平成１６年度

信州大学大学院工学系研究科
博士前期課程物質基礎科学専攻

入試問題

外国語科目（英語）

Ⅰ物理学系、Ⅱ化学系の問題からいずれかを選択して解答せよ。選択した問題と受験番号を必ず記入して提出すること。

[I物理学系]

下記の文章を読み、下の質問に答えよ。

Early in the 18th century, light was generally believed to consist of tiny particles. Of the phenomena mentioned in the preceding section, reflection, refraction, and the sharp shadows caused by the straight path of light were well known, and the characteristic of finite velocity was suspected. All of these phenomena except refraction clearly could be expected of streams of particles, and Isac Newton showed that refraction would occur if the velocity of light increased with the density of the medium through which it traveled.

This theory of the nature of light seemed to be completely upset, however, in the first half of the 19th century. During that time, Thomas Young studied the phenomena of interference, and could see no way to account for them unless light were a wave motion. Diffraction and polarization had also been investigated by that time. Both were easily understandable on the basis of a wave theory of light, and diffraction eliminated the "sharp-shadow" argument for particles. Reflection and finite velocity were consistent with either picture. The final blow to the particle theory seemed to have been struck in 1849, when the speed of light was measured in different media and found to vary in just the opposite manner to that assumed by Newton. Therefore, in 1850, it seemed finally to be settled that light consisted of waves.

Even then, however, there was the problem of the medium in which light waves traveled. All other kinds of waves required a physical medium, but light traveled through a vacuum - faster, in fact, than through air or water. The term ether was proposed by James Clerk Maxwell and his contemporaries as a name for the unknown medium, but this scarcely solved the problem because no ether was ever actually found. Then, near the beginning of the 20th century, came certain work on the emission and absorption of energy that seemed to be understandable only if one assumed light to have a particle or corpuscular nature. The external photoelectric effect, that is, the emission of electrons from the surfaces of the solids when light is incident on the surfaces, was one of these. At that time, then, science found itself in the uncomfortable position of knowing a considerable number of experimental facts about light, of which some were understandable regardless of whether light consisted of waves or particles, others appeared to make sense only if light were wavelike, and still others seemed to require it to have a particle nature.

The study of light deals with some of the most fundamental proparties of the physical world and is intimately linked with the study of the properties of submicroscopic particles on the one hand and with the properties of the entire universe on the other. The creation of electromagnetic radiation from matter and the creation of matter from radiation, both

of which have been achieved, provide a fascinating insight into the unity of physics. The same is true of the deflection of the light beams by strong gravitational fields, such as the bending of starlight passing near the Sun.

A classification of phenomena involving light according to their theoretical interpretation provides the clearest insight into the nature of light. When a detailed accounting of experimental facts is required, two groups of theories appear which, in the majority of cases, account separately for the wave and the corpuscular character of light. The quantum theories seem to obviate questions concerning this dual character of light, and make the classical wave theory and the simple corpuscular theory appear as two very useful limiting theories. It happens that the wave theories of light can cope with a considerable part of phenomena involving electromagnetic radiation. Geometrical optics, based on the wave theory of light, can solve many of the more common problems of the propagation of light, such as refraction, provided that the limitations of the underlying theory are not disregarded.

(1) 第１節を日本語に訳せ。

(2) 第３節を日本語に訳せ。

(3) 第５節を日本語に訳せ。

(4) 問題の文章全体を簡単に日本語で要約し、それを英語に訳せ。

平成１６年度

信州大学大学院工学系研究科
博士前期課程物質基礎科学専攻

入試問題

専門科目（物理学系）

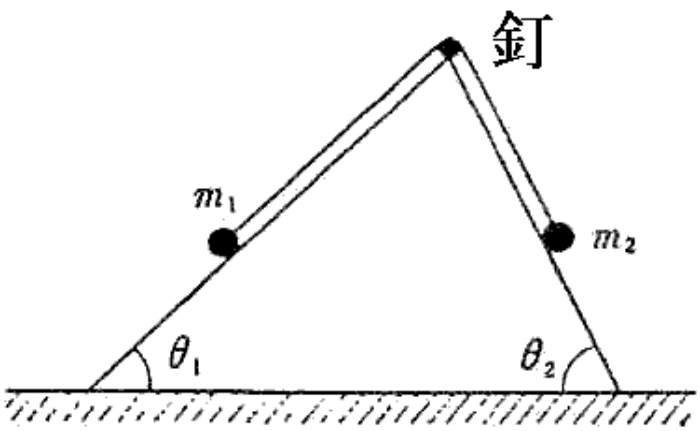
次の６問中４問を選択して解答せよ。

1. 解答用紙は１問につき１枚使用し、無解答の場合でも必ず４枚提出すること。
2. 各解答用紙には、選択した問題番号、受験番号を必ず記入すること。
3. 必要ならば、解答用紙の両面を使用してもよい。

