

平成18年度

信州大学大学院 工学系研究科
修士課程 物質基礎科学専攻

第2次募集 入学試験問題

専門科目 (物理学系)

解答するときの注意事項

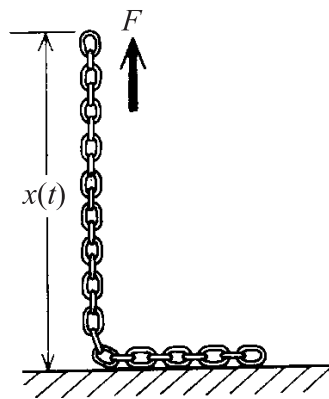
1. 6問中4問を選択して解答せよ。
2. 解答用紙は1問につき1枚を使用し，白紙の場合でも必ず4枚提出すること。
3. 各解答用紙には，選択した問題番号，受験番号を必ず記入すること。
4. 必要ならば解答用紙の裏面を使用してもよい。

下書用紙

1

滑らかで水平な床の上に一様な線密度 ρ の鎖が置かれている．図のように，鎖の一端を鉛直上方に引き上げるのに必要な力を求めてみよう．なお，鎖は十分長いものとする．

- (1) 時刻 t における床からもち上がっている鎖の長さを $x(t)$ として，時刻 t と $t + \Delta t$ との微小時間 Δt の間における運動量の変化 Δp を $x, \dot{x}, \ddot{x}, \rho$ を用いて表せ．なお， \dot{x}, \ddot{x} は x の時間微分である．
- (2) 長さ x の部分の鎖に作用する力は，上端を引き上げる力 F と重力による力である．このことから，鎖の運動方程式を求めよ．なお，重力加速度の大きさを g とする．
- (3) 一定の速さ v_0 で鎖を引き上げるには，どのような力 F が必要か．
- (4) $t = 0$ で $x = 0, \dot{x} = v_0$ として，一定の加速度 a で鎖を引き上げるのに必要な力 F と鎖の長さ x との関係を求めよ．



2

次の各問いに答えよ.

電源に負荷抵抗 R をつないだとき, 負荷で消費される電力を計算してみよう. はじめに直流電源の場合を考える (図 1 参照).

- (1) 直流電源の起電力を V_0 , 内部抵抗を R_i として, 負荷抵抗 R で消費される電力 P を求めよ.
- (2) 消費電力 P が最大となるのは, R がどのような条件を満たすときか.
- (3) 消費電力の最大値 P_m および, そのときの電流 I_m を求めよ.

次に, 交流電源の場合を考える (図 2 参照).

- (4) 交流電源の起電力を $E_s(t) = E_0 \cos \omega t$, 内部インピーダンスを $Z_s = R_s + iX_s$ として, 負荷抵抗 R に流れる電流 I を求めよ. ただし, t は時間, ω は角周波数, $i^2 = -1$ とする.
- (5) 負荷抵抗 R で消費される電力の時間平均 \bar{P} を求めよ.

上の結果より, $R = R_s, X_s = 0$ のとき, 負荷の消費電力が最大値 $(E_0)^2/(8R)$ をとることが分かる.

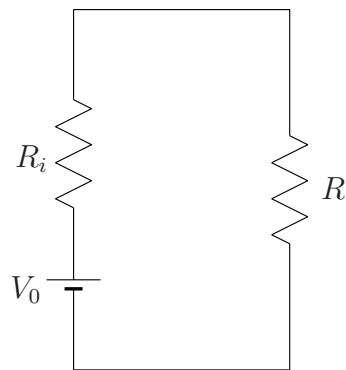


図 1

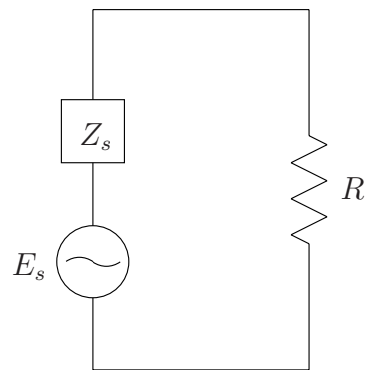


図 2

3

1次元空間での質量 m の粒子に対する量子論で、規格化可能状態を考える。座標を x ($-\infty < x < \infty$)、運動量を p とする。次のページに付けた数学公式は自由に用いてよい。

最初に次のハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

を考える。 ω は正の定数である。エネルギー固有値を E_n ($E_0 < E_1 < E_2 < \dots$)、その固有状態を $|n\rangle$ ($H|n\rangle = E_n|n\rangle$) で、 $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$ と規格化・位相は適当に1つ決めておく、対応する波動関数を $\psi_n(x)$ ($\psi_n(x) = \langle x|n\rangle$) とする。

- (1) $\psi_n(x)$ に対する (座標表示の) Schrödinger 方程式を書け。
- (2) a と a^\dagger を

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + i\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}p, \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - i\frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}p$$

とおく。 H を a, a^\dagger を用いて表せ。また、 $[a, a^\dagger], [H, a], [H, a^\dagger]$ を求めよ。

- (3) 問(2)より、基底状態 $|0\rangle$ は $a|0\rangle = 0$ となる状態である事が分かる。 E_0 を求めよ。
また、対応する1階の微分方程式を解く事により、 $\psi_0(x)$ を求めよ。
- (4) 問(2)より、励起状態 $|n\rangle$ ($n \geq 1$) は $a^{\dagger n}|0\rangle$ に比例する事が分かる。 E_n を求めよ。
また、次のページに付けた数学公式を用いて、 $\psi_n(x)$ を求めよ。
- (5) $\langle n|x|n\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_n(x)^* x \psi_n(x)$, $\langle n|x^2|n\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_n(x)^* x^2 \psi_n(x)$ ($n \geq 0$) を計算せよ。
(次のページに付けた数学公式を用いても用いなくてもよい。)

