平成１６年度

信州大学大学院工学系研究科
博士前期課程物質基礎科学専攻

入試問題

専門科目（物理学系）

次の６問中４問を選択して解答せよ。

１．解答用紙は１問につき１枚使用し、無解答の場合でも必ず４枚提出すること。

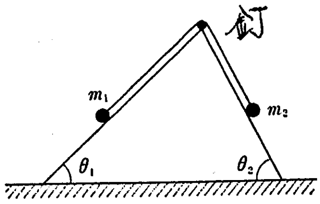
２．各解答用紙には、選択した問題番号、受験番号を必ず記入すること。

３．必要ならば、解答用紙の両面を使用してもよい。

1

問 1.

(a) 水平面と角 θ_1、θ_2 をなす固定した複斜面がある。質量が m_1、m_2 で斜面との動摩擦係数が μ_1'、μ_2' である 2 つの物体を糸の両端につけ、その糸を複斜面の頂点にあるなめらかな釘にかけてある。質量 m_1 の物体が角 θ_1 の斜面上をすべり落ちるとして、その加速度を求めよ。



(b) 釘のかわりに、半径 a、慣性モーメント I の滑車とした場合、m_1 のすべり落ちる加速度を求めよ。ただし、滑車と糸はすべらないものとする。

問 2. 平面上を運動する質量 m の質点がある。適当な原点をとって質点の位置を極座標 r、θ で表したとき、ポテンシャルが r のみの関数 $U(r)$ で書かれるとき、Lagrange の方程式から角運動量の保存則を導け。

2

図1のように抵抗R, コンデンサーC, 直流電源V, スイッチ S を直列につないだ回路がある。時刻 $t=0$ でスイッチSを閉じた。ただし、 $t=0$ でコンデンサーの電荷Q は $Q=0$ であるとする。コンデンサーは図2に示す通り、空気中に半径が a の2枚の円形電極板を距離dだけ離れて向かい合わせに置いた並行平板コンデンサーである。また、コンデンサーの極板は十分広く、端の効果は無視することができる。空気の誘電率を ε_0、透磁率を μ_0として、以下の問いに答えよ。

1) 時刻 t における回路に流れる電流 I を求めよ。
2) 時刻 t におけるコンデンサーの極板間の電場の大きさE を求めよ。
3) 時刻 t におけるコンデンサーの極板間の中心Oから中心軸と垂直に距離 r だけ離れた点P (図3) での磁場の大きさH を求めよ。
4) 時刻 t までに極板間の空間に入る電磁場のエネルギーの総量をポインティング・ベクトルから求め、コンデンサーに蓄えられるエネルギー U ($U=Q^2/2C$) に一致することを示せ。

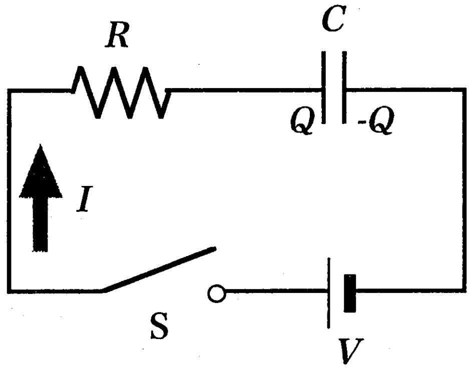


図1

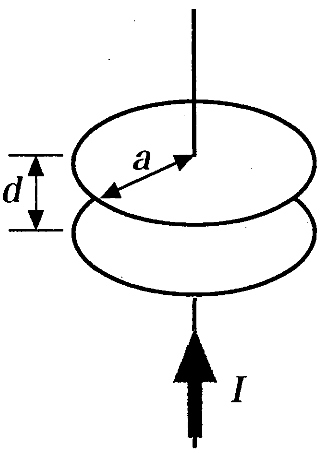


図2

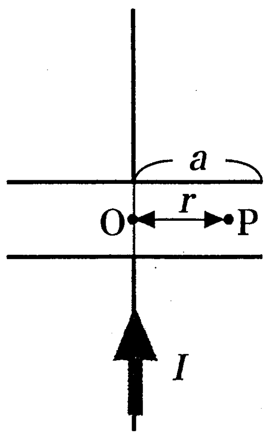


図3

3

1次元空間におけるSchrödinger方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)\right)\psi(x,t)$$

について、以下の問いに答えよ。ポテンシャル $V(x)$ は x に関する実関数とする。

1. 波動関数 $\psi=\psi(x,t)$ の複素共役 $\psi^*(x,t)$ が従う微分方程式を書き下せ。

2. 確率の保存を表わす連続の方程式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial J}{\partial x}=0$$

を示せ。ここで、$\rho\equiv\psi^*\psi$ は確率密度、$J\equiv-\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\psi\right)$ は確率の流れ密度である。

3. ある時刻で規格化された波動関数 $\psi(x,t)$ はその後の任意の時刻においても規格化が保たれていること

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x,t)|^2dx=0$$

を示せ。ただし、無限遠 $(x=\pm\infty)$ における $\psi(x,t)$ の値はゼロである。

4. 変数分離 $\psi(x,t)=T(t)\Phi(x)$ を行って、$T(t)$ に関する微分方程式を求め、解 $T(t)=\exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)$ を得た。ここで、E は積分定数である。$\Phi(x)$ が従う微分方程式を導け。

