平成25年度

信州大学大学院 理工学系研究科
修士課程 物質基礎科学専攻

一般選抜第Ⅱ期募集 学力試験問題

専門科目 (物理学系)

解答時間　13:00 ～ 16:00

解答するときの注意事項

1. 5問中4問を選択して解答せよ。
2. 解答用紙は1問につき1枚を使用し，白紙の場合でも必ず4枚提出すること。
3. 各解答用紙には選択した問題番号と受験番号を必ず記入すること。
4. 必要ならば解答用紙の裏面を使用してもよい。

1 質量が m_1, m_2，位置ベクトルが $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ の2個の質点があり，これらの質点には，相対座標 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ のみの関数 $U(\boldsymbol{r})$ をポテンシャルとする内力のみが働いているとする。重心の位置ベクトルを $\boldsymbol{R}$，2質点の換算質量を μ として，以下の問いに答えよ。

(1) この質点系のラグランジアンが，

$$L(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{R}}, \dot{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\boldsymbol{r}}^2 - U(\boldsymbol{r})$$

と書けることを示せ。ただし $M = m_1 + m_2$ である。

(2) ラグランジュの運動方程式を書き下し，重心の速度が一定であることを示せ。

(3) $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}$ に正準共役な運動量 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{p}$ を求めよ。

(4) ハミルトニアンを導き，$\boldsymbol{R}$ が循環座標であることを示せ。また，それが意味することを述べよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 図1に示すように，同一平面内に，無限に長い直線導線と，その導線から距離 d の点を中心とする半径 a $(a < d)$ の円形コイルがあり，それぞれに I_1, I_2 の一定の電流を図1の矢印の向きに流す。次の問いに答えよ。ただし，直線導線と円形コイルが置かれている空間の透磁率を μ_0 とする。

(1) 直線導線が作る磁束密度を求めよ。

(2) 電流 I_1 が作る，円形コイルを貫く磁束を求めよ。

(3) 直線導線と円形コイルの相互インダクタンスを求めよ。

(4) 直線導線と円形コイルの間に働く力の大きさと向きを求めよ。

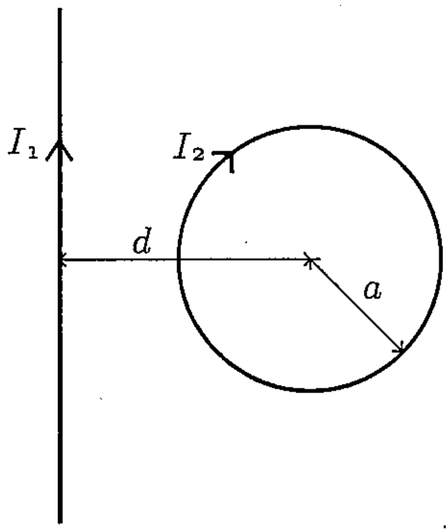

図1

3

1次元空間での質量 m の粒子に対する量子論で，規格化可能状態を考える。座標を $x\ (-\infty < x < \infty)$，運動量を p とし，角振動数 ω を正の定数，ハミルトニアン H を

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

とする。以下の問いに答えよ。問題文の最後に付けた数学公式を用いてよい。

(1) $[x, p]$ を答えよ。

(2) $[H, x]$ を計算せよ。

(3) $[H, p]$ を計算せよ。

(4) $(\mathrm{ad}H)^2 x$ と $(\mathrm{ad}H)^3 x$ を求めよ。ad という記号については下の数学公式を見よ。

(5) $(\mathrm{ad}H)^{2n} x$ と $(\mathrm{ad}H)^{2n+1} x\ (n = 0, 1, 2, \ldots)$ を求めよ。

演算子 A に対するハイゼンベルグ方程式 $i\hbar\dfrac{dA(t)}{dt} = [A(t), H]$ は，$A(t) = e^{itH/\hbar}Ae^{-itH/\hbar}$ と解かれる (A は時刻 $t = 0$ でのもの)。

