平成24年度

信州大学大学院 理工学系研究科
修士課程 物質基礎科学専攻

一般選抜Ⅱ 入学試験問題

専門科目(物理学系)

解答時間　13:00 ～ 16:00

解答するときの注意事項

(1) 5問中4問を選択して解答せよ。

(2) 解答用紙は1問につき1枚を使用し，白紙の場合でも必ず4枚提出すること。

(3) 各解答用紙には選択した問題番号と受験番号を必ず記入すること。

(4) 必要ならば解答用紙の裏面を使用してもよい。

$\boxed{1}$ 滑らかな水平面上で，ばねの一端が固定され，他端に質量 m の小さいおもりが付けられていて単振動しているとする。ばね定数を $k(>0)$，時刻 t でのつりあいの位置からのおもりの変位を $q(t)$ とする。ばねの質量は無視できるとして，以下の問いに答えよ。

(1) おもりに関するニュートンの運動方程式を書き下し，その一般解を求めよ。

(2) 初期条件 $q(0) = q_0$，$v(0) = 0$ の下で特解を求め，それをグラフに描け。ここで，$v(t)$ は時刻 t でのおもりの速度である。

(3) この運動を記述するラグランジアンを書き下し，ハミルトニアンを求めよ。

(4) おもりに関するハミルトンの正準方程式を書き下し，ニュートンの運動方程式と等価であることを示せ。

(5) このおもりの位相空間における軌道を求め，それを図示せよ。

2

z 軸上で点 A $(0, 0, a)$ から点 B $(0, 0, -a)$ まで $(a > 0)$, 電荷が線密度 λ で一様に分布している。以下の問いに答えよ。

(1) yz 平面上の点 P $(0, y, z)$ の電位を求めよ。公式 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + d^2}} = \log\left(x + \sqrt{x^2 + d^2}\right)$ を用いてもよい。

(2) 点 P における電場の x, y, z 成分を求めよ。

(3) $a \to \infty$ とした時の, 点 P における電場を求めよ。

(4) 無限に長い直線上に電荷が一様に分布している時の電場をガウスの法則により求め, 問 (3) の解と一致することを確かめよ。

3 1次元空間での質量 m の粒子に対する量子論で，規格化可能状態を考える。座標を x $(0 < x < \infty)$，運動量を p とする。以下の問いに答えよ。

正の結合定数 g と角振動数 ω に対して，関数 $w(x;g)$ と演算子 $A(g)$ 及びそのエルミート共役 $A(g)^\dagger$ を

$$w(x;g) = -\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2 + g\log\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x\right),$$

$$A(g) = ip - \hbar\frac{dw(x;g)}{dx}, \quad A(g)^\dagger = -ip - \hbar\frac{dw(x;g)}{dx}$$

と定義する。ハミルトニアン $H(g)$ とポテンシャル $U(x;g)$ を

$$H(g) = \frac{1}{2m}A(g)^\dagger A(g) = \frac{1}{2m}p^2 + U(x;g)$$

と定義し，固有関数 $\phi_n(x;g)$ 及びエネルギー固有値 $E_n(g)$ を

$$H(g)\phi_n(x;g) = E_n(g)\phi_n(x;g) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots ; E_0(g) < E_1(g) < E_2(g) < \cdots)$$

とおく。

(1) $U(x;g)$ を求めよ。

(2) 基底状態は $A(g)\phi_0(x;g) = 0$ となる状態であり，$E_0(g) = 0$ である。基底状態の波動関数 $\phi_0(x;g)$ を求めよ ($w(x;g)$ を用いて表せ)。但し規格化は $\phi_0(1;g) = (\frac{m\omega}{\hbar})^{\frac{g}{2}}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}}$ とせよ。

(3) $A(g)A(g)^\dagger$ を計算せよ。

(4) $A(g)A(g)^\dagger = A(g+1)^\dagger A(g+1) + b(g)$ となることを示し，定数 $b(g)$ を求めよ。

(5) 状態 $A(g)^\dagger\phi_0(x;g+1)$ が $H(g)$ の固有状態であることを示し，そのエネルギー固有値を求めよ。

(6) 状態 $A(g)^\dagger A(g+1)^\dagger\phi_0(x;g+2)$ が $H(g)$ の固有状態であることを示し，そのエネルギー固有値を求めよ。

(7) 同様に状態 $A(g)^\dagger A(g+1)^\dagger\cdots A(g+n-1)^\dagger\phi_0(x;g+n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ は $H(g)$ の固有状態となるが，そのエネルギー固有値を求めよ。

(8) 問 (5) の $A(g)^\dagger\phi_0(x;g+1)$ を具体的に計算し，それを $\phi_0(x;g)$ で割った量を答えよ。

実は，問 (7) の状態が $\phi_n(x;g)$ を与え，$\phi_n(x;g)$ を $\phi_0(x;g)$ で割った量はラゲールの多項式を用いて表される。

4

N 個の独立な粒子からなる系がある。各粒子は二つの状態 1,2 をとるとし，そのエネルギーを $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ とする。この系が温度 T の熱浴に接して熱平衡状態にある場合を考えよう。以下の問いに答えよ。

(1) 分配関数を求めよ。

(2) エントロピー S が $S = -k_{\mathrm{B}} N \sum_{i=1,2} p_i \log p_i$ で与えられることを示せ。

ただし $p_i = \dfrac{e^{-\frac{\mathcal{E}_i}{k_{\mathrm{B}}T}}}{\sum_{j=1,2} e^{-\frac{\mathcal{E}_j}{k_{\mathrm{B}}T}}}$ とする。ここで k_{B} はボルツマン定数である。

(3) 高温極限ではエントロピーが $k_{\mathrm{B}} N \log 2$ となることを示せ。

(4) 絶対零度でのエントロピーを求めよ。

(5) $T =$ 一定（有限）でエネルギー準位 $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ が変化する場合を考えよう。エントロピーが最大となる $\mathcal{E}_1$ と $\mathcal{E}_2$ の関係を求めよ。

5 ある放射線源から出る放射線を測定したい。まず，放射線源がない状態でバックグラウンド（背景放射線）を T_B 秒間測定したところ，N_B カウントを計数した。次に線源をおいて T 秒間測定したところ，N カウントを計数した。ここで，n カウントの放射線を計数したとき，その計数の標準偏差は $\sqrt{n}$ であるとし，計測時間 T および T_B の誤差は無視できるものとする。また，バックグラウンドの平均計数率は変化しないものとする。計数率とは単位時間当たりの計数のことである。以下の問いに答えよ。

(1) 放射線源から出る放射線の計数率 r とその標準偏差 σ_r を求めよ。

(2) 全計測時間が一定時間 T_0 に制限されているとき（$T+T_\mathrm{B}=T_0$），σ_r を最小にする最適時間 T_B を求めよ。

(3) 半減期が τ の放射性原子核の時刻 t における個数 $N=N(t)$ は，次の微分方程式

$$\frac{dN}{dt}=-\frac{1}{\alpha}N$$

に従う。ここで，$\alpha=\dfrac{\tau}{\log 2}$ である。この原子核の半減期 τ を求める方法を説明せよ。