平成１５年度

信州大学大学院工学系研究科博士前期課程
物質基礎科学専攻

入試問題

専門科目（物理学系）

次の６問中４問を選択して解答せよ。

１．解答用紙は１問につき１枚使用し、無解答の場合でも必ず４枚提出すること。
２．各解答用紙には、選択した問題番号、受験番号を必ず記入すること。
３．必要ならば、解答用紙の両面を使用してもよい。

1

支点が水平方向に振動する単振り子を例に、強制振動について考えてみよう。以下の文章中の［　　　］に文字、数式、記号などを入れて文章を完成せよ。

図のように支点が時間の関数として水平方向に動かされているとする。振り子のおもりの鉛直座標（下向きにy）と水平座標（x）は、支点Pの座標を（x_s, 0）とすると、（x_s+x, y）である。糸の長さを ℓ とすると x と y は、

$x = \ell \sin\theta$,　　$y = \ell\cos\theta$

となる。おもりの運動エネルギーTは、

T = ［　　　　　　　　　　］

でポテンシャルエネルギーVは、重力加速度をgとして、

V = ［　　　　　　　　　　］

である。したがってラグランジュ関数Lは

L = ［　　　　　　　　　　］

となる。したがって、一般化座標 θ による微分を使ってラグランジュ方程式から、おもりの運動方程式は θ、$d^2\theta/dt^2$、g、ℓ、d^2x_s/dt^2 を用いて

［　　　　　　］ $= -(d^2x_s/dt^2)\cos\theta$

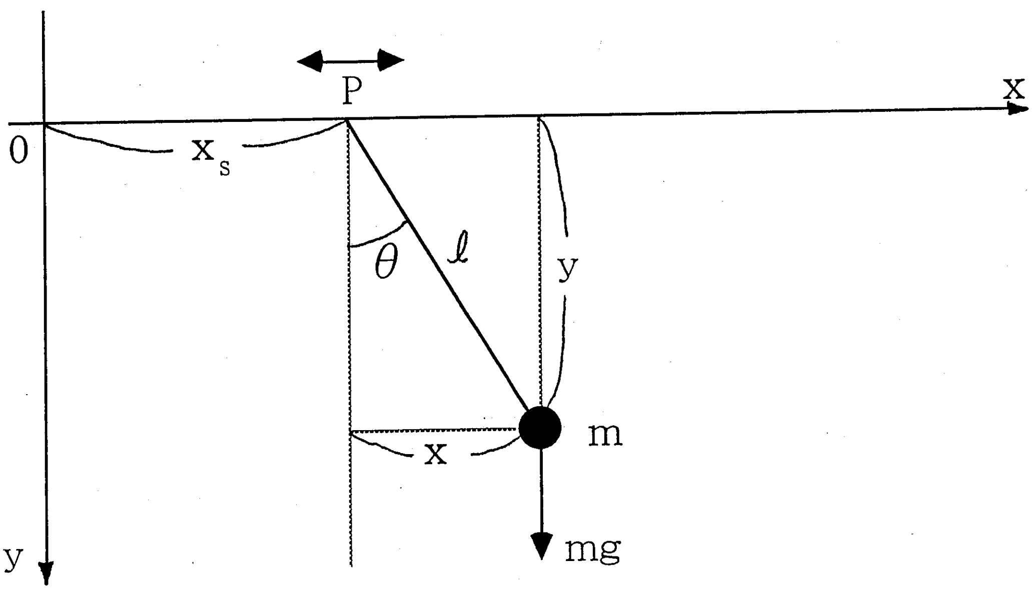
と書ける。角度変化が小さく、支点の運動が正弦振動

$x_s = A_0\cos\omega t$

で表すことができる場合は、

［　　　　　　　　　　　　　　　　　　］

となる。これは、抵抗のない強制振動子の式と数学的に同じものである。



2

次の各質問に解答しなさい。答案用紙には各質問番号を明記しなさい。

１）静電気学及び静磁気学において電場及び磁場の満たす方程式を記せ。法則の名称を書きさらに物理量も定義せよ。

２）次に磁場が時間的に変化する場合、電磁誘導の法則が成り立つ。その法則を２つの形式（普通の式と微分形式）で書いて内容を説明しなさい。

３）これらの式が、矛盾なくまとまるか考察しなさい。

４）３）の問題に Maxwell はどんな解決案を提出したか。

５）４）の実験的検証はどうしたか。

６）真空中の電磁波の波動方程式を導き、伝播速度を求めよ。

但し、$\epsilon_0 = 8.85\mathrm{x}10^{-12}$[F/m], $\mu_0 = 1.257\mathrm{x}10^{-6}$ [H/m].

