($\downarrow$) の二つの状態のみを取るとする。隣接モーメント間の相互作用エネルギーは同じ向き ($\uparrow\uparrow$ または $\downarrow\downarrow$) のときー J で、逆向き ($\uparrow\downarrow$ または $\downarrow\uparrow$) のとき＋ J である。ただし、J は正で、同じ向きのスピン対の数を N_+、逆向きスピン対の数を N_- とする。

1. この系のエントロピーとエネルギーを N_+ と N_- で表し、更に、エントロピーをエネルギーの関数として表せ、このとき N が定数であることに注意。
2. 温度 T の熱浴と熱平衡のときの系のエネルギー E(T) を求め、概略のグラフを描け。熱力学的温度の定義を思い出すと、平衡の条件はどうなるか。
3. 温度の関数として同じ向きの対の数 $N_+(T)$、及び逆向きの対の数 $N_-(T)$ を求めよ。
4. 平衡分布 N_+^0、N_-^0 から、それぞれ微小量 n_+、n_- だけ揺らいだときのエントロピーの変化は $n_\pm$ の二次まで考慮すると

$$\frac{\delta S}{k_B} = -\frac{1}{2}\left(\frac{n_+^2}{N_+} + \frac{n_-^2}{N_-}\right)$$

で与えられることを示せ。

$\boxed{5}$

$u(\nu, T)d\nu = \dfrac{8\pi\nu^2}{c^3}d\nu\dfrac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}$ は、空洞放射の振動数が ν と $\nu + d\nu$ の間にある単位体積当たりの放射のエネルギーの、プランクの公式である。但し、c は光速、h はプランク定数、k はボルツマン定数、T は温度である。以下の問に答えよ。

(1) $\dfrac{8\pi\nu^2}{c^3}d\nu$ の意味するところを述べよ。

(2) $\dfrac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}$ の意味するところを述べよ。

(3) プランクの公式で、$\dfrac{h\nu}{kT} \to 0$ のとき、レイリー・ジーンズの公式となる。これを求めよ。

(4) $\frac{h\nu}{kT} \to$ 大のとき、ウィーンの公式となる。これを求めよ。

(5) ウィーンの公式より、ウィーンの変位側を求めよ。

(6) プランクの公式より、シュテファン・ボルツマンの法則を求めよ。

$\boxed{6}$は以下の２問中１問に解答せよ。

$\boxed{6}$の１

核磁気共鳴 (NMR) について、以下の問に答えよ。

(1) 空白をうめよ。

核磁気共鳴とは、磁場中におかれた原子核が、核種と磁場の大きさで決まる特別の周波数の電磁波を吸収、放出する現象で、この電磁波の角周波数 ω_0 と共鳴磁場の強度 H_0 の間には $\boxed{\text{(a)}}$ の関係がある。ここで γ は磁気回転比とよばれる原子核固有の値である。原子核は J、すなわち $\boxed{\text{(b)}}$ とよばれる内部自由度をもち、(核) スピン I との間に $\boxed{\text{(c)}}$ の関係がある。スピンは磁気双極子モーメント μ を伴っていて μ と I の関係は $\boxed{\text{(d)}}$ となる。

静磁場 H_0 中の磁気モーメント μ のもつエネルギーは $\boxed{\text{(e)}}$ のハミルトニアンで与えられる。H_0 の方向を z 軸とすると、J の z 成分は $\boxed{\text{(f)}}$ を単位に量子化される。このため、磁場中の核スピンのとりうる固有状態はそれぞれ $\boxed{\text{(g)}}$ (m=-I, ••• ,+I;m は Iz の固有値で磁気量子数) のエネルギーをもつ 2I+1 個の準位になる。これを $\boxed{\text{(h) 分裂}}$ とよぶ。この準位間に遷移を起こさせるには H_0 と垂直な方向に $\boxed{\text{(i)}}$ を加えるとよい。この振幅は H_0 に比べて充分小さいので、摂動として扱うが、摂動が準位間のエネルギー差を満たす角周波数 ω で時間変化するとき、有限の遷移確率を与える。準位間のエネルギー差は $\boxed{\text{(j)}}$ であるから $\omega =$ $\boxed{\text{(k)}}$ が NMR の共鳴条件である。水素の原子核の陽子の γ は $2.675 * 10^8 s^{-1} \bullet T^{-1}$ である。$H_0 = 1T$ なら共鳴周波数はだいたい $\boxed{\text{(l)}}$ MHz となる。

