平成２０年度

信州大学大学院工学系研究科
修士課程 物質基礎科学専攻

第 II 期募集 入学試験問題

専門科目(物理学系)

解答するときの注意事項

1. 6問中4問を選択して解答せよ。

2. 解答用紙は１問につき１枚を使用し, 白紙の場合でも必ず４枚を提出すること。

3. 各解答用紙には選択した問題番号, 受験番号を必ず記入すること。

4. 必要ならば解答用紙の裏面を使用してもよい。

1

図１のような，おもりの質量 m_1 および m_2，それぞれの糸の長さ L_1 および L_2 により構成される二重平面振り子の微小振動を議論する。ただし，重力加速度の大きさを g とし，それぞれの振り子が鉛直方向となす角を，θ_1 および θ_2 とする。

1．　ラグランジアンを求めよ。

2．　角度 θ_1 および θ_2 に関するオイラー・ラグランジ方程式を書き下せ。

3．　$m_1 = m_2$ かつ $L_1 = L_2$ のときの基準振動の固有振動数を求めよ。

4．　このときの基準振動の振動パターンを分かりやすく図示せよ。

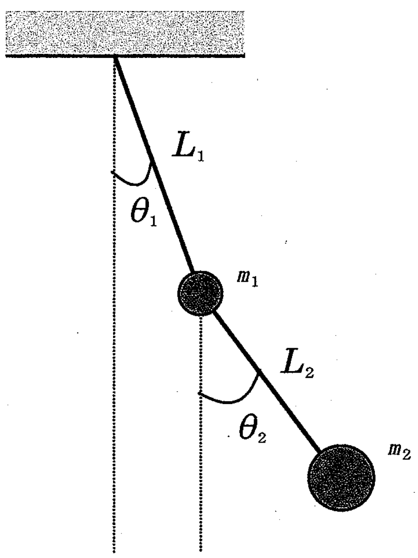

図１

$\boxed{2}$

真空中に置かれた半径 a の導体球Aに電荷 $Q\,(>0)$ が与えられている。

1.以下の問いに答えよ。

1) ガウスの法則を用いて電場を求めよ。

2) 無限遠の電位を０として導体表面の電位を求めよ。

3) 帯電していない導体球Aに，Q の電荷を与えるのに要する仕事を求めよ。

2. 帯電していない半径 b の導体球Bを持ってきて，この導体球Aと導線でつないだ。それぞれの導体球の表面の電場の大きさを求めよ。 ただし，２つの導体球は十分離れていて互いの電荷分布には影響しないものとする。

$\boxed{3}$

次で定義されるハミルトニアン H について，以下の問いに答えよ。

$$H \equiv \frac{1}{2}(QQ^\dagger + Q^\dagger Q),$$

$$Q \equiv \frac{\sigma_+}{\sqrt{2m}}\left(-i\hbar\frac{d}{dx} - imW(x)\right), \quad Q^\dagger \equiv \frac{\sigma_-}{\sqrt{2m}}\left(-i\hbar\frac{d}{dx} + imW(x)\right).$$

ここで，m は粒子の質量，σ_+ および σ_- は次で与えられる行列である。

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

また，$W(x)$ は x に関する実関数である。

1. Q^2 および $Q^{\dagger 2}$ を計算せよ。また，Q および $Q^\dagger$ は運動の恒量（保存量）であることを示せ。

2. H の固有関数 $\psi_B(x)$ が固有値 $E(>0)$ を持つとする。このとき，関数 $\psi_F(x) = Q\psi_B(x)$ もまた H の固有関数になることを示せ。また，その固有値を求めよ。ここで，$\psi_B(x)$ は次で与えられる。

$$\psi_B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi(x) \end{pmatrix}.$$

3. ゼロエネルギー $(E = 0)$ の状態は，演算子 Q および $Q^\dagger$ が作用して消える（ゼロになる）状態である。$\psi_{B0}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0(x) \end{pmatrix}$ の形をしたゼロエネルギーの固有関数を x に関する1階の微分方程式 $Q\psi_{B0}(x) = 0$ を解いて求めよ。ただし，固有関数が規格化可能かどうかは $W(x)$ に依存するので，規格化に関しては考慮する必要はない。

4. H は，次のように書き表すことができる。

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{m}{2}W(x)^2 + \frac{\hbar}{2}\frac{dW(x)}{dx} & 0 \\ 0 & -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{m}{2}W(x)^2 - \frac{\hbar}{2}\frac{dW(x)}{dx} \end{pmatrix}.$$