3

A. 一次元調和振動子を復習しておく。座標を q，正準共役運動量を p，質量を m，角振動数を ω とする時，ハミルトニアン H 及び消滅演算子 a は

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2, \quad a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,q + \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\,p$$

と定義される。$|0\rangle$ を規格化された基底状態とする時，H の規格化された固有状態は $|n\rangle \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{n!}}a^{\dagger n}|0\rangle$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ で与えられ，完全系をなしている。

(1) q と p の正準交換関係を書け。

(2) 座標を対角化する表示 (座標表示) で p を書け。そしてその式を用いて，実際に (1) が成立している事を示せ。

(3) (1) を用いて a と $a^\dagger$ の交換子を計算せよ。

(4) H を (q, p を用いずに) a と $a^\dagger$ を用いて表せ。

(5) (3)(4) を用いて H と $a^\dagger$ の交換子を計算せよ。

(6) (5) を用いて $|n\rangle$ のエネルギー固有値を求めよ。

(7) (3) を用いて $[a, a^{\dagger n}] = n a^{\dagger n-1}$ $(n \geq 1)$ を示せ。

(8) (7) を用いて $|n\rangle$ が規格化されている事を示せ。

B. 二次元調和振動子 (独立な 2 つの調和振動子からなる系) を考える。ハミルトニアン H 及び消滅演算子 a_j $(j = 1, 2)$ を

$$H = \frac{1}{2m_1}p_1^2 + \frac{1}{2}m_1\omega_1^2 q_1^2 + \frac{1}{2m_2}p_2^2 + \frac{1}{2}m_2\omega_2^2 q_2^2, \quad a_j = \sqrt{\frac{m_j\omega_j}{2\hbar}}\,q_j + \frac{i}{\sqrt{2\hbar m_j\omega_j}}\,p_j$$

とし，規格化された基底状態を $|0, 0\rangle$ とする。

(9) $[a_j, a_k^\dagger]$, $[a_j, a_k]$, $[a_j^\dagger, a_k^\dagger]$ を書け。

(10) H を (q_j, p_j を用いずに) a_j と $a_j^\dagger$ を用いて表せ。

(11) エネルギー固有値と規格化された固有状態を書け。

(12) エネルギー固有値に縮退が存在するための必要十分条件を求めよ。

C. B で $m_1 = m_2 = m$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ の場合を考える (二次元等方調和振動子)。この場合には縮退が最大に起こっているが，その理由を考察しよう。

(13) エネルギー固有値が $\hbar\omega(n+1)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ の場合，縮退度はいくらか。

(14) (13) の場合の規格化された固有状態を一組書け。

2行2列のユニタリ行列 U に対して，$\begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ とする時，$(a'_j, a'^\dagger_j)$ は $(a_j, a^\dagger_j)$ と同じ交換関係を満たすので，元の (q_j, p_j) で見ればこの変換は正準変換である。また，H で $(a_j, a^\dagger_j)$ を $(a'_j, a'^\dagger_j)$ で置き換えたものは勿論 H に等しい。よって，この変換の無限小変換の生成元は H と交換し，その生成元によって移り合う状態は同じエネルギー固有値を持つ事になり，縮退が生じる。2行2列のユニタリ行列は実パラメーターを4つ持ち，適当にパラメーターを選んだ場合に，この変換の4つの無限小変換の生成元は

$$J = a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2, \quad J^3 = \frac{1}{2}(a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2), \quad J^+ = a_1^\dagger a_2, \quad J^- = a_2^\dagger a_1$$

