平成１５年度

信州大学大学院工学系研究科博士前期課程
物質基礎科学専攻（第２次募集）

入試問題

専門科目（物理学系）

次の６問中４問を選択して解答せよ。

１．解答用紙は１問につき１枚使用し、無解答の場合でも必ず４枚提出すること。
２．各解答用紙には、選択した問題番号、受験番号を必ず記入すること。
３．必要ならば、解答用紙の両面を使用してもよい。

1

半径 R の固定された円筒の内面に沿ってころがる、質量が M で半径 a の一様な円柱の運動を考えてみよう。以下の文章中の $\boxed{}$ に文字、数式、記号などを入れて文章を完成せよ。

下図のように円筒と円柱の両方の中心を結ぶ直線と鉛直線とのなす角を θ とする。円柱の中心の並進速度 v は、

v = $\boxed{}$

また、円柱の軸のまわりの回転の角速度 ω は、

ω = $\boxed{}$

円柱の軸のまわりの慣性モーメント I は、

I = $\boxed{}$

である。円柱の運動エネルギー T は並進運動エネルギーと回転運動エネルギーの和であるから、

T = $\boxed{}$

と表される。

また、ポテンシャルエネルギー V は、

V = $\boxed{}$

となる。したがって、この円柱の運動のラグランジュ関数 L は、

L = $\boxed{}$

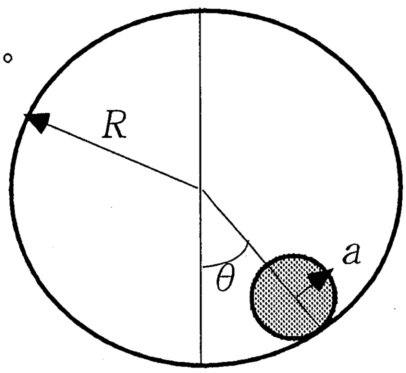
と表される。このラグランジュの運動方程式を解くと円柱の運動方程式

$\boxed{}$

が得られる。これから、この円柱の運動は、長さ l が

l = $\boxed{}$

の単振り子の振動と同じであることが分かる。



2

起電力 V_0の電池と、抵抗 Rを含む図のような回路のPQに、最初（a）のコンデンサー（電気容量 C ）を接続し、次に（b）のコイル（自己インダクタンス L ）を接続し、最後に（c）を接続して、スイッチを操作した。

電池の内部抵抗は無視できるものとして、次の各問いに答えよ。

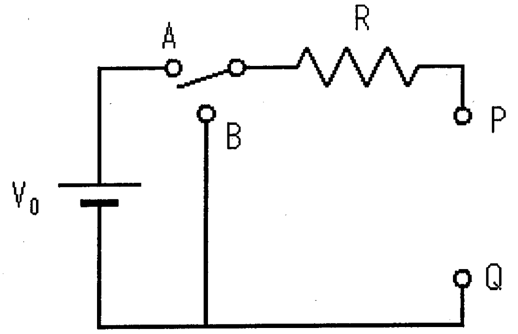
（1）はじめ（a）を接続したとき、$t = 0$ でスイッチをA側につないで、コンデンサーを充電し始めた。コンデンサーに蓄えられる電気量 $Q(t)$、および電流 $I(t)$ を求めよ。

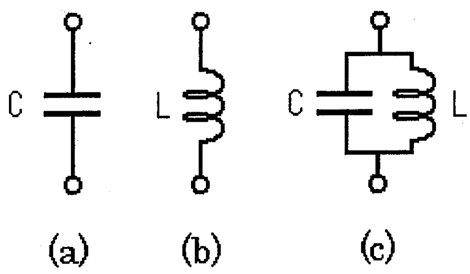
（2）次に、充分時間がたってからスイッチをB側に倒した。そのあと、抵抗 Rで発生するジュール熱を求めよ。

