平成23年度

信州大学大学院 工学系研究科
修士課程 物質基礎科学専攻

第Ⅱ期募集 入学試験問題

専門科目 (物理学系)

解答時間　13:00 ～ 16:00

解答するときの注意事項

1. 5問中4問を選択して解答せよ。
2. 解答用紙は1問につき1枚を使用し，白紙の場合でも必ず4枚提出すること。
3. 各解答用紙には，選択した問題番号，受験番号を必ず記入すること。
4. 必要ならば解答用紙の裏面を使用してもよい。

$\boxed{1}$

質量 M の恒星のまわりを質量 m の惑星が万有引力のもとで公転しているとき, 惑星の軌道が楕円であることを示せ。ただし, $M \gg m$ とし, 万有引力定数を G とする。

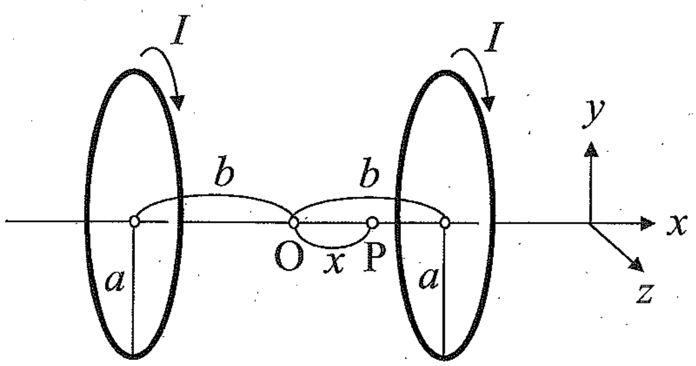
2

半径 a の同じ円形コイルを図のように中心軸を共通にして，$2b$ の間隔で対置し，両者に同じ向きに電流 I を流す。

(1) 中心線上中点 O より x の距離の点 P での磁場を求めよ。

(2) 中点 O での磁場を求めよ。

(3) $a=2b$ のとき中点 O 付近に，中心軸方向に一様な磁場が生ずることを示せ。



3

水素原子において，陽子（質量 m_p，電荷 e）と電子（質量 m_e，電荷 $-e$）の間にクーロン力がはたらく。このとき，動径方向 r に関する固有値方程式は次で与えられる。

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right)-k_0\frac{e^2}{r}\right]R=ER \tag{1}$$

ここで，$\mu\equiv\dfrac{m_e m_p}{m_e+m_p}$，$l=0,1,2,\cdots$ である。また，束縛状態なので $E<0$ である。$\rho=\sqrt{\dfrac{8\mu|E|}{\hbar^2}}r$，$\lambda=\dfrac{k_0 e^2}{\hbar}\sqrt{\dfrac{\mu}{2|E|}}$ を用いて，(1) を書き換えると

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{d}{d\rho}-\frac{l(l+1)}{\rho^2}+\frac{\lambda}{\rho}-\frac{1}{4}\right]R=0 \tag{2}$$

となる。以下の問いに答えなさい。

1. ρ がじゅうぶん大きいとき，無限遠で適切にふるまう (2) の解の漸近形を求めなさい。

2. $R=e^{-\frac{\rho}{2}}G(\rho)$ とおくとき，$G(\rho)$ に関する方程式はどんな形になるか求めなさい。

3. $G(\rho)=\rho^l L(\rho)$ とおくとき，$L(\rho)$ に関する方程式は次のようになる。

$$\rho\frac{d^2L(\rho)}{d\rho^2}+(2l+2-\rho)\frac{dL(\rho)}{d\rho}+(\lambda-l-1)L(\rho)=0$$

   級数展開 $L(\rho)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\rho^k$ を使って，$\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$ を k，l，λ を用いて表しなさい。

4. 無限遠で適切にふるまう解を得るためには，級数が途中で切れる必要がある。このことと 3. の結果を用いて，(1) のエネルギー固有値 E を求めなさい。

4

体積V（断面積S，高さH）の容器の中の理想気体について考えよう。理想気体は同種のN個の粒子から構成されており，i番目の粒子の位置ベクトルを$\boldsymbol{r}_i=(x_i,y_i,z_i)$，運動量を$\boldsymbol{p}_i$，質量を$m$とする。また，容器は絶対温度$T$の熱浴と接している。容器の底面を水平面とし，水平面に対して垂直上向き方向をz軸にとる。底面を$z=0$の面とする。理想気体の全エネルギーは$\sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{\boldsymbol{p}_i^2}{2m}+mgz_i\right\}$で与えられるとする。重力加速度の大きさを$g$，ボルツマン定数を$k_B$，プランク定数を$h$とする。以下の問いに答えよ。

なお，必要ならば，次の公式を用いよ。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-ap^2\right)\mathrm{d}p=\left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2},\ (a>0)$$

$$\ln N!\approx N\ln N-N$$

(1) 理想気体の分配関数を求めよ。

(2) 位置$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$における密度が$\sum_{i=1}^{N}\delta(x-x_i)\delta(y-y_i)\delta(z-z_i)$で与えられることを用いて，$z=l$における理想気体の密度の平均値$n(l)$を求め，それを図示せよ。ここで$\delta(x)$はディラックのデルタ関数とする。

(3) 理想気体の自由エネルギーを求めよ。

(4) 理想気体の全エネルギーの平均値を求めよ。

(5) 重力を無視した場合，理想気体の全エネルギーの平均値はどのようになるかを求めよ。

5

[1] 物差しを $\pm 1\mathrm{mm}$ の絶対誤差で読むことができるとする。相対誤差が (a) 1%, (b) 5%を超えずに測定できる最小の長さはそれぞれいくらか。

[2] 14.253 ± 0.15 と表された値がある。有効数字を考慮して書き直すとどのようになるか。

[3] ひもを伝わる波の速さ v を考える。v がひもの張力 T と単位長さあたりの質量 m によって決まるとした場合，$v \propto T^a m^b$ と表せる。次元解析の手法を用いて a, b を求めよ。

[4] 水素スペクトルのバルマー系列における輝線の波長 λ は

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}\right)$$

で表される。λ と n を測定して R を求める場合，どのようにすれば R をグラフの傾きや切片から求めることができるか述べよ。