(2)^{59}Co の NMR 信号を見るとき、試料が粉末になっている。理由を説明せよ。

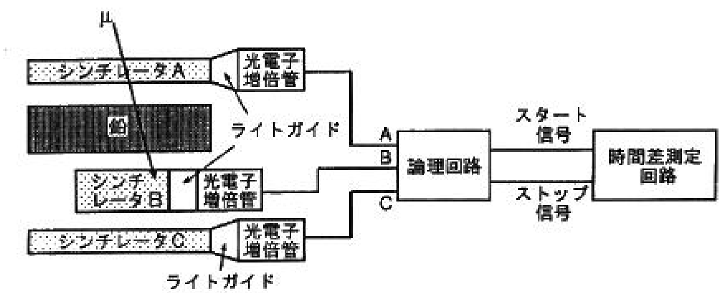
(3)^{59}Co の NMR 信号は、静磁場をかけないでも見える。理由を説明せよ。

(4) ブロッホ方程式には緩和時間 T_1,T_2 が入っているがその理由を説明せよ。

(5)H_0(z 軸) のもとでラーモア才差運動をしている核スピン系がある。このとき、上の (1) の問題で空白 $\boxed{\text{(a)}}$ の周期で回転する座標系を考えると、核スピンにとって外部磁場は存在しないとしてよい。理由を説明せよ。

$\boxed{6}$の2

宇宙線に含まれるμ粒子の寿命を測定するために、下図のような装置を作成した。上方から飛来したμ粒子は、シンチレータAをつき抜け、鉛中でエネルギーを失い、シンチレータBの中で静止し、崩壊する。このとき、まずシンチレータAとシンチレータBから同時に信号が出る、その後、シンチレータBから、μ粒子の崩壊に伴う信号が出る。その二つの信号の出て来る時間差を測定することにより、μ粒子の平均寿命を求めることが出来る。



1. 宇宙線に含まれるμ粒子の生成過程と崩壊課程を説明せよ。
2. 時間差測定回路のスタート信号およびストップ信号を作る論理回路を、それぞれA、B、Cの信号とAND回路、NOR回路を使って記述せよ。
3. 静止した時刻を時間の原点にとったとき、時間間隔$(t, t+\triangle t)$の間に$\triangle N$個のμ粒子の崩壊が観測されたとする。時刻tにN(t)個のμ粒子が存在しており、μ粒子の平均寿命をτとすると、$\triangle N$はどのように表わされるか。また、時刻tでのμ粒子の個数N(t)はどのように表わされるか。
4. 寿命の決定には、最小二乗法を用いる。n組の測定点$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$を直線$y = ax + b$に当てはめるとき、最小二乗法は、aとbの関数であるS=$\boxed{\text{(ア)}}$を最小になるように、すなわち、全微分の形で表わすとdS=$\boxed{\text{(イ)}}$=0となるようにaとbを決定する。この式を満足する必要十分条件は、$\boxed{\text{(ウ)}}$=0、$\boxed{\text{(エ)}}$=0が同時に満たされることであり、実際に偏微分を実行し、連立一次方程式を解けば、a=$\boxed{\text{(オ)}}$、b=$\boxed{\text{(カ)}}$となる。(ア)から(カ)に当てはまる式を求めよ。
5. $1\mu sec$の時間分解能をもつ時間差測定回路を用いて実際の測定を行ったところ、時間差が$1\mu sec$のときに640個、$2\mu sec$のときに400個、$3\mu sec$のときに256個のμ粒子の崩壊が観測された。μ粒子の平均寿命を最小二乗法を使って有効数字2桁で求めよ。必要ならば、$\ln 2 \sim 0.69$、$\ln 5 \sim 1.61$を用いよ。