（3）続いてPQに（b）を接続して、$t = 0$ でスイッチをA側につないだ。コイルに流れる電流 $I(t)$ を求め、そのグラフを描きなさい。

（4）充分時間がたってからスイッチをB側に倒した。そのあと、抵抗 Rで発生する熱エネルギーを求めよ。

（5）最後にPQに（c）を接続して、スイッチをA側につなぎ、充分時間がたってからスイッチをB側に倒した。そのときどのような現象が起きるか説明せよ。





3

一直線上を運動する質量 m の粒子の定常状態を考察しよう。その直線を x 軸とし，ポテンシャルを $V(x)$ とする。

(1) 波動関数を $\psi(x)$，エネルギーを E とし，Schrödinger 方程式を書け。

(2) $V(x) \geq V_{\min}$ ならばエネルギー固有値 は $E \geq V_{\min}$ を満たす事を示せ。

以下では $V(x) = \infty$ $(|x| > a)$ とし，粒子は区間 $[-a, a]$ に閉じ込められているとする。先ず $V(x) = 0$ $(|x| \leq a)$ の場合を考える。

(3) $x = \pm a$ での境界条件を書け。

(4) $x = \pm a$ での境界条件を考慮せずに Schrödinger 方程式を解いて，$\psi(x)$ を求めよ。

(積分定数は未定のまま残しておくように。また，E と 0 の大小関係に注意せよ。)

(5) $x = \pm a$ での境界条件を考慮してエネルギー固有値を決定せよ。

(6) 規格化された波動関数を求めよ。

次に $V(x) = \begin{cases} 0 & (b < |x| \leq a) \\ V_0 & (|x| \leq b) \end{cases}$ (V_0 は正の定数) の場合を考える。

(7) 波動関数を $\psi(x) = \begin{cases} \psi_{\mathrm{I}}(x) & (b < x \leq a) \\ \psi_{\mathrm{II}}(x) & (-b \leq x \leq b) \\ \psi_{\mathrm{III}}(x) & (-a \leq x < -b) \end{cases}$ とおき，Schrödinger 方程式を書け。

(8) $x = \pm a$ での境界条件を書け。

(9) $x = \pm b$ での境界条件を書け。

(10) $x = a$ での境界条件のみを考慮して Schrödinger 方程式を解いて，$\psi_{\mathrm{I}}(x)$ を求めよ。

(規格化定数は未定のまま残しておくように。また，E と 0 の大小関係に注意せよ。)

このまま Schrödinger 方程式を解いていってもよいが，このポテンシャルは偶関数なので固有関数を偶関数または奇関数に選べる事を利用すると見通しが良くなる。

$\psi(x)$ が偶関数の場合を考える。

(11) $\psi_{\mathrm{III}}(x)$ を $\psi_{\mathrm{I}}(x)$ を用いて表せ。

(12) $x = \pm b$ での境界条件を考慮せずに Schrödinger 方程式を解いて，$\psi_{\mathrm{II}}(x)$ を求めよ。

(規格化定数は未定のまま残しておくように。また，E と V_0 の大小関係に注意せよ。)

(13) $x = b$ での境界条件を考慮して，エネルギー固有値 E が満たすべき条件式を求めよ。

そしてこの条件を満たすエネルギー固有値に応じて波動関数が決定される事になる。$\psi(x)$ が奇関数の場合も同様に計算できる。

4

一、

騒音や効率の見地から外燃機関のひとつスターリング機関は注目されている。構造は風変わりで、容積の違う二つの気筒をつなぎ、それらの中を往復するピストンの位相は九十度ずれている。さて、その動作の詳細は省略するが、この機関は二つの等温過程と二つの等積過程から構成された循環過程で近似できる。作業物質を理想気体として、

(1) この循環過程の $p-V$ 図を描け。

(2) この機関の熱効率を計算せよ。

二、

古典力学に従う調和振動子系が温度 T の熱浴と平衡にあるときの変位の二乗平均を

(1) 一次元振動子、及び、

(2) 三次元振動子の場合について計算せよ。

5

長岡・ラザフォードの原子模型に基づいて、水素原子の安定性について議論しよう。文章中の空欄に適当な語句、数式あるいは数値を入れ、文章を完成させよ。ただし、空欄の（エ）～（ク）については、下に指定した記号を用いた数式を入れよ。(指定した記号全部を使用する必要はない。) また、(ケ) を求めるために、次の数値を使え。素電荷 $e = 1.6 \times 10^{-19}$C、真空の誘電率 $\varepsilon_0 = 8.9 \times 10^{-12} \mathrm{C}^2/(\mathrm{N \cdot m}^2)$、光の速さ $c = 3.0 \times 10^8$m/s、電子の質量 $m = 9.1 \times 10^{-31}$kg

