平成１６年度

信州大学大学院工学系研究科
博士前期課程物質基礎科学専攻
（２次募集）

入試問題

専門科目（物理学系）

６問中４問を選択して解答せよ。

1. 解答用紙は１問につき１枚使用し、無解答の場合でも必ず４枚提出すること。
2. 各解答用紙には、選択した問題番号、受験番号を必ず記入すること。
3. 必要ならば、解答用紙の両面を使用してよい。

1

重さが無視できる自然長 l のバネの一端を天井に固定し、他端に質量 m の物体をつるした。重力加速度の大きさを g、バネ定数を k とし、空気の抵抗は無視できるものとして以下の問いに答えよ。

問 1 つり合いの状態では、バネは自然長よりどれ程のびるか。

問 2 問 1 の状態からバネが自然長になるまで物体を持ち上げた後、物体を静かに離した。物体はどのような運動をするか、ニュートンの運動方程式を解いて求めよ。

問 3 物体の運動エネルギー K、重力による位置エネルギー U、およびバネに蓄えられているエネルギー V を、それぞれ時間 t の関数として求め、全エネルギー $K+U+V$ が保存されることを示せ。

問 4 物体の位置座標を x、速度を $\dot{x}$ として、問 2 の運動に対するラグランジュ関数を求め、その運動方程式を記せ。

2

誘電率 ε 、透磁率 μ 、電気伝導率 σ の一様な物質中を平面波として z 軸方向に進む角振動数 ω の電磁波がある。以下の問いに答えよ。

1) マクスウェルの方程式から電場 $\boldsymbol{E}$ の x 成分 $E_x(z,t)$ が満たすべき方程式として、

$$\frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial z^2} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 E_x(z,t)}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t} = 0$$

を得られることを示せ。ただし、電流密度 $\boldsymbol{j}$ は、$\boldsymbol{j} = \sigma\boldsymbol{E}$ とする。

2) 複素数 $\tilde{k}$ を用いて、$E_x(z,t)$ を

$$E_x(z,t) = E_0 \exp\left[i\left(\omega t - \tilde{k}z\right)\right]$$

と表したとき、ω と $\tilde{k}$ の間にどのような関係が成り立つか。

3) 複素数 $\tilde{k}$ の実部 k および虚部 k' を求めよ。

4) 磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の y 成分 $B_y(z,t)$ を求めよ。

3

1次元の有限な領域 $[0, a]$ に、N 個の質量 m の同種粒子が閉じ込められている系について考察しよう。それぞれの粒子は自由なシュレディンガー方程式に従い運動しているとする。以下の問いに答えよ。

問1 それぞれの粒子がとり得るエネルギー固有値は

$$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}n^2, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

であることを示せ。

問2 前問の固有値に属する規格化された固有関数を書け。

問3 すべての粒子がボーズ粒子である時、この系の基底状態のエネルギーを求めよ。

問4 すべての粒子が２つのスピン状態を持ったフェルミ粒子であるとする。

1. パウリの排他原理について簡単に説明せよ。
2. この系の基底状態のエネルギーに関する表式を求めよ。
3. また、この状態に対して最も高いエネルギーを持った粒子のエネルギー（フェルミ準位）はいくらか？

4

N 個の同種粒子を体積 V の箱に入れ、外界から孤立させる。各粒子は離散的なエネルギー準位 ε_0, ε_1, ε_2, ε_3, $\cdots$, ε_ℓ をとり、それぞれのエネルギー準位を占める粒子数 (占有数) を n_0, n_1, n_2, n_3, $\cdots$, n_ℓ とする。ここで、各エネルギー準位に縮退はなく、また、各エネルギー準位の占有数に制限はない (n_i は 0 および自然数をとりうる) とする。ボルツマン定数を k_{B} として、以下の問いに答えよ。

(1) N 個の粒子を各エネルギー準位に配分するときの場合の数 W を求めよ。

(2) 系が熱平衡状態にあるとき、各エネルギー準位の占有数は粒子数 N と全エネルギー E 保存の条件のもとで W が最大になるように配分される。このことから、熱平衡状態における占有数 n_i を変分法を用いて求めよ。ただし、ラグランジュ未定乗数は残したままでよい。

(3) 孤立系では粒子数が変化しないことから、(2) で求めた n_i に残っているラグランジュ未定乗数のうちのひとつを決める式を書け。

(4) $w_i = \dfrac{n_i}{N}$ として、$\log W$ を N と w_i を用いて表せ。

(5) $\log W$ を N, ε_i, E および、残されたラグランジュ未定乗数を用いて表せ。

(6) 孤立系では E が保存することと、ボルツマンの関係式から、残されたラグランジュ未定乗数を求めよ。

必要なら以下の近似式を用いても良い。

$$\log n! \sim n \log n - n \qquad (n >> 1)$$

5

1909年に、ガイガーとマースデンは、ラドンから放出される α 粒子を金箔に照射し、大角度に散乱される α 粒子を検出した。ラザフォードは、1911年の論文に、「厚さ $4\times10^{-5}\,\mathrm{cm}$ の金箔に当った α 粒子のうち、2万個に1個が約 90° 方向を変えた」と書いている。ラザフォードは、原子を「原子の中心に集中して電荷 Ze があり、そのまわりを半径 R の球内に、一様に分布した負電荷 $-Ze$ がとりかこんでいる」と想像してみた。

