平成19年度

信州大学大学院 工学系研究科
修士課程 物質基礎科学専攻

第II期募集 入学試験問題

専門科目 (物理学系)

解答するときの注意事項

1. 6問中4問を選択して解答せよ.
2. 解答用紙は1問につき1枚を使用し，白紙の場合でも必ず4枚提出すること.
3. 各解答用紙には，選択した問題番号，受験番号を必ず記入すること.
4. 必要ならば解答用紙の裏面を使用してもよい.

$\boxed{1}$

水平面と角度 α をなす斜面を, 質量 m, 半径 R , 長さ L の一様な円柱が, その中心軸を水平に保ちながら滑らずに転がり落ちる. この運動について次の問いに答えよ. ただし, 斜面に沿って x 軸を選び（下向きを正とする）, 中心軸のまわりの角速度を ω , 重力加速度を g とする.

1） この一様な円柱の中心軸のまわりの慣性モーメント I を計算せよ.

2） x 軸方向の並進運動に対する運動方程式を求めよ.

3） 円柱の中心軸のまわりの回転に対する運動方程式を求めよ.

4） 円柱の中心の加速度を求めよ.

5） 円柱の中心の加速度は、円柱と斜面の間に摩擦がなく円柱が回転せずに滑り落ちるときの加速度の何倍か.

2

(1)　半径 a の円形の小さな回路に大きさ I の定常電流が流れているとき，回路から十分離れた点に生じる磁束密度を求める．

1-1) 図1のように円の中心を原点Oにとり，円の面に垂直に z 軸をとる．円周上にあり，x 軸からの中心角が φ の点の位置ベクトル $\boldsymbol{r}'$ と，その点の電流と同じ向きの単位ベクトル $\boldsymbol{t}$ の x, y, z 成分を記せ．

1-2) 円周を微小部分に分割し，φ と $\varphi+\Delta\varphi$ の微小部分に流れる電流素片が点 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ につくる磁束密度を求めよ．

1-3) 原点から点 $\boldsymbol{r}$ までの距離が半径 a に比べて十分大きいとして，点 $\boldsymbol{r}$ における磁束密度を求めよ．

(2)　半径 a_1, a_2 の2つの円形の回路 C_1, C_2 が中心軸を共通にして図2のように平行に置かれている．C_1に大きさ I の電流を流すことによって生じる C_2を貫く磁束を求めることにより，回路 C_1, C_2 の相互インダクタンスを求めよ．ただし，中心間の距離は R であり，$a_1 \ll a_2$, $a_1 \ll R$ とする．

