平成 14 年度

信州大学大学院工学研究科博士前期課程

物質基礎科学専攻 (第 2 次募集)

入試問題

外国語科目 (英語)

I 物理学系、II 化学系の問題からいずれか選択して解答せよ。
選択した問題と、受験番号を記入して提出すること。

平成 14 年度 (2 次募集) 英語

[Ⅰ物理学系]

次の文章は，Dirac 著 “The Principles of Quantum Mechanics” からの引用である。

Classical mechanics has been developed continuously from the time of Newton and applied to an ever-widening range of dynamical systems, including the electromagnetic field in interaction with matter. The underlying ideas and the laws governing their application form a simple and elegant scheme, which one would be inclined to think could not be seriously modified without having all its attractive features spoilt. Nevertheless it has been found possible to set up a new scheme, called quantum mechanics, which is more suitable for the description of phenomena on the atomic scale and which is in some respects more elegant and satisfying than the classical scheme. This possibility is due to the changes which the new scheme involves being of a very profound character and not clashing with the features of the classical theory that make it so attractive, as a result of which all these features can be incorporated in the new scheme.

古典力学から離れる必要があることは実験の結果から明らかに示されている。まず第一に古典電気力学で知られている力は原子や分子が著しく安定なことを説明するには不適当であるが，そもそも物質が一定の物理的および化学的性質を持つためには原子や分子の安定さはどうしても必要である。The introduction of new hypothetical forces will not save the situation, since there exist general principles of classical mechanics, holding for all kinds of forces, leading to results in direct disagreement with observation. For example, if an atomic system has its equilibrium disturbed in any way and is then left alone, it will be set in oscillation and the oscillation will get impressed on the surrounding electromagnetic field, so that their frequencies may be observed with a spectroscope. Now whatever the laws of force governing the equilibrium, one would expect to be able to include the various frequencies in a scheme comprising certain fundamental frequencies and their harmonics. This is not observed to be the case. そのかわりにいろいろな振動数の間には，分光学のリッツの結合法則と呼ばれる新しい予想外の関係が観測されている。この法則によると，すべての振動数はいくつかの定まった項の差の形で表される。そしてこれらの項の数は振動数の種類よりもはるかに少ないのである。この法則は古典論の立場からは全く理解し難いものである。

One might try to get over the difficulty without departing from classical mechanics by assuming each of the spectroscopically observed frequencies to be a fundamental frequency

with its own degree of freedom, the laws of force being such that the harmonic vibrations do not occur. Such a theory will not do, however, even apart from the fact that it would give no explanation of the Combination Law, since it would immediately bring one into conflict with the experimental evidence on specific heats. Classical statistical mechanics enables one to establish a general connexion between the total number of degrees of freedom of an assembly of vibrating systems and its specific heat. If one assumes all the spectroscopic frequencies of an atom to correspond to different degrees of freedom, one would get a specific heat for any kind of matter very much greater than the observed value. In fact the observed specific heats at ordinary temperatures are given fairly well by a theory that takes into account merely the motion of each atom as a whole and assigns no internal motion to it at all.

(注：connexion = connection, リッツの結合法則 = Ritz's Combination Law)

(1) 第 1 段落 (Classical mechanics has ...) を和訳せよ。
(2) 第 3 段落 (One might try ...) を和訳せよ。
(3) 第 2 段落の和文 (古典力学から …) を英訳せよ。
(4) 第 2 段落の和文 (そのかわりに …) を英訳せよ。

平成14年度

信州大学大学院工学研究科博士前期課程

物質基礎科学専攻(第2次募集)

入試問題

専門科目 (物理学系)

次の6問中4問を選択して解答せよ。

1. 解答用紙は1問につき1枚使用し、無解答の場合でも必ず4枚提出すること。
2. 各解答用紙には、選択した問題番号、受験番号を必ず記入すること。
3. 必要ならば、解答用紙の両面を使用してもよい。

