平成22年度

信州大学大学院 工学系研究科
修士課程 物質基礎科学専攻

第Ⅱ期募集 入学試験問題

専門科目 (物理学系)

解答するときの注意事項

1. 5問中4問を選択して解答せよ。
2. 解答用紙は1問につき1枚を使用し，白紙の場合でも必ず4枚提出すること。
3. 各解答用紙には，選択した問題番号，受験番号を必ず記入すること。
4. 必要ならば解答用紙の裏面を使用してもよい。

1

1) 質量 M, 半径 r の一様な直円柱の軸のまわりの慣性モーメントを求めよ。

2) 1)の円柱が水平面と角度 θ をなす滑らかな斜面上を滑り落ちる場合，重心の加速度を導出せよ。

3) 2)の斜面が粗く，円柱が滑らずに転がり落ちる場合の重心の加速度を導出し，滑り落ちる場合の何倍になるかを示せ。

4) 3)の場合の重心の加速度を解析力学の手法を用いて導出せよ。

2

誘電率 ε_1 の無限に広がった誘電体に，一様電場 $\boldsymbol{E}_0$ がかけられている。この誘電体中に，半径 a，誘電率 ε_2 の別の誘電体球をおく (図 1)。このときの球の内部と外部の静電ポテンシャルを求める。次の問いに答えよ。

1. 極座標で表した z 軸について対称な静電ポテンシャル

$$\phi(r,\theta)=\left(A_0+\frac{B_0}{r}\right)+\left(A_1 r+\frac{B_1}{r^2}\right)\cos\theta$$

が，極座標で表したラプラス方程式

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}=0$$

の解になっていることを示せ。ここで，A_0，B_0，A_1，B_1 は定数である。

2. 球の中心に座標の原点をとり，一様電場の方向を z 軸に平行にとった場合に，この球の内部と外部の静電ポテンシャルを求めよ。

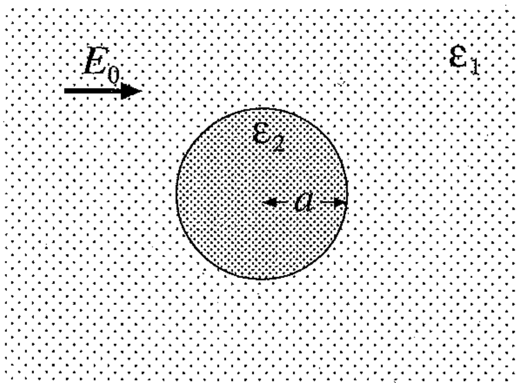

図 1

$\boxed{3}$

次のような階段型ポテンシャルによる反射と透過の問題を考える。

$$V(x) = \begin{cases} \frac{\hbar^2(k^2-q^2)}{2m} & (x < 0) \\ 0 & (x \geq 0) \end{cases}$$

このポテンシャル中を運動する質量 m, エネルギー $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ の粒子の波動関数が

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{iqx} + Re^{-iqx} & (x < 0) \\ Te^{ikx} & (x \geq 0) \end{cases}$$

という形で与えられるとして, 以下の問いに答えよ。ただし R, T, k, q は x によらない定数であり, k と q は実数とする。

(1) 上で与えられた波動関数が, $x < 0$ および $x > 0$ でシュレーディンガー方程式を満たしていることを示せ。

(2) 反射係数 R と透過係数 T を求めよ。

(3) $q(1 - |R|^2) = k|T|^2$ を示せ。また, この等式の意味を説明せよ。

4

直線上に原子が等間隔に N 個並び，各原子は任意の方向を向くことができるスピン $\vec{S}_i = (S_{ix}, S_{iy}, S_{iz})$, $|\vec{S}_i| = 1$ をもつとする。隣り合うスピンの間にのみ相互作用 $-J\vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i\pm1}$ $(J > 0)$ が働くとすると，この系の Hamiltonian は

$$H = \sum_{i=1}^{N-1} -J\vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i+1} \tag{1}$$

で与えられる。この系が温度 T の熱浴と熱平衡状態にあるとして，以下の問いに答えよ。

(A) 分配関数 Z を導く式を書け。

(B) 以下の式を用いて Z を導け。

$$\int_{|\vec{S}_i|=1} \exp\left(\beta J \vec{S}_{i-1} \cdot \vec{S}_i\right) d\vec{S}_i = \frac{2\pi}{\beta J} \sinh(\beta J) \tag{2}$$

Boltzmann 定数を k_B として $\beta = \frac{1}{k_\mathrm{B}T}$ とし，$\int_{|\vec{S}_i|=1}$ は積分範囲が $|\vec{S}_i| = 1$ の球面上であることを意味する。

(C) Helmholtz 自由エネルギー F が次の式で与えられることを示せ。

$$F = -\frac{N}{\beta} \log\left(\frac{2\pi}{\beta J} \sinh \beta J\right) \tag{3}$$

(D) 比熱 $\frac{C(t)}{Nk_\mathrm{B}} = \frac{1}{Nk_\mathrm{B}} \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_N$ の概形を描け。$t \equiv \frac{k_\mathrm{B}T}{J}$ とし, U は内部エネルギーとする。

(E) 直線上のスピン系のモデルとしては，この問題で用いたモデルの他に Hamiltonian が

$$H_I = \sum_{i=1}^{N-1} -K\sigma_i\sigma_{i+1}, \qquad (K > 0, \sigma_i = \pm 1) \tag{4}$$

で与えられる Ising モデルがあり，その比熱 $C_I(t)$ は

$$\frac{C_I(t)}{Nk_\mathrm{B}} = \left\{ t \cosh\left(\frac{1}{t}\right) \right\}^{-2}, \qquad \left(t = \frac{k_\mathrm{B}T}{K}\right) \tag{5}$$

である。(図 2 参照) 低温において (D) の結果と定性的な違いがある場合，その理由を説明せよ。

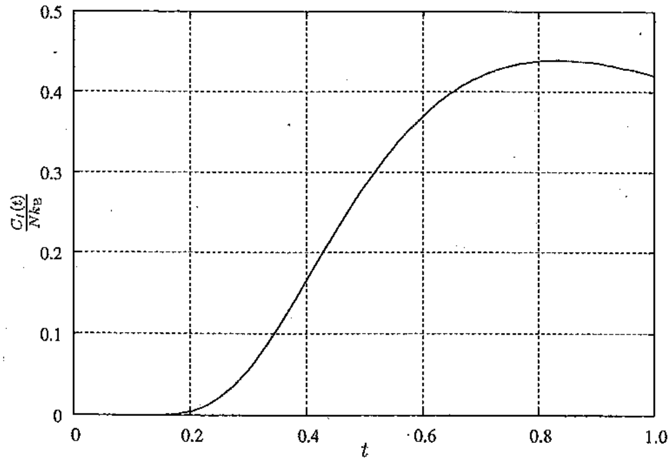

図 2 Ising モデルの比熱

$\boxed{5}$

X 線回折を用いて，ある物質の，

(1) 格子定数

(2) 結晶面

を決定したい。それぞれどのようなX線解析法が適しているか。用いるX線と測定サンプルに求められる条件を明記し，実験方法および解析方法について説明せよ。