長岡・ラザフォードの原子模型とは、正電荷が原子の中心付近に集中していて (このような中心核は $\boxed{（ア）}$ と呼ばれている)、この回りを電子が太陽系の惑星のように運行している模型である。この場合、クーロン力が向心力として働いている。

マックスウェルの電磁気学によれば、加速度運動をしている荷電粒子は $\boxed{（イ）}$ を放出しながら、エネルギーを失う。よって、長岡・ラザフォードの原子模型における電子の軌道半径の大きさは時間とともに $\boxed{（ウ）}$ すると予想される。このため、原子の安定性は保証されない。

以下、水素原子を例にとって、どのくらい速やかに電子の軌道半径の大きさが変化するかを計算しよう。電子の回転半径の大きさを r、速さを v、回転の角速度の大きさを ω とすると、電子の動径方向の運動方程式は

$$\boxed{（エ）} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} \qquad (1)$$

で与えられる。π は円周率である。従って、電子の加速度の大きさ a は、

$$a = \boxed{（オ）} \qquad (2)$$

である。また、電子のエネルギーEは(1)式を使って

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r} = \boxed{\text{（カ）}} \tag{3}$$

のようになる。

一方、マックスウェルの電磁気学によると、単位時間当たりに電子が失うエネルギーは次式で与えられる。

$$\frac{d}{dt}E = -\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}a^2 \tag{4}$$

(2)式と(3)式と(4)式を使って、rに関する次の微分方程式が得られる。

$$\frac{d}{dt}r = \boxed{\text{（キ）}} \tag{5}$$

(5)式を積分することによりrが$r_0(>0)$から0になるまでに要する時間τに関する公式を求めると

$$\tau = \boxed{\text{（ク）}} \tag{6}$$

となる。r_0の値として、ボーア半径$r_B = 5.3 \times 10^{-11}$mを用いると、(6)式から$\tau$の値は$\boxed{\text{（ケ）}}$sとなる。

使用してよい記号：

（エ）　$(m,\ r,\ v,\ \omega)$

（オ）　$(m,\ r,\ e,\ \varepsilon_0,\ \pi)$

（カ）　$(r,\ e,\ \varepsilon_0,\ \pi)$

（キ）　$(m,\ r,\ e,\ \varepsilon_0,\ c,\ \pi)$

（ク）　$(m,\ r_0,\ e,\ \varepsilon_0,\ c,\ \pi)$

6 は以下の２問中１問に解答せよ。

6 の１

1　　ある測定を行い、表のようなデータの組を得た。このデータに関する回帰直線を最小二乗法で求めよ。ただし、導出過程及びその過程で用いる数値についても記述すること。誤差は考えなくて良い。

測定量A	測定量B
1.0	2.3
2.0	3.7
3.0	6.9

左の表はAの値を 1.0 ずつ変化させ、Bの量を測定した結果である。

2　　放射線のイオン化作用を利用した測定器で測定されたγ線のエネルギースペクトルに対して正規分布でフィッティングを行った結果、分布は$Q = ae^{-b(E-m)^2}$で表された。a=2.4, b=2.0, m=101.2 であったとして次の問いに答えよ。

(1) 分布の半値幅を求めよ。

(2) 検出器のエネルギー分解能を求めよ。

3　　比例計数管を用いて宇宙放射線を測定する場合を考える。入射放射線の方向分布を調べるために必要な望遠鏡システムを２つ考えよ。ただし、検出器は理想的な能力を持つものとし、信号処理の回路は考えなくて良い。

6 の２

試料の結晶構造や格子定数を決定する方法として、x 線の回折実験がある。

1.固有 x 線の発生機構を述べよ。

2.Debye-Scherrer 法により銅の格子定数を測定したい。原理と方法を述べよ。