1

摩擦のない水平面上の点 O の周りに自由に水平面内で回転できる質量の無視できるバネが (バネ定数 k 、自然長 ℓ) がある。なおバネは伸び縮みするだけで曲がらないとする。このバネの O 点と反対側の端には質量 m の質点が取り付けられている。時刻 t での質点の位置を極座標 ($r(t), \theta(t)$) で表し、以下の問いに答えよ。

(1)　系 (バネと質点) の全エネルギー $E(t)$ を、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーに分けて記せ。

(2)　質点に働く力は中心力である。このとき角運動量が保存量となることを示せ。

(3)　角運動量ベクトルの絶対値を L として、これを使って (1) の全力学的エネルギーを書き直せ。

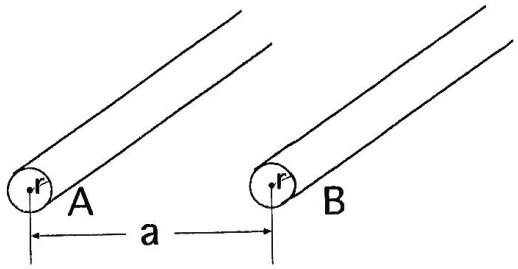
(4)　全力学的エネルギーのうち r 方向 (動径) の運動エネルギー以外の成分を有効ポテンシャルとして、これを r の関数として表し、さらに図表せよ。

(5)　質点が円運動するとき、半径の満たすべき方程式を記せ。

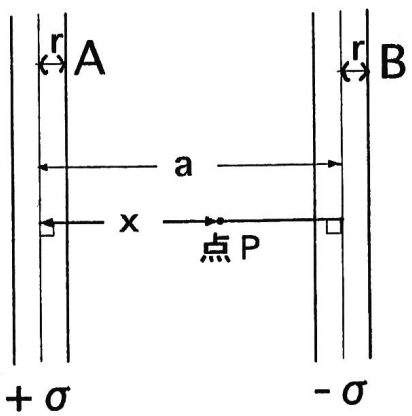
(6)　運動は周期的であることを示せ、また軌道はどのような形でその周期を求める式を書け。

2

半径 r の十分長い 2 本の円筒状の導体 A, B が距離 a ($r \ll a$) だけ離れて置かれている。これらの導体の中心軸方向の単位長さ当たりの電気容量を求める。



1) 導体 A、B にそれぞれ単位長さ当たり $+\sigma, -\sigma$ の電荷を与える。($r \ll a$ より、A, B お互いの影響は無視でき、電荷はそれぞれの表面上に一様に分布するとする。) このとき、 A, B の中心軸を垂直に結ぶ線上で、 A の中心軸から距離 x($r < x < a - r$) の点 P の電場を求めよ。



2) このとき、A、B 間の電位差を求めよ。

3) 単位長さ当たりの電気容量を求めよ。

3

1 次元空間において無限に深い井戸型ポテンシャル $V(x) = -U_0\delta(x)$ (U_0 は正の定数) の中に質量 m を持った粒子が存在し、Schrödinger 方程式にしたがっているとする。以下の問に答えよ。

1. 時間に依存しない Schrödinger 方程式を書き下せ。(粒子に関する波動関数を $\psi(x)$ とする。)

2. 原点 $(x = 0)$ で波動関数の一階微分 $\dfrac{d\psi(x)}{dx}$ は連続でないことを示せ。

3. 粒子のエネルギーを $E(< 0)$ とする。原点 $(x = 0)$ における波動関数 $\psi(x)$ の連続性を考慮に入れ、Schrödinger 方程式を解いて $\psi(x)$ を求めよ。