次に上の H に摂動項 H' を加えたハミルトニアン $\tilde{H} = H + H'$ を考える。 \tilde{H} のエネルギー固有値 \tilde{E}_n ($n \geq 0$) は、1次の摂動計算により、 $\tilde{E}_n^{(1)} = E_n + \langle n|H'|n\rangle$ と近似できる。以下の H' に対して $\tilde{E}_n^{(1)}$ を求めよ。また、各場合に \tilde{E}_n を厳密に求める事ができるので、 \tilde{E}_n を求め、 $\tilde{E}_n^{(1)}$ と比較せよ。

- (6) $H' = \lambda_1 x$ (λ_1 は実定数) の場合。
- (7) $H' = \lambda_2 x^2$ (λ_2 は実定数) の場合。

2次の摂動計算 (更にはより高次の摂動計算) を実行して、同様な比較を行う事は興味深いであろう。

[数学公式]

$$\begin{aligned} H_n(y) &\stackrel{\text{def}}{=} (-1)^n e^{y^2} \frac{d^n}{dy^n} e^{-y^2} \quad (n = 0, 1, 2, \dots ; H_0(y) = 1) \\ &= \left(-e^{y^2} \frac{d}{dy} e^{-y^2} \right)^n \cdot 1 = \left(2y - \frac{d}{dy} \right)^n \cdot 1 = \left(e^{\frac{1}{2}y^2} \left(y - \frac{d}{dy} \right) e^{-\frac{1}{2}y^2} \right)^n \cdot 1 \\ &= e^{\frac{1}{2}y^2} \left(y - \frac{d}{dy} \right)^n e^{-\frac{1}{2}y^2} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-y^2} H_n(y) H_m(y) = 2^n n! \delta_{nm} \quad (n, m \geq 0)$$

$$H_{n+1}(y) - 2yH_n(y) + 2nH_{n-1}(y) = 0 \quad (n \geq 1)$$

$$H_n''(y) - 2yH_n'(y) + 2nH_n(y) = 0 \quad (n \geq 0) \quad (' \text{ は微分を表す})$$

4

以下の式が成り立つことを示せ .

$$(1) C_P = C_V + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P \right\}$$

$$(2) C_P - C_V = - \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \left\{ P \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T + \left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_T \right\}$$

$$(3) d'Q = C_V dT + \frac{C_P - C_V}{V\alpha} dV$$

$$(4) \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T - V = \left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_T + P \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$$

$$(5) C_P - C_V = \frac{TV\alpha^2}{\kappa_T}$$

$$(6) \gamma = \frac{\kappa_T}{\kappa_S}$$

$$(7) \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_U = \frac{1}{C_V} \left\{ P - T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \right\}$$

$$(8) \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H = \frac{1}{C_P} \left\{ T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P - V \right\}$$

各記号の意味は以下の通り

U : 内部エネルギー, Q : 熱量, P : 圧力, C_V : 定積熱容量, S : エントロピー
 H : エンタルピー, T : 温度, V : 体積, C_P : 定圧熱容量

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V}, \quad \alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P, \quad \kappa_S = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S, \quad \kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$$

5

- (イ) 「Pauli 原理」とは何か説明し，これに基づいて理解される事例を原子物理学の分野の話題から一つ挙げよ．
- (ロ) 自然界の水素の内 99.99 % を占める通常の水素原子は陽子 1 個の原子核と電子 1 個で構成されている．では，自然界のヘリウムのうち 99.9999 % を占める通常ヘリウム原子は何が何個で構成されているか．
- (ハ) 基底状態においてヘリウム原子の電子スピンはどのような状態になっていると思うか，理由を述べて答えよ．更に，前問で答えた原子核のスピン状態はどのようなになっていると思うか，考え方を述べよ．
- (ニ) 通常の水素分子は陽子 2 個と電子 2 個で構成されている．原子核が 2 個あるので問題は複雑であるが，2 つの原子核の位置が極めて近いことに注目して，電子状態は原子核が同じ位置に重なった場合に近いとすれば，基底状態についてある程度は考えることができる．電子スピンはどのような状態にあるか考えを述べよ．それは，多重項の用語では何というか．
- (ホ) 前問で解答したスピン状態のとき，波動関数を実数として，その特徴を図示せよ．

6

以下の2問中1問を解答せよ。

6の1

- I. 以下の副尺(バーニア)を用いて長さを測る測定器具についてそれらの測定原理を説明せよ。
 - (1) ノギス(キャリパー)
 - (2) マイクロメーター

- II. 直方体の3つの辺の長さをノギスで測ったところ a, b, c であった。また, それぞれの誤差は r_a, r_b, r_c であった。この直方体の体積の誤差を a, b, c, r_a, r_b, r_c を用いて表せ。

- III. ノギスを用いて与えられた立体の体積を求めよ。

6 の 2

- (1) 測定値 x の関数 $f(x)$ が以下のように定義される場合、誤差の伝播により、 f の平均値 \bar{f} の相対誤差 σ_f / \bar{f} を求めよ。ただし x の平均値を \bar{x} 、誤差を σ_x とする。

(ア) $f(x) = x^m$ (m は実定数)

(イ) $f(x) = e^{\alpha x}$ (α は実定数)

- (2) 半減期が T の放射性原子核の時刻 t における個数 $N(t)$ は、次の微分方程式に従う。

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{1}{\tau} N$$

ここで、 $\tau = T / \log 2$ である。

この原子核の半減期 T を求めるには、どのような測定をすれば良いか？その方法の原理を簡潔に説明せよ。必要ならば数式を用いても良い。