平成２１年度

信州大学大学院工学系研究科
修士課程 物質基礎科学専攻

第 II 期募集 入学試験問題

専門科目(物理学系)

解答するときの注意事項

1. ５問中４問を選択して解答せよ。

2. 解答用紙は１問につき１枚を使用し，白紙の場合でも必ず４枚を提出すること。

3. 各解答用紙には選択した問題番号，受験番号を必ず記入すること。

4. 必要ならば解答用紙の裏面を使用してもよい。

1

図１のように，鉛直に置かれたばね定数kのばねの一方のはしを床に固定し，他のはしにつけた重さの無視できる糸を半径R，質量Mの自由に回転できる定滑車（慣性モーメント$MR^2/2$）にかけ，糸の先に質量mのおもりをつるした。おもりをつりあいの位置からaだけ下方に引き下げ，時刻$t=0$で静かに手を離したところ，おもりは単振動を始めた。つりあいの位置から測ったおもりの変位をx，重力加速度の大きさをgとして，以下の問題に答えよ。

（１） 糸が滑車をすべって滑車が回らない場合，

(a) 運動方程式を解き，時刻tでのxを求めよ。

(b) 単振動の周期はいくらか。

(c) (a) の解を用いて系の全エネルギーを求め，それがtによらない定数であることを示せ。

（２） 糸がすべらず滑車が回転する場合，

(d) 運動方程式を解き，時刻tでのxを求めよ。

(e) 単振動の周期を求め，(b) の周期と比べよ。

(f) (d) の解を用いて系の全エネルギーを求め，(c) と比べよ。

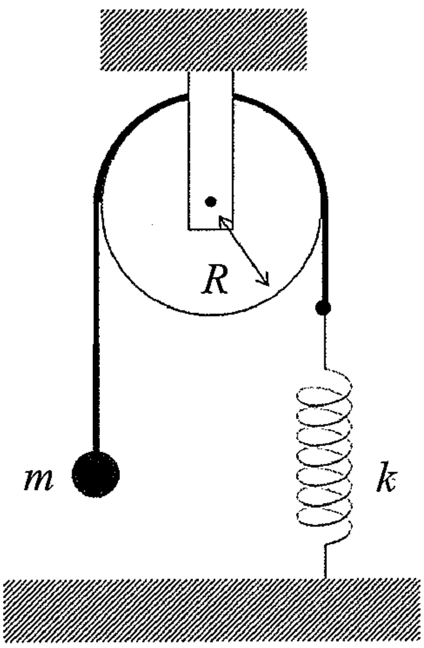

図１

$\boxed{2}$

半径 a の円盤上に電荷が面密度 σ で一様に分布している。この円盤が中心軸のまわりに角速度 ω で回転するとき，以下の問題に答えよ。

1. 円盤の中心から x の距離にある中心軸上の点Pに生じる磁束密度を求めたい。
   (1) 円盤と同心の半径 $r\,(<a)$，幅 Δr の輪に分布する電荷によって点Pに生じる磁束密度を求めよ。
   (2) 円盤全体からの寄与を加え合わせて点Pに生じる磁束密度を求めよ。

2. 図 2 のように，この円盤の中心軸と，円盤の中心を中心とする半径が無限に大きく円盤に垂直な半円弧とからなる閉じた径路 C について，磁束密度の線積分を計算してアンペールの法則が成り立つことを示せ。

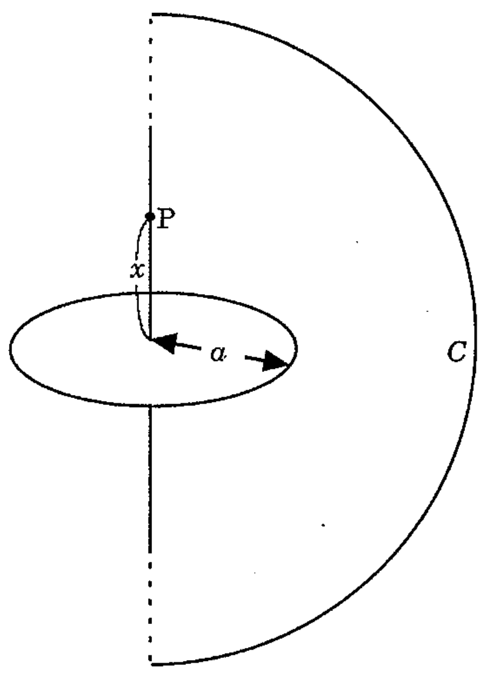

図 2

$\boxed{3}$

1次元空間において，質量 m の粒子が次のようなポテンシャルにより束縛されているとする。

$$V(x) = \begin{cases} \infty & (x < 0) \\ -V_0 & (0 \le x \le a) \\ 0 & (a < x) \end{cases}$$