5. 前問の積分定数 E の値は実数であることを確率の保存則を用いて示せ。

4

全角運動量の大きさが J の原子 N 個の系を考える。各原子には並進および回転の自由度はなく、また各々の原子は独立であるとする。この系に磁場 $\boldsymbol{H}$ をかけると、i 番目の原子は磁場の方向に $g\mu_B m_i$ (g, μ_B は定数。$m_i = -J, -J+1, \cdots, J-2, J-1, J$) の磁気モーメントを持ち、原子 1 個のエネルギーは $\varepsilon_i = -g\mu_B m_i H$ ($H \equiv |\boldsymbol{H}|$)、$N$ 原子全体のエネルギーは $E_N = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i$ となる。この系が温度 T で熱平衡状態にあるとき以下の問いに答えよ。ただし、ボルツマン定数は k_B とする。

(1) N 原子系の分配関数 Z_N が $Z_N = (Z_1)^N$ と書けることを証明せよ。
ただし、$Z_1 = \sum_{m=-J}^{J} \exp(\beta g\mu_B m H)$ とする。

(2) 全磁気モーメント $M = \sum_{i=1}^{N} g\mu_B m_i$ の平均値 $\langle M \rangle$ を求めよ。

(3) 高温 ($T \gg 1$) で、磁化率 $\chi = \left(\frac{\partial \langle M \rangle}{\partial H}\right)_T$ が $\frac{1}{T}$ に比例することを示し、比例定数を求めよ。

(4) 古典的極限 $J \to \infty$, $g\mu_B \to 0$, $g\mu_B J = \mu_0$ (μ_0 は有限の定数) で、

$$\langle M \rangle = \mu_0 \left(\coth \frac{\mu_0 H}{k_B T} - \frac{k_B T}{\mu_0 H} \right)$$

となることを示せ。

(5) 内部エネルギーを U として、比熱 $C_H = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_H$ を求めよ。

必要なら以下の近似式を用いても良い。

$$\coth x \sim \frac{1}{x} + \frac{x}{3} \qquad (x \ll 1)$$

5 1900年にプランクは空洞放射のプランクの公式を求めた。以下の問いに答えよ。

問1）一辺 L の立方体の空洞の壁の中の光の固有振動のモードで、波長が λ と $\lambda + d\lambda$ の間にあるものの数 P_λ は、

$$P_\lambda = \frac{8\pi L^3}{\lambda^4} d\lambda \qquad (1)$$

となることを示せ。

問2）波長が λ と $\lambda + d\lambda$ の間の放射が、エネルギー量子1個当たり ε_λ のエネルギーとして、N_λ 個分のエネルギーを持つとする。即ち $E_\lambda = N_\lambda \varepsilon_\lambda$ の エネルギーを持つ。このとき、N_λ 個分のエネルギーを P_λ 個のモードに分配する仕方の数 w_λ は

$$w_\lambda = \frac{(N_\lambda + P_\lambda - 1)!}{N_\lambda!\,(P_\lambda - 1)!} \qquad (2)$$

となることを示せ。

問3）空洞放射の全エネルギー $E = \sum_\lambda N_\lambda \varepsilon_\lambda$ (＝一定) が与えられているとき、各モードへの分配の仕方は、問2）から、$W = \prod_\lambda w_\lambda$ 通りある。分配の仕方の数 W を最も大きくするものが最も起こりやすいと考えて、そのときの N_λ を求めると、$N_\lambda, P_\lambda \gg 1$ として、

$$N_\lambda = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon_\lambda} - 1} P_\lambda \qquad (3)$$

となることを示せ。ここで、β は後で決めるべき定数である。

問4）波長が λ と $\lambda + d\lambda$ の間の放射の単位体積当たりのエネルギー密度 $u(T, \lambda)$ は

$$u(T, \lambda)\, d\lambda = \frac{N_\lambda \varepsilon_\lambda}{L^3} \qquad (4)$$

と与えられる。但し、T は空洞の温度である。この式に、式（1）と（3）を代入すると、

$$u(T, \lambda)\, d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} \frac{\varepsilon_\lambda}{e^{\beta\varepsilon_\lambda} - 1} d\lambda \qquad (5)$$

となる。ここで、エネルギー量子 ε_λ を、

$$\varepsilon_\lambda = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \qquad (6)$$

とおく。但し、h はプランク定数、ν は振動数であり、c は光速である。式（5）は

$$u(T, \lambda)\, d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{\beta hc}{\lambda}} - 1} d\lambda \qquad (7)$$

となる。ここで β を決める。長波長で式（7）はレーリー・ジーンズの公式、

$$u(T, \lambda) = \frac{8\pi}{\lambda^4} k_B T \qquad (8)$$

に一致するということから、

$$\beta = \frac{1}{k_B T} \qquad (9)$$

となることを示せ。但し、k_B はボルツマン定数である。これを式（7）に代入して、

$$u(T, \lambda)\, d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} d\lambda \qquad (10)$$

これが求めたかったプランクの公式である。

6 は以下の２問中１問を解答せよ。

6 の１

携帯電話やPHSなどの移動体通信に使用されている電波の波長を実験的に求めたい。自ら実験することを想定して以下の「測定原理」、「実験方法」、「使用する器具、道具、装置など」、「測定結果の解析方法」、「実験上の注意」をなるべく詳しく述べよ。図などを使って分かりやすく記述することが望ましい。

1. 波長測定の原理
2. 実験方法
3. 実験に必要な器具、道具、装置など
4. 測定結果の解析方法
5. 実験上の注意