# 平成27年度

# 信州大学大学院 理工学系研究科
# 物質基礎科学専攻

## 一般選抜 第Ⅱ期 学力試験問題

## 専門科目(物理学系)

解答時間　13:00 ～ 16:00

解答するときの注意事項

1. 5問中4問を選択して解答せよ。
2. 解答用紙は1問につき1枚を使用し，白紙の場合でも必ず4枚提出すること。
3. 各解答用紙には選択した問題番号と受験番号を必ず記入すること。
4. 必要ならば解答用紙の裏面を使用してもよい。

**1** 図1に示すように，鉛直な軸を直径として半径 $a$ の円が一定の角速度 $\omega$ ($\omega > 0$) で回転している。その円周上に質量 $m$ の質点がなめらかに束縛され，質点は円周に沿って自由に動くことができる。重力加速度の大きさを $g$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 円の中心からみて，鉛直上向き方向と質点方向のなす角を $\theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) としたときに，ラグランジアンを求め，質点の運動方程式を導け。

(2) 質点の釣り合いの位置 ($\theta$ が一定となる位置) を全て求めよ。

(3) 質点を問(2)のそれぞれの釣り合いの位置からわずかにずらした時の安定性を論ぜよ。

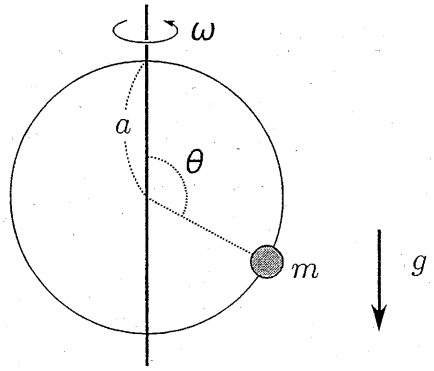


図1

**2**

(1) 図 2(a) のように，半径 $a$ の 1 巻きコイルに電流 $I$ が流れているとき，コイルが中心軸 ($x$ 軸) 上の座標 $x$ の点 P に作る磁場を求めよ。ただし中心軸はコイルが作る面に垂直であるとし，コイルの中心を原点 O とする。

(2) 図 2(b) のように，半径 $a$, 長さ $l$, 単位長さあたりの巻数 $n$ のソレノイドコイルに電流 $I$ が流れているとき，ソレノイドコイルが中心軸 ($x$ 軸) 上の座標 $x$ の点 P に作る磁場を求めよ。ただし，中心軸上のコイルの長さ方向の中心を原点 O とする。

(3) (2) のソレノイドコイルの自己インダクタンス（自己誘導係数）$L$ を求めよ。ただし，真空の透磁率を $\mu_0$ とし，コイル内部の磁場は，中心軸に垂直な断面上のいたるところで等しく，断面中心の値であるとする。

(4) 図 2(c) のように，(3) のソレノイドコイルに抵抗 $R$ の抵抗，起電力 $E$ の電池とスイッチを直列につなぎ，時刻 $t=0$ でスイッチを入れたとき，回路に流れる電流 $I(t)$ を求めよ。ただし $t=0$ で $I(0)=0$ とし，$L$ を用いてよい。

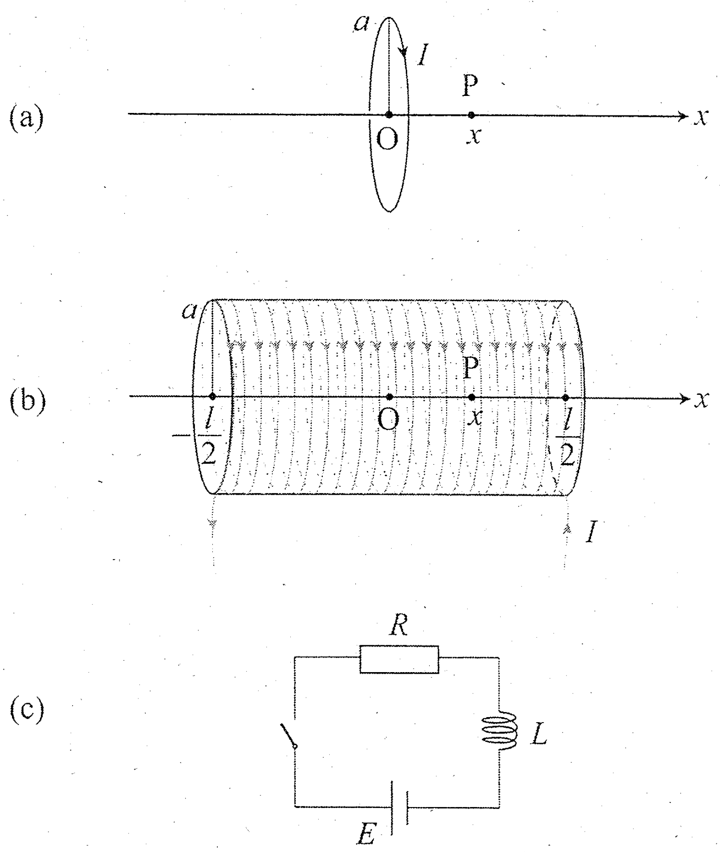


図 2

**3**

1自由度の調和振動子の量子力学を考える。座標を $x$ $(-\infty < x < \infty)$，運動量を $p$，Planck 定数を $h$ $(\hbar = \frac{h}{2\pi})$，質量を $m$，角振動数 を $\omega > 0$，ハミルトニアン $H$ を