4. 束縛状態のエネルギー固有値を求めよ。

4

 理想気体のエントロピーは、定積モル比熱 C_v を定数とすると、1 モル当たり

$$s(T, v) = C_v \log T + R \log v$$

で与えられることを示せ。ここで、R は気体定数、v はモル体積で、不定な付加定数は明示してない。

 理想気体の断熱自由膨張は不可逆過程である。この過程でエントロピーが増加することを証明せよ。

 温度 T、圧力 p である二種類の理想気体が混合する過程でのエントロピーの変化は、混ぜるモル分率を、それぞれ、c、$1-c$ として、1 モル当たり

$$\Delta s = -R[c \log c + (1-c) \log(1-c)]$$

で与えられることを示し、これの混合の割合による変化をグラフに描け。

5

同種粒子の統計性は古典粒子と量子力学的粒子とでは異なっている。即ち、古典的粒子は原理的に区別可能だが、量子力学的粒子は原理的に区別不可能であると考える。以下のような考察によって、ボーズ分布とフェルミ分布を求めてみよう。

1) 同種の古典的粒子が温度 T で熱平衡にある。いま、二つのエネルギー状態 E_1 と E_2 を考え、それ らの状態を占める平均粒子数をそれぞれ n_1 と n_2 とする。又、状態 E_1 から状態 E_2 へ、1 個の粒子が単位時間に遷移する確率を $R_{1\to 2}$ 、状態 E_2 から状態 E_1 へ、1 個の粒子が単位時間に遷移する確率を $R_{2\to 1}$ とする。このとき、熱平衡条件を

$$n_1 R_{1\to 2} = n_2 R_{2\to 1} \tag{1}$$

とする。ところで、ボルツマン分布は

$$n(E) = Ae^{-\frac{E}{kT}} \tag{2}$$

但し k はボルツマン定数である。よって、(1) は

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{R_{2\to 1}}{R_{1\to 2}} = \frac{e^{-\frac{E_1}{kt}}}{e^{-\frac{E_2}{kt}}} \tag{3}$$

となる。

2) ボーズ粒子の場合の熱平衡の条件を

$$n_1 R_{1\to 2}^{boson} = n_2 R_{2\to 1}^{boson} \tag{4}$$

と書こう。ところで量子力学では同種粒子は原理的に区別不可能であると考えるから、ボーズ粒子の場合その波動関数は、対称波動関数でなければならない。このことから、“ もし、一つの量子状態に、すでに n 個のボーズ粒子があるなら、この量子状態にもう 1 個ボーズ粒子を加える確率は、量子力学的区別不可能性要請をしない時ときの確率の $(1+n)$ 倍になる。” この文章で、量子力学的区別不可能性の要請をしないときの確率とは、古典的粒子に対する確率とみなしてよい。この事実と、式 (4) と (3) を用いると、ボーズ分布

$$n(E) = \frac{1}{e^{\alpha} e^{\frac{E}{kT}} - 1} \tag{5}$$

が求まる。これを導け。但し、e^{α} は導出の際に、適当に定義した。

3)　フェルミ粒子の場合の熱平衡条件を

$$n_1 R_{1\to 2}^{fermion} = n_2 R_{2\to 1}^{fermion} \tag{6}$$

と書こう。ところで量子力学では同種粒子は原理的に区別不可能であると考えるから、フェルミ粒子の場合その波動関数は、反対称波動関数でなければならない。このことから、“もし、一つの量子状態に、すでに n 個のフェルミ粒子があるなら、この量子状態にもう 1 個フェルミ粒子を加える確率は、量子力学的区別不可能性の要請をしないときの確率の $(1-n)$ 倍になる。” この事実と、式 (6) と (3) を用いると、フェルミ分布

$$n(E) = \frac{1}{e^{\alpha} e^{\frac{E}{kT}} + 1} \tag{7}$$

が求まる。これを導け。

6 は以下の2問中1問に解答せよ。

6 の 1

1)

(a) 図 1 のような電球とコンデンサー C を直列につないだ回路に交流電圧 $V = 50V$ をかけた。電球の端子電圧 $V_1 = 47V$ 、C の端子電圧 $V_2 = 17V$ で加えると $64V$ となって、$50V$ と合わない。理由を説明せよ。