1

問１．

(a) 水平面と角θ_1、θ_2をなす固定した複斜面がある。質量がm_1、m_2で斜面との動摩擦係数がμ_1'、μ_2'である２つの物体を糸の両端につけ、その糸を複斜面の頂点にあるなめらかな釘にかけてある。質量m_1の物体が角θ_1の斜面上をすべり落ちるとして、その加速度を求めよ。



(b) 釘のかわりに、半径a、慣性モーメントIの滑車とした場合、m_1のすべり落ちる加速度を求めよ。ただし、滑車と糸はすべらないものとする。

問２．平面上を運動する質量mの質点がある。適当な原点をとって質点の位置を極座標r、θで表したとき、ポテンシャルがrのみの関数$U(r)$で書かれるとき、Lagrangeの方程式から角運動量の保存則を導け。

2

図１のように抵抗 R、コンデンサー C、直流電流 V、スイッチ S を直列につないだ回路がある。時刻 $t=0$ でスイッチ S を閉じた。ただし、$t=0$ でコンデンサーの電荷 Q は $Q=0$ であるとする。コンデンサーは図２に示す通り、空気中に半径が a の２枚の円形電極板を距離 d だけ離れて向かい合わせに置いた並行平板コンデンサーである。また、コンデンサーの極板は十分広く、端の効果は無視することができる。空気の誘電率を ϵ_0、透磁率を μ_0 として、以下の問いに答えよ。

１）時刻 t における回路に流れる電流 I を求めよ。
２）時刻 t におけるコンデンサーの極板間の電場の大きさ E を求めよ。
３）時刻 t におけるコンデンサーの極板間の中心 O から中心軸と垂直に距離 r だけ離れた点 P(図３) での磁場の大きさ H を求めよ。
４）時刻 t までに極板間の空間に入る電磁場のエネルギーの総量をポインティング・ベクトルから求め、コンデンサーに蓄えられるエネルギー U（$U=Q^2/2C$）に一致することを示せ。

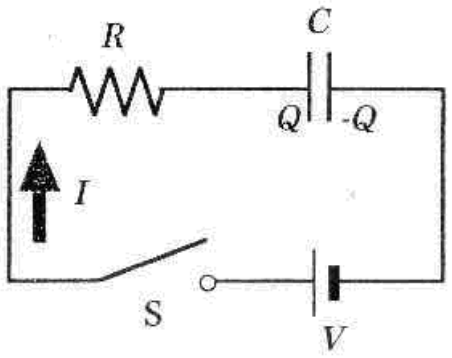


図1

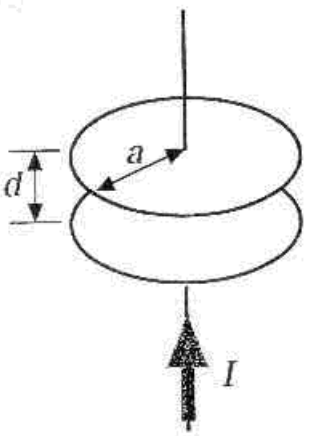


図2

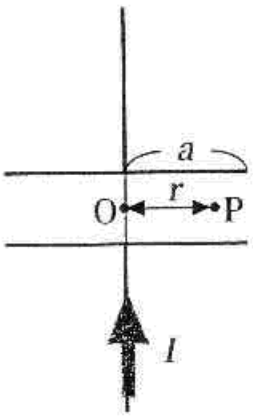


図3

3

1 次元空間における Schrödinger 方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)\right)\psi(x,t)$$

について、以下の問いに答えよ。ポテンシャル $V(x)$ は x に関する実関数とする。

1. 波動関数 $\psi = \psi(x,t)$ の複素共役 $\psi^*(x,t)$ が従う微分方程式を書き下せ。

2. 確率の保存を表す連続の方程式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0$$

を示せ。ここで、$\rho \equiv \psi^*\psi$ は確率密度、$J \equiv -\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi^*}{\partial x}\psi\right)$ は確率の流れ密度である。