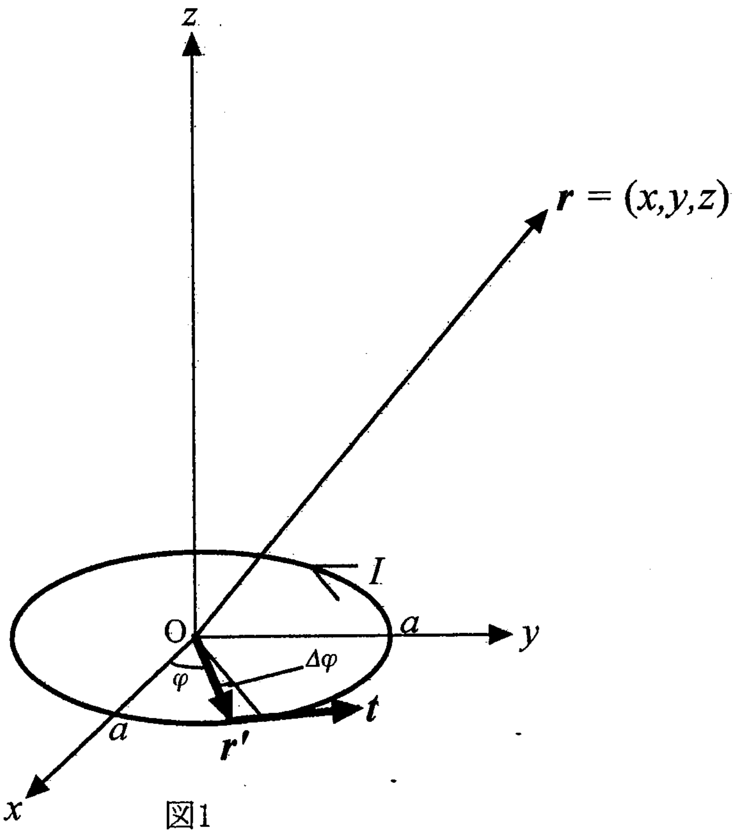


図1

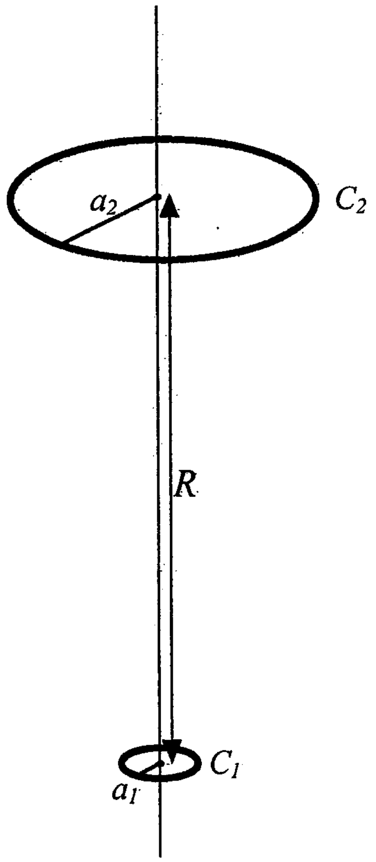


図2

3

質量 m の自由粒子に対するガリレイ変換性について考察する．以下の問いに答えよ．

1. ラグランジアン $L = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ はガリレイ変換

$$x \to x' = x + vt \;, \quad t \to t' = t \;, \quad (v \text{ は定数}) \tag{1}$$

の下で次のように変換される．

$$L \to L' = L + \frac{d}{dt}\omega(x,t;v) \;.$$

関数 $\omega(x,t;v)$ を求めよ．

2. 量子力学において，位置座標演算子 $\hat{x}$ および運動量演算子 $\hat{p}$ はガリレイ変換を生成するユニタリー演算子 U により，次のように変換される．

$$\hat{x} \to U^{-1}\hat{x}U = \hat{x} + vt \;, \quad \hat{p} \to U^{-1}\hat{p}U = \hat{p} + mv \;. \tag{2}$$

ここで，v は c-数（古典的な数）である．次で定義される U により変換 (2) が生成されることを示せ．

$$U \equiv \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(mv\hat{x} - vt\hat{p}\right)\right) \;.$$

ヒント：$[\hat{A},\hat{B}]$ =c-数のとき，$e^{-\hat{A}}\hat{B}e^{\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{B},\hat{A}]$ が成り立つ．

3. 波動関数のガリレイ変換性について議論する．状態ベクトル $|\psi(t)\rangle$ は，ガリレイ変換の下で次のように変換される（実際，変換 (1) の最初の式は変換 (2) の最初の式の期待値と考えられる）．

$$|\psi(t)\rangle \to |\psi'(t)\rangle = U|\psi(t)\rangle \;. \tag{3}$$

波動関数 $\psi(x,t) = \langle x|\psi(t)\rangle$ に対して，変換された波動関数 $\psi'(x,t) = \langle x|U|\psi(t)\rangle$ は，次のように書き表されることを示せ．

$$\psi'(x,t) = e^{\frac{i}{\hbar}\omega(x-vt,t;v)}\psi(x-vt,t) \;.$$

ヒント：$[\hat{A},\hat{B}]$ =c-数のとき，$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}$ が成り立つ．

4

強磁性体の結晶で，１個の原子と z 個の最隣接原子からなるクラスターを考えて，結晶全体の性質を論じてみよう．クラスターの中心原子のスピンを σ_0，z 個の最隣接原子のスピンを $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \cdots\cdots \sigma_z$ とする．外部磁場 H がある場合のクラスターのハミルトニアンが，

$$\mathcal{H} = -\frac{J}{2}\sigma_0 \sum_{j=1}^{z} \sigma_j - mH^* \sum_{j=1}^{z} \sigma_j - mH\sigma_0$$

で与えられるとしよう．ここで J，m は正の定数であり，$\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \cdots\cdots \sigma_z$ は $+1$ または -1 の値のみをとるものとする．ハミルトニアン第２項目に含まれる H^* は，クラスター外の原子からの影響も含めた有効的な磁場である．以下の問いに答えよ．

１．クラスターの分配関数（状態和）が，

$$Z_0 = e^{L}\left\{2\cosh\left(K + L^*\right)\right\}^z + e^{-L}\left\{2\cosh\left(K - L^*\right)\right\}^z$$

で与えられることを示せ．ただし，

$$K = \frac{J}{2k_B T}, \quad L = \frac{mH}{k_B T}, \quad L^* = \frac{mH^*}{k_B T}$$

とし，k_B はボルツマン定数とする．

２．中心原子のスピン σ_0 の平均値 $\langle \sigma_0 \rangle$ を求めよ．

３．設問２と同様に計算すると、最隣接原子スピンの任意の一つ σ_k に対する平均値は，

$$\langle \sigma_k \rangle = \frac{2^z}{Z_0}\left\{e^{L}\cosh^{z-1}\left(K + L^*\right)\sinh\left(K + L^*\right) - e^{-L}\cosh^{z-1}\left(K - L^*\right)\sinh\left(K - L^*\right)\right\}$$

となる。設問２で求めた $\langle \sigma_0 \rangle$ と上の $\langle \sigma_k \rangle$ を等しいとおくと，有効的な磁場 H^* を決める関係式が得られる．その関係式が

$$e^{2L} = e^{2L^*}\left\{\frac{\cosh\left(K - L^*\right)}{\cosh\left(K + L^*\right)}\right\}^{z-1} \qquad (1)$$

で与えられることを示せ．

４．設問３の関係式（１）で，外部磁場 $H = 0$ としたとき，

① $H^* = 0$（常磁性状態）が解であることを示せ.