で与えられる。

(15) $[J^3, J^\pm]$, $[J^+, J^-]$ を計算し，$J^3, J^\pm$ を用いて表せ。

(16) $[J, J^3]$, $[J, J^\pm]$ を計算せよ。

H と J は簡単な関係にあるので，(16) から H が $J, J^3, J^\pm$ と交換する事がすぐ分かる。(13) の答を M と記し，(14) の答として J^3 の固有状態にもなっているものを選ぶ事とし，その状態を J^3 の固有値の大きい方から $|1\rangle, |2\rangle, \cdots, |M\rangle$ と書く事にする。これらの状態が $J^\pm$ で移り合うために M 重の縮退が生じているのである。

以下では (13) で $n = 2$ の場合を考える。

(17) $|1\rangle, |2\rangle, \cdots, |M\rangle$ を書け。また，その J^3 固有値を書け。

(18) $J^\pm|1\rangle, J^\pm|2\rangle, \cdots, J^\pm|M\rangle$ を計算し，$|1\rangle, |2\rangle, \cdots, |M\rangle$ を用いて表せ。

(19) 行列 $\rho(X) = \big(\rho(X)_{ij}\big)$ を $X|j\rangle = \sum_{i=1}^{M} |i\rangle \rho(X)_{ij}$ と定義する時，$\rho(J)$, $\rho(J^3)$, $\rho(J^\pm)$ を求めよ。

4

質量 m で固有振動数 ω の独立な 3 次元等方的調和振動子 N 個が温度 T の熱平衡状態にあるとして以下の問いに答えよ。(ボルツマン定数を k とし、$\beta = \frac{1}{kT}$ とする)

1. 振動子が古典的な粒子であるとして、この系の分配関数 Z_c を求めよ。
2. 振動子が量子力学的な粒子であるとして、この系の分配関数 Z_q を求めよ。ただし、調和振動子 1 個のエネルギー固有値 (ε) は
$$\varepsilon = \hbar w \left(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2} \right)$$
であるとする。(n_z, n_y, n_z の取り得る値は 0 と正の整数, プランク定数を h として、$\hbar = \frac{h}{2\pi}$ とする)
3. $h \to 0$ の極限において Z_q がどのような値に漸近するか求めよ。
4. 振動子が電荷 $-e$ の古典的な粒子であるとし、系全体が一様な電場 $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ 中にあるとする。$N = 1$ として分極ベクトル $\vec{P} = e\langle \vec{r} \rangle$ を求めよ。ただし $\langle \vec{r} \rangle$ は振動子の位置ベクトルの統計力学的な平均値である。

必要なら以下の式を用いても良い。
半径 r の f 次元球の表面積 S_f は

$$S_f = \frac{f\pi^{\frac{f}{2}}}{\Gamma\left(\frac{f}{2}+1\right)} r^{f-1}$$

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \qquad (x > 0)$$

5

文章中の空欄に適当な式あるいは語句を入れ、文章を完成させよ。ただし、空欄の（ア）～（エ）および（キ）～（セ）については、下に指定した記号を用いた数式を入れよ。(指定した記号全部を使用する必要はない。)（オ）と（カ）は語句を、(ソ）は数式を入れよ。

ド・ブロイの発想は、「波と考えられていた光が粒子として振る舞うことから、粒子と考えられる電子は波としても振る舞うであろう。そして、光のエネルギーと振動数、運動量の大きさと波長に関するアインシュタインの関係式が、電子の場合にも成立するにちがいない。」であった。電子の質量をm、速さをv、電子を波とみなした場合の振動数をν、波長をλとする。また、プランク定数をhと記す。ニュートン力学とド・ブロイの発想を用いると電子のエネルギーEと運動量の大きさpに対して、次の関係式が導かれる。

$$E = \boxed{\text{（ア）}} = \boxed{\text{（イ）}}, \qquad p = \boxed{\text{（ウ）}} = \boxed{\text{（エ）}} \tag{1}$$

電子に限らず、すべての物質は波の性質を有していると考えられる。このような物質に付随する波を$\boxed{\text{（オ）}}$、その波長を$\boxed{\text{（カ）}}$と呼ぶ。電子の$\boxed{\text{（カ）}}$は次の公式に従う。

$$\lambda = \boxed{\text{（キ）}} \tag{2}$$

電子の波の進行速度（位相速度）の大きさ(v_{p})は$v_{\mathrm{p}} = \nu\lambda = \boxed{\text{（ク）}}$で与えられる。また、電子の波の群速度の大きさ$(v_{\mathrm{g}})$は$v_{\mathrm{g}} \equiv \dfrac{\partial \nu}{\partial(1/\lambda)} = \boxed{\text{（ケ）}}$で与えられる。