3. ある時刻で規格化された波動関数 $\psi(x,t)$ はその後の任意の時刻においても規格化が保たれていること

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x,t)|^2dx = 0$$

を示せ。ただし、無限遠 $(x = \pm\infty)$ における $\psi(x,t)$ の値はゼロである。

4. 変数分離 $\psi(x,t) = T(t)\Phi(x)$ を行って、$T(t)$ に関する微分方程式を求め、解 $T(t) = \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)$ を得た。ここで E は積分定数である。$\Phi(x)$ が従う微分方程式を導け。

5. 前問の積分定数 E の値は実数であることを確率の保存則を用いて示せ。

4

全角運動量の大きさが J の原子 N 個の系を考える。各原子は並進および回転の自由度はなく、また各々の原子は独立であるとする。この系に磁場 $\boldsymbol{H}$ をかけると、i 番目の原子は磁場の方向に $g\mu_B m_i$（g、μ_B は定数。$m_i = -J, -J+1, \cdots, J-2, J-1, J$）の磁気モーメントを持ち、原子１個のエネルギーは $\epsilon_i = -g\mu_B m_i H (H \equiv |\boldsymbol{H}|)$、$N$ 原子全体のエネルギーは $E_N = \sum_{i=1}^{N} \epsilon_i$ となる。この系が温度 T で熱平衡状態にあるとき以下の問いに答えよ。ただし、ボルツマン定数は k_B とする。

(1) N 原子系の分配関数 Z_N が $Z_N = (Z_1)^N$ と書けることを証明せよ。

ただし、$Z_1 = \sum_{m=-J}^{J} \exp(\beta g\mu_B m H)$ とする。

(2) 全磁気モーメント $M = \sum_{i=1}^{N} g\mu_B m_i$ の平均値 $\langle M \rangle$ を求めよ。

(3) 高温 $(T \gg 1)$ で、磁化率 $\chi = \left(\frac{\partial \langle M \rangle}{\partial H}\right)_T$ が $\frac{1}{T}$ に比例することを示し、比例定数を求めよ。

(4) 古典的極限 $J \to \infty$, $g\mu_B \to 0$, $g\mu_B J = \mu_0$（μ_0 は有限の定数）で、

$$\langle M \rangle = \mu_0 \left(\coth \frac{\mu_0 H}{k_B T} - \frac{k_B T}{\mu_0 H} \right)$$

となることを示せ。

(5) 内部エネルギーを U として、比熱 $C_H = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_H$ を求めよ。

必要なら以下の近似を用いても良い。

$$\coth x \sim \frac{1}{x} + \frac{x}{3} \qquad (x \ll 1)$$

5

1900 年にプランクは空洞放射のプランクの公式を求めた。以下の問いに答えよ。

問１）一辺 L の立方体の空洞の壁の中の光の固有振動のモードで、波長が λ と $\lambda + d\lambda$ の間にあるものの数 P_λ は

$$P_\lambda = \frac{8\pi L^3}{\lambda^4} d\lambda \tag{1}$$

となることを示せ。

問２）波長が λ と $\lambda + d\lambda$ の間の放射が、エネルギー量子 1 個当たり ϵ_λ のエネルギーとして、N_λ 個分のエネルギーを持つとする。即ち、$E_\lambda = N_\lambda \epsilon_\lambda$ のエネルギーを持つ。このとき、N_λ 個分のエネルギーを P_λ 個のモードに分配する仕方の数 w_λ は

$$w_\lambda = \frac{(N_\lambda + P_\lambda - 1)!}{N_\lambda!(P_\lambda - 1)!} \tag{2}$$

となることを示せ。

問３）空洞放射の全エネルギー $E = \sum_\lambda N_\lambda \epsilon_\lambda$（=一定）が与えられているとき、各モードへの分配の仕方は、問２）から、$W = \prod_\lambda w_\lambda$ 通りである。分配の仕方の数 W を最も大きくするものが最も起こりやすいと考えて、そのときの N_λ を求めると、$N_\lambda, P_\lambda \gg 1$ として、

$$N_\lambda = \frac{1}{e^{\beta\epsilon_\lambda} - 1} P_\lambda \tag{3}$$

となることを示せ。ここで、β は後で決めるべき定数である。

問４）波長が λ と $\lambda + d\lambda$ の間の放射の単位体積当たりのエネルギー密度 $u(T, \lambda)$ は

$$u(T, \lambda) d\lambda = \frac{N_\lambda \epsilon_\lambda}{L^3} \tag{4}$$

と与えられる。但し、T は空洞の温度である。この式に、式 (1) と (3) を代入すると、

$$u(T, \lambda) d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} \frac{\epsilon_\lambda}{e^{\beta\epsilon_\lambda} - 1} d\lambda \tag{5}$$