② $H^* \neq 0$（強磁性状態）の解を持つための条件が，

$$\tanh\left(\frac{J}{2k_B T}\right) > \frac{1}{z-1}$$

であることを示せ．ただし，L^* が小さいときの近似式

$$\log\left\{\frac{\cosh(K+L^*)}{\cosh(K-L^*)}\right\} \approx 2\left\{L^* - \frac{L^{*3}}{3\cosh^2 K}\right\}\tanh K$$

を用いよ.

③ ②の結果を用いて，キュリー温度 T_c が，

$$T_c = \frac{J}{k_B \log\left(\frac{z}{z-2}\right)}$$

で与えられることを示せ.

5

(1) 水素原子のエネルギー準位 E_n ($n = 1, 2, \ldots$ で $E_1 < E_2 < \cdots$ とせよ) を前期量子論 (ボーアの水素原子模型) を用いて導け．使用した記号及び導出の際に用いた式の意味を明確に述べるように．

(2) エネルギー準位 E_{n_1} から E_{n_2} ($n_1 > n_2$ とする) へ遷移する際に放出される光を $n_1 \to n_2$ 遷移の光と呼ぶことにする．(1) の結果と次の 5 つのデータを基にして，$n_1 \to n_2$ 遷移の光の振動数 $\nu_{n_1 \to n_2}$ を Hz 単位で表す式を具体的に書き下せ．具体的にという意味は n_1, n_2 以外の文字を含まないという意味である．

(n_1, n_2)	(2,1)	(4,1)	(4,2)	(5,2)	(4,3)
$\nu_{n_1 \to n_2}$[Hz]	2.45×10^{15}	3.12×10^{15}	6.17×10^{14}	6.95×10^{14}	1.58×10^{14}

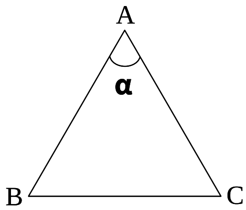
(3) ある天体から放出された $4 \to 2$ 遷移の光の振動数を観測したら 2.06×10^{14} Hz であった．この天体は地球に近づいているか遠ざかっているか．また，この天体が地球方向に動いているとして，その速さはいくらか．

注：上で用いた数値データは試験問題のために用意したものであり，現実の実験の状況を必ずしも反映したものではない．

6 は以下の2問中1問を解答せよ．

6 の1

分光計を用いて，下図のようなガラスプリズムの屈折率を測定することを考える．



(1) 分光計を用いて頂角 α を測定する方法を説明せよ．必要ならば，図を描いてもよい．

(2) 続いて屈折率を求めるため，どのように光線を入れ，どの角度を測定する必要があるか．測定値から屈折率を求める計算式を示しながら説明せよ．必要ならば，図を描いてもよい．

(3) 波長の異なる 2 つの光線を同軸でプリズムに入れると，2 本に分離して出てくる．一般的なクラウンガラスの場合，ふれの角の大きい方は，波長が長い方，短い方のどちらか．また，そのような媒質を何というか．

$\boxed{\mathbf{6}}$ の 2

ガイガーミューラー計数管を用いて，β 崩壊する放射性核種から出る β 線のエネルギースペクトルを測定する．以下の問題に答えよ．

(1) β 崩壊について説明せよ．特に，β 線のエネルギースペクトルはどのようになるか説明せよ．

(2) ガイガーミューラー計数管の構造と動作原理を説明せよ．

(3) 次にあげる装置を用いて，β 線のエネルギースペクトルを測定するための実験装置を図示し，実験手順を説明せよ．

β 線源核種，コリメータ，電磁石，直流電源，ガウスメータ，ガイガーミューラー計数管 (計数装置を含む)

(4) ガイガーミューラー計数管が，引き続いて入射した 2 個の β 線を正しく 2 個と計数できるために必要な入射時間間隔を，不感時間と呼ぶ．単位時間あたりの真の計数を n，単位時間あたりに実際に記録された計数を m，不感時間を τ としたとき，n を m と τ を用いて表せ．ただし，不感時間の間に入ってきた β 線は，計数管に何の影響も及ぼさないとする．