$W(x) = \omega x$（ω はゼロでない実定数）とする。ω の正負に応じて場合分けをして，規格化可能なゼロエネルギーの固有関数を求めよ。ただし，固有関数を規格化する必要はない。

$\boxed{4}$

単原子分子理想気体の断熱過程において体積 V と圧力 p の間に成り立つ関係式

$$pV^{\gamma} = 一定$$

を導き，p–V 状態図中の任意の点において，図 2 のように断熱曲線の傾きが等温曲線の傾きより大きいこと

$$\left|\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S\right| > \left|\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T\right|$$

を示せ。ただし，S はエントロピー, T は温度を表し， $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ で， C_p, C_V はそれぞれ定圧比熱および定積比熱である。

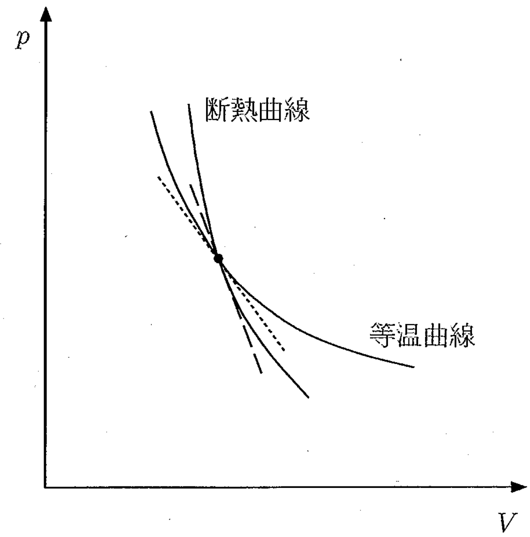

図 2

5 以下の問いに答えよ。
解答で使用した記号については，それが何であるかを明記せよ。

(1) [コンプトン効果]
静止した電子に光子 (X 線) を衝突させ散乱させるとき，散乱後の光子の波長と散乱前の光子の波長の差を散乱角の関数として表す式を導け。ただし，特殊相対論を用いること。

(2) [ローレンツ収縮]
ローレンツ変換 (ブースト) の式を書き，ローレンツ収縮を説明せよ。

$\boxed{6}$ は以下の２問中１問を解答せよ。

$\boxed{6}$ の１

電気抵抗率測定について以下の問いに答えよ。

(1) 物質の電気抵抗率をより正確に測るために，試料に４つ端子をつける４端子法がよく用いられる。テスターなどで測定する際の２端子法と比較して，４端子法の利点は何か，図を用いて分かりやすく説明せよ。また，試料とリード線の間に生じる熱起電力の効果を取り除くためにはどのようにすればよいか，述べよ。

(2) ある物質の電気抵抗率を４端子法で測定するため，長さ 20.00±0.01 mm，幅 1.00±0.01 mm，厚さ 0.50±0.01 mm の直方体に成形された試料を用いて回路をつくり，10.000±0.001 mA の直流電流を試料の長さ方向に流したところ，電圧計の値は 0.0560±0.0001 mV であった。この物質の電気抵抗率を誤差とともに計算せよ。ただし，４つの端子は隣り合う端子間の距離がすべて 4.00±0.01mm となるように等間隔に試料に取り付けられ，電流は一様に流れるとする。また，試料とリード線の間に生じる熱起電力は無視してよい。

$\boxed{6}$ の2

(1)　± 1mm の絶対誤差で読むことができるものさしを用いる場合，相対誤差がア)1%，イ)5%を超えないで測定できる最小の長さはいくらか。

(2)　$R-C$ 直列回路のインピーダンス Z が $Z=\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2 C^2}}$ で与えられることを利用して R と C を求めたい。未知量をグラフの直線の傾きや切片などから決めるにはどのようにすればよいか。

(3)　バネの振動の周期を測定してバネ定数を求める実験を考える。以下の条件を読み，どのような測定を行うべきかを述べよ。その際，根拠を明確にすること。

使用器具	：	スタンドから吊り下げられたバネ(おもりを載せる受け皿付)，おもりのセット(0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5kg 各1ヶ)，0.01 秒の精度で測定できるストップウォッチ，電卓，定規，方眼紙。
使用するモデル	：	バネを振動させたときの周期 T と荷重の質量 m の関係は $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ で与えられる。k はバネ定数。
その他の要請	：	バネ定数の誤差がおおよそ 10%を超えないように測定すること。

ただし，おもりの質量は十分正確であり，時間測定は人的誤差を含めて ± 0.3 秒の誤差で測定できるものとする。