となる。ここで、エネルギー量子 ϵ_λ を、

$$\epsilon_\lambda = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \tag{6}$$

とおく。但し、h はプランク定数、ν は振動数であり、c は光速である。式 (5) は

$$u(T,\lambda)d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{\beta hc}{\lambda}}-1}d\lambda \tag{7}$$

となる。ここで β を決める。長波長で式 (7) はレーリー・ジーンズの公式、

$$u(T,\lambda) = \frac{8\pi}{\lambda^4}k_BT \tag{8}$$

に一致するということから、

$$\beta = \frac{1}{k_BT} \tag{9}$$

となることを示せ。但し、k_B はボルツマン定数である。これを式 (7) に代入して、

$$u(T,\lambda)d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_BT}}-1}d\lambda \tag{10}$$

これが求めたかったプランクの公式である。

6は以下の2問中1問を解答せよ。

6の1

携帯電話やＰＨＳなどの移動体通信に使用されている電波の波長を実験的に求めたい。自ら実験することを想定して以下の「測定原理」、「実験方法」、「使用する器具、道具、装置など」、「測定結果の解析方法」、「実験上の注意」をなるべく詳しく述べよ。図などを使ってわかりやすく記述することが望ましい。

1. 波長測定の原理
2. 実験方法
3. 実験に必要な器具、道具、装置など
4. 測定結果の解析方法
5. 実験上の注意

6の2

次の問に答えよ。

図１は伝送線の等価回路を表している。L と C は、それぞれ伝送線の単位長さ当たりのインダクタンスと電気容量である。伝送線上の位置 x、時刻 t における電圧 $\dot{V}(x,t) = V(x)e^{i\omega t}$ と電流 $\dot{I}(x,t) = I(x)e^{i\omega t}$ を求めてみよう。

（１）図２のように、微小距離 Δx だけ進んだときの電圧と電流の増加分を ΔV、ΔI とするとき、ΔV と ΔI はそれぞれどのように表されるか。

（２）$\Delta x \to 0$ の極限において、$V(x)$ と $I(x)$ が満たすべき微分方程式を求めよ。

この微分方程式を解くことにより、伝送線に関する様々な情報が得られる。

（３）この伝送線の特性インピーダンスを求めよ。

（４）この伝送線を伝わる信号の位相速度 (ω/k) を求めよ。ただし、k は波数とする。

特性インピーダンスが 75Ω の長い伝送線がある。

（５）この伝送線の一方の端から、図３ (a) のようなパルスを入力し、他端に３通りの負荷抵抗 R_1、R_2、R_3 を付けて、オシロスコープで入力側の波形を見たところ、それぞれ、図３ (b)、(c)、(d) のような波形が観測された。このときの R_1 と R_3 の抵抗値を推定しなさい。

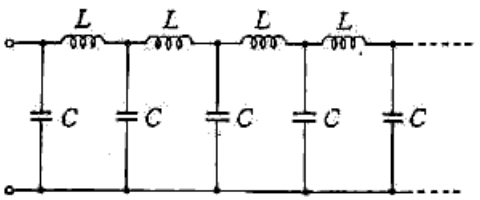


図１

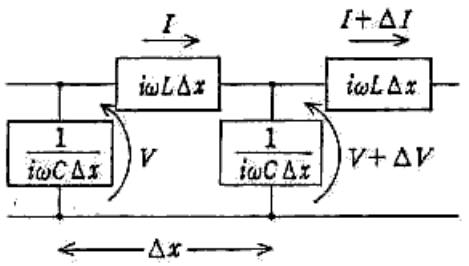


図２

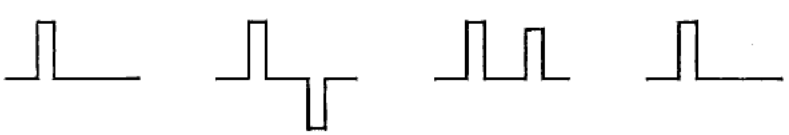


図３ (a) (b) (c) (d)