ここで，V_0 は正の実定数である。以下の問題に答えよ。

1. 横軸を x，縦軸を V として，ポテンシャルを図示せよ。
2. 粒子のエネルギーを E，粒子の波動関数を $\psi(x)$ とする。$\psi(x)$ が従う微分方程式を書き下せ。
3. $\psi(x)$ が従う微分方程式を解いて，E を求める式を導け。
4. 束縛状態（$E < 0$ であるような状態）が1個だけ存在するための条件式を求めよ。

4

流体中を浮遊する質量 m の粒子の運動を考える。粒子に働く力は，流体の存在による速度に比例した摩擦力と，流体分子による乱雑な力 $\boldsymbol{F}(t) = (F_x(t), F_y(t), F_z(t))$ のみとすると，粒子の x 方向の変位 $x(t)$ の運動方程式は α を正の定数として

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\alpha\frac{dx}{dt} + F_x(t) \tag{1}$$

と書ける。流体中には粒子が多数 (N 個) あり，流体と粒子の全体は温度 T で熱平衡状態にあるとして，以下の問題に答えよ。ただし，i 番目の粒子についての量を $Z_i(t)$ としたとき，N 個の粒子についての平均を

$$\overline{Z(t)} \equiv \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Z_i(t) \tag{2}$$

のように表す。

[あ] $\overline{F_x(t)} = 0$ となるとき，$\overline{x(t)}$ を求め，横軸を t, 縦軸を $\overline{x(t)}$ として，図示せよ。ただし，初期条件として $\overline{x(0)} = 0$, $\overline{\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)_{t=0}} = v_0$ とする。

次に $\overline{x^2(t)}$ を求めるために，式 (1) の両辺に x を乗じ，$2x\frac{dx}{dt} = \frac{dx^2}{dt}$ などを利用すると，

$$\frac{1}{2}m\overline{\frac{d^2x^2}{dt^2}} - m\overline{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = -\frac{1}{2}\alpha\overline{\frac{dx^2}{dt}} + \overline{xF_x} \tag{3}$$

が得られる。以下 $\overline{F_x(t)} = 0$ は成り立つものとする。

[い] 式 (3) を導け。

[う] 粒子 i の変位 $x_i(t)$ と粒子 i が受ける乱雑な力 $F_{ix}(t)$ が無相関とし，$\frac{1}{2}m\overline{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = \frac{1}{2}k_{\mathrm{B}}T$ が成り立つとして，$X(t) \equiv \overline{\frac{dx^2}{dt}}$ を求めると，初期条件 $X(0) = 0$ のとき

$$X(t) = \frac{2k_{\mathrm{B}}T}{\alpha}\left\{1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right)\right\} \tag{4}$$

となることを示せ。ただし，k_{B} は Boltzmann 定数である。

[え] 室温 $T = 300$ [K] において，$\alpha \sim 10^{-5}$ [g/s], $m \sim 10^{-13}$ [g] としたとき，$\overline{x^2(t)}$ の時間依存性について考察せよ。

[お] [あ] で求めた $\overline{x(t)}$ と [え] の解より求まる $\sqrt{\overline{x^2(t)}}$ について違いがある場合，その理由について述べよ。

5

光電管を用いて，プランク定数の値を測定する。以下の問題に答えよ。

(1) 光電効果について説明せよ。また光電効果を用いた光電管の動作原理について説明せよ。

(2) 反射型回折格子による分光原理を説明せよ。また，スペクトル分散の角度依存性を導出せよ。

(3) 次に挙げる装置を用いて，プランク定数を測定するための実験装置の配置を図示し，実験手順を述べよ。

光電管，ハロゲンランプ，集光レンズ，スリット，反射型回折格子，色フィルタ