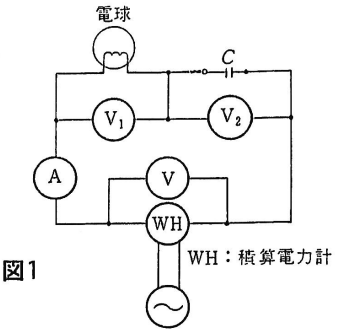


図1

(b) 上の回路で電流系 A は $0.1A$ を示した。電球の抵抗およびコンデンサー C の容量はいくらか。但し、交流の周波数を $50Hz$ とせよ。

2) 一般的に、負荷にかかる電圧を $v = V_m \sin(\omega t)$ 、負荷に流れる電流を $i = I_m \sin(\omega t + \theta)$ とするとき、交流電力を求めよ。

3) 普通、家庭で使用している誘導型電力計 (交流) は説明が複雑なので、直流積算電力量計 (図 2) で原理を簡単に説明してみよう。モーターに回転円板、それに永久磁石がついていると思えばよい。負荷電流 i をコイル C_1 、C_2 に流し、負荷電圧 e を整流子を通して電気子 A に加える。このとき A には e に比例した電流 i_e が流れるので、A には i と e に比例した駆動トルク $T_D = K_1 ei$ が生じ、円板 D が回る。このとき、円板に回転の角速度 $\frac{d\theta}{dt}$ に比例した制動トルク $T_C = K_2 \cdot \frac{d\theta}{dt}$ が生じるという。

(a) 円盤に何が誘起するのか。

(b) T_D と T_C の式から電力の積算が出来ることを説明せよ。

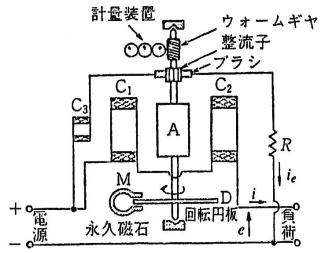
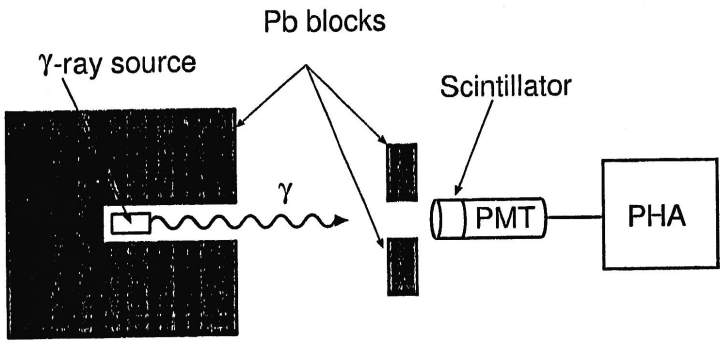


図2

6 の 2

下図に示す測定装置を作り、ある γ 線源から出て来る γ 線のエネルギーを測定した。



この図で、PHA(Pulse Height Analyzer) は波高分析器、PMT(PhotMultiplier Tube) は光電子増倍管を表す。

1. シンチレーターと光電子増倍管からなる検出器を、シンチレーション検出器と呼ぶ。シンチレーターに放射線が入ってから、光電子増倍管から電気信号が出てくる原理を次の二つの観点から説明せよ。
   (a) シンチレーターに放射線が入射したとき起こる反応
   (b) 光電子増倍管の動作原理

2. γ 線と物質 (この場合にはシンチレーター) の相互作用には、
   (a) 光電効果
   (b) コンプトン効果
   (c) 電子対創生
   の三種類がある。それぞれの相互作用が起こった場合に波高分析器で観測される γ 線のエネルギー分布を描き、なぜそのような分布が得られるかを説明せよ。

3. コンプトン効果が起こった時に、散乱された γ 線のエネルギー E'_γ と散乱電子のエネルギー T_e を求めよ。また、波高分析器で観測されるエネルギーの最大値を求めよ。ただし、入射 γ 線のエネルギー E_γ 、電子の質量を m_e 、光子を c 、入射 γ 線と散乱 γ 線のなす角 θ とする。