ボーアの水素原子模型において、振動数条件は$mv \cdot 2\pi a = nh$で与えられる。ここで、aは電子の軌道半径（ここでは、円軌道を想定している。)、nは自然数である。振動数条件と公式(2)を使うと$\lambda = \boxed{\text{（コ）}}$が導かれる。この式から電子の波は一周したのち、元に戻ることを意味している。

最後に波としての電子が満たす方程式を求めてみよう。簡単のため、空間は1次元（その座標を x）とし、波は、x の正の方向に進行しているとする。電子のエネルギー E と運動量の大きさ p に関する公式 (1) を使うと電子の波 $\psi(=\psi(x,t))$ は、

$$\psi = Ae^{2\pi i\left(\boxed{\text{（サ）}}-\nu t\right)} = Ae^{\frac{i}{\hbar}\left(\boxed{\text{（シ）}}\right)} \tag{3}$$

と書ける。ここで、$\hbar \equiv \dfrac{h}{2\pi}$ である。ψ に関する公式 (3) を使って、

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi = \boxed{\text{（ス）}}\psi, \quad \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial \boxed{\text{（セ）}}}\psi = p\psi \tag{4}$$

よって、電子のエネルギーや運動量は ψ に作用する微分演算子と解釈される。電子はポテンシャル $V(x)$ を受けてニュートン力学に従い運動しているとする。つまり、E と p の間に $E = \dfrac{1}{2m}p^2 + V(x)$ が成立するとする。この関係式と (4) 式を使って、ψ が従う方程式は、

$$-\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi = \boxed{\text{（ソ）}}\psi + V(x)\psi \tag{5}$$

となる。この方程式は（1次元空間における）シュレディンガー方程式である。

使用してよい記号：

（ア）と（ウ）	$(m,\ v)$	（コ）	$(a,\ n,\ \pi)$
（イ）と（エ）	$(h,\ \nu,\ \lambda)$	（サ）	$(\lambda,\ \nu,\ x,\ t)$
（キ）	$(h,\ m,\ v)$	（シ）〜（セ）	$(p,\ E,\ x,\ t)$
（ク）と（ケ）	$(m,\ v)$		

6 は以下の２問中１問に解答せよ。

6 の１

1　　ガンマ線と物質との相互作用のうち、放射線計測上重要な3つの過程を挙げ、それらの過程がどのような領域で支配的になるか、ガンマ線のエネルギーと物質の原子番号をそれぞれ横軸、縦軸とした模式図で示せ。

2　　ガンマ線や中性子等の非電荷性放射線は検出器との相互作用後に検出が可能となるため、検出効率は100%以下になる。従って、計数と入射放射線の数を関係付けるためには、検出器の効率を求める必要がある。一般に、検出器の効率を表すには、絶対効率と固有効率の 2 種類が用いられることが多い。これらの定義を述べよ。

3　　シンチレータ結晶を用いたエネルギー計測の場合、エネルギー分解能（単一エネルギーの放射線に対する計測エネルギーの分布幅）に影響を与える重要な要因の一つは統計的な広がりであり、シンチレーション検出器の場合はシンチレーション光が光電陰極において光電子に変換された後、すなわち光電子の統計が重要である。いま、シンチレーション検出器でガンマ線のエネルギーを測定する場合を考える。シンチレーション効率=12%、シンチレータ結晶中および結晶表面と光電子増倍管の境界における光の損失率=25%、光電陰極の平均量子効率=20%とした場合、エネルギー分解能への統計の寄与はどれほどになるか。ただし、ガンマ線は正確に 0.5MeV の電子エネルギーをシンチレーション結晶中に付与するものと仮定し、また、光のエネルギーは 3eV として計算せよ。

$\boxed{6}$ の2

1.試料の温度を測定するツールとして熱電対がある。これについて説明せよ。

2.超伝導体の超伝導転移温度(Tc)を測定したい。測定方法を2つ挙げ、それについて説明せよ。

3.磁場〔磁界〕を測定する方法を2つ挙げ、それについて説明せよ。