これにもとづき、以下の問いに答えよ。

(1)　α 粒子は電荷 ze （$z=2$ 、e は素電荷）の点電荷であるとする。この α 粒子が原子の中心から r の距離まで近づいたとき、原子から受ける力 $F(r)$ は反発力で、

$$F(r)=\frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2}-\frac{r}{R^3}\right)\quad(r<R)$$
$$=0\quad(r>R)$$

となることを求めよ。ヒント：　点Oを中心として球対称な電荷分布Aが、点電荷Bにおよぼす力は、Oを中心とし、点電荷の位置を通る球面にかこまれたAの電荷が全部点Oに集まったとしたとき、Bにおよぼす力に等しい。

(2)　今、α 粒子が、速さ V_0 で原子に飛び込んだとする。中心から r の距離にくるまでに、反発力によって、$\int_R^r F(s)\,ds=-V(r)$ だけ仕事をされる。$V(r)$ を求めよ。

(3)　α 粒子が原子の中心に最も近づいたとき、これを最短近接距離といい、r_e と記す。$r_e << R$ として r_e を与える式を求めよ。但し、α 粒子の質量を m とする。

(4)　$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}=2.3\times10^{-28}\,\mathrm{Nm^2}$ 、入射 α 粒子の運動エネルギーを $\frac{1}{2}mV_0^2=6\,\mathrm{MeV}$ 、$1\,\mathrm{MeV}=10^6\,\mathrm{eV}$ 、$1\,\mathrm{eV}=1.6\times10^{-19}\,\mathrm{J}$ 、$z=2$ 、$Z=79$ として、r_e の値を概算せよ。これが後に原子核と呼ばれるものの、おおよその大きさを与える。

$\boxed{6}$ は以下の２問中１問を解答せよ。

$\boxed{6}$ の１

電気的仕事 W と発生した熱量 Q の関係、$W = JQ$ から、熱の仕事当量 J の値を求めたい。以下の問いに答えよ。

問1　下の括弧内に示した材料や器具を適当に配置し、熱の仕事当量を求めるための水熱量計を構成した概念図を描け。必要があれば下に示した以外のものを使用しても差し支えない。

[水銀温度計、ビーカー、撹拌棒、断熱材、ニクロム線、端子、リード線、スイッチ、電源、電圧計、電流計、可変抵抗器、水]

問2　電力を測定するための電圧計および電流計を含めた配線図を示せ。

問3　理想的と思われる水温の時間変化を示すグラフ（水温曲線）を描き、熱の仕事当量 J の値を求める方法を述べよ。

問4　この実験で注意すべきことを列記し考察せよ。

6 の２

抵抗値Rの抵抗と自己インダクタンスLのコイルを図１のように直列につなぎ、直流電源に接続して、両端の電圧Eと流れる電流Iの関係を調べたところ、図２の直線Ａのようになった。次に直流電源の代りに交流電源を用いて同様の実験をしたところ、図２の直線Ｂが得られた。図２には作図によってインダクタンスLを求める際の円弧や直線も描かれている。また、点Ｈの電流値は１Ａである。交流の角周波数をωとして次の各問いに答えよ。

(1) 図２の線分$\overline{\mathrm{FH}}$（$=\overline{\mathrm{JH}}$）および$\overline{\mathrm{GH}}$は、それぞれどのような物理量に対応しているか。

(2) 図２で、$\overline{\mathrm{GJ}}=d$とすると、dおよび角θは、それぞれどのような物理量に対応しているか、理由を付けて答えよ。

(3) コイルの自己インダクタンスLを作図によって求める手順を説明せよ。

(4) 図１のコイルの代りに電気容量Cのキャパシター（コンデンサー）をつなぎ、交流電源を接続して同様の実験をしたところ、コイルのときと全く同じ直線Ｂが得られた。キャパシターの電気容量Cを求めよ。

(5) 上の実験で用いた抵抗、コイルとキャパシターを直列につないだときの合成インピーダンスはどうなるか、理由を付けて答えよ。

図１

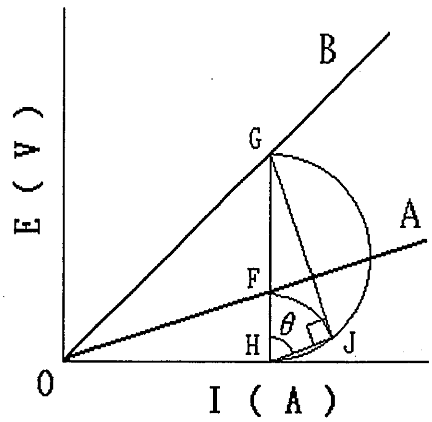

図２