(6) 座標 x のハイゼンベルグ解 $x(t) = e^{itH/\hbar}xe^{-itH/\hbar}$ を計算せよ。

(7) 前問の答は $x(t) = a^{(-)}e^{-i\alpha t} + a^{(+)}e^{i\alpha t}$ (α は正の定数) という形の時間依存性をしているが，$a^{(-)}$ と $a^{(+)}$ を求めよ。

(8) $[H, a^{(+)}]$ を計算せよ。

時間に依らないシュレディンガー方程式 $H\phi_n(x) = E_n\phi_n(x)$ を考える。(波動関数 $\phi_n(x)$ は必ずしも規格化していない。)

(9) シュレディンガー方程式 (微分方程式) を書き下せ。

(10) 基底状態の波動関数は $\phi_0(x) = e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$ で与えられるが，これがシュレディンガー方程式を満たすことを確かめ，E_0 を求めよ。

(11) $\phi_1(x) = a^{(+)}\phi_0(x)$ がシュレディンガー方程式を満たすことを示し，E_1 を求めよ。

(12) $\phi_2(x) = a^{(+)}\phi_1(x)$ がシュレディンガー方程式を満たすことを示し，E_2 を求めよ。

[数学公式]

演算子 A, B に対して，多重交換子を

$$(\mathrm{ad}A)^0 B = B, \quad (\mathrm{ad}A)B = [A, B], \quad (\mathrm{ad}A)^2 B = [A, [A, B]],$$
$$(\mathrm{ad}A)^3 B = [A, [A, [A, B]]], \quad (\mathrm{ad}A)^4 B = [A, [A, [A, [A, B]]]], \ \ldots$$

と書く。この記号を用いると，

$$e^A B e^{-A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\mathrm{ad}A)^n B,$$

が成り立つ。

$\boxed{4}$ 相互作用がほとんど無視できるスピン0のBose粒子 N 個が一辺の長さ L の立方体の箱に入っており，この立方体が温度 T の熱浴と熱平衡状態にあるとする。粒子1個の質量を m, $N \gg 1$ として以下の問いに答えよ。ただし，Planck定数を h, Boltzmann定数を k_{B}, $\beta = \frac{1}{k_{\mathrm{B}}T}$ とする。

(1) 粒子に働くポテンシャル $V(\vec{r})$ が

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} +\infty & (\vec{r}:\text{箱の外}) \\ 0 & (\vec{r}:\text{箱の中}) \end{cases}$$

として，Bose粒子(1個)のエネルギー固有値を ε とすると，基底状態では $\varepsilon_0 = \frac{3h^2}{8mL^2}$ となることを示せ。

(2) L が十分大きく，ε の分布が連続的とみなせるとしたとき，エネルギーが $\varepsilon \sim \varepsilon + \delta\varepsilon$ にある状態の数が $g(\varepsilon)\delta\varepsilon = 2\pi\left(\frac{2mL^2}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\varepsilon}\,\delta\varepsilon$ で与えられることを示せ。

(3) 化学ポテンシャルを μ とすると，Bose分布は

$$f(\varepsilon) = \frac{g(\varepsilon)}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}$$

である。$f(\varepsilon)$ が物理的に有意であるためには，L が十分大きいとすると，$\mu < 0$ の条件が課せられる。その理由を説明せよ。

(4) 立方体中のBose粒子の数密度 $n \equiv \frac{N}{L^3}$ が

$$n = \left(\frac{2m\pi}{\beta h^2}\right)^{\frac{3}{2}} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{\exp(\beta\mu\ell)}{\ell^{3/2}}$$

となることを示せ。

(5) 箱の体積が温度によって変化しないとき，μ が温度 T の単調減少関数となることを示せ。

(6) 温度を下げて，$T = T_c > 0$ で $\mu(T_c) = 0$ となったとする。このときBose粒子系はどのような状態になると考えられるか答えよ。

5

(1) 反射型回折格子によって白色光が分光される原理を説明せよ。

(2) 反射型回折格子を用いて分光装置を構築することを考える。分光装置全体の概略図を描き，装置の原理を説明せよ。その際，使用した光学部品・デバイスのそれぞれの役割も説明せよ。