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

とし，演算子 $a, a^\dagger$ を

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\,\frac{ip}{\hbar} + \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x\Big), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(-\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\,\frac{ip}{\hbar} + \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x\Big)$$

とする。規格化された波動関数 $\Phi(x)$ に対して，演算子 $A$ の平均 $\langle A\rangle$ と標準偏差 $\Delta A$ を

$$\langle A\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\Phi(x)^* A\,\Phi(x), \quad \Delta A = \sqrt{\big\langle \big(A - \langle A\rangle\big)^2 \big\rangle}$$

とする。以下の問いに答えよ。必要ならば問題文の最後に付けた数学公式を用いてよい。

(1) $\Delta x$ と $\Delta p$ の間に成り立つ Heisenberg の不確定性関係を書け (答のみでよい)。
(2) $x$ と $p$ の交換関係を書き，$[a, a^\dagger]$ を求めよ。
(3) $x, p, H$ を $a, a^\dagger$ を用いて表せ。

先ず，$\Phi(x)$ として

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}\Big(\frac{m\omega}{\hbar}\Big)^{\frac{1}{4}} H_n\Big(\sqrt{\tfrac{m\omega}{\hbar}}x\Big) e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2} \quad (n \text{ は0以上の整数})$$

を考える。Hermite の多項式 $H_n(x)$ は数学公式 [F2] で定義されている。

(4) $a\phi_n(x) = c_1\phi_{n-1}(x)$, $a^\dagger\phi_n(x) = c_2\phi_{n+1}(x)$ となるが，この定数 $c_1, c_2$ を求めよ。
(5) $\phi_n(x)$ が $H$ の固有関数であることを示し，その固有値を求めよ。
(6) $\langle x\rangle$, $\langle p\rangle$ を求めよ。
(7) $\Delta x$, $\Delta p$ を求めよ。また，問 (1) との関係を述べよ。

次に，$\Phi(x)$ として

$$\psi_\alpha(x) = \Big(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\Big)^{\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{2}\alpha(\alpha-\alpha^*)} e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x - \sqrt{2}\alpha)^2} \quad (\alpha \text{ は複素数})$$

を考える。$|\psi_\alpha(x)|^2 = \sqrt{\dfrac{m\omega}{\pi\hbar}}\, e^{-(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x - \frac{\alpha+\alpha^*}{\sqrt{2}})^2}$ である。

(8) $\psi_\alpha(x)$ が $a$ の固有関数であることを示し，その固有値を求めよ。
(9) $\langle x\rangle$, $\langle p\rangle$ を求めよ。
(10) $\Delta x$, $\Delta p$ を求めよ。また，問 (1) との関係を述べよ。

[数学公式]

[F1] : $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-bx^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{b}}$ $(b > 0)$. この式の両辺を $b$ で微分した式も成立。

[F2] : $\displaystyle e^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!}, \quad H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}.$

[F3] : $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) = 2^n n! \sqrt{\pi}\, \delta_{nm}.$

[F4] : $\displaystyle\frac{dH_n(x)}{dx} = 2nH_{n-1}(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x).$

**4** 質量 $m$ で相互作用のない同種粒子からなる粒子系を考える。この系の体積 $V$ は一定で，温度 $T$, 化学ポテンシャル $\mu$ の外界に接し，粒子系と外界は熱平衡状態にあるとする。Planck 定数を $h$, Boltzmann 定数を $k_{\mathrm{B}}$ として，以下の問いに答えよ。

(1) $i$ 番目の粒子の座標を $\vec{r_i}$, 運動量を $\vec{p_i}$ として，$N$ 粒子系のハミルトニアン $H$ を書け。

(2) 粒子系の大分配関数 $\Xi(T,V,\mu)$ を求めよ。

(3) 粒子系の圧力を $p$ として化学ポテンシャル $\mu(T,p)$ が

$$\mu(T,p)=\frac{1}{\beta}\log\left(p\beta\Lambda^3\right)$$

となることを示せ。ただし，$\Lambda\equiv\sqrt{\frac{h^2\beta}{2\pi m}}$, $\beta\equiv\frac{1}{k_{\mathrm{B}}T}$ とする。

(4) 前問の $\mu(T,p)$ から，粒子系のエントロピー $S(T,p,N)$ と，圧力 $p(T,V,N)$ を求めよ。

(5) 温度 $T_0$, 圧力 $p_0$ が基準点となるように，化学ポテンシャル $\mu(T,p)$ を以下の形に書き直す。$T$, $p$ に依存しない定数 $A$ 及び $\frac{T}{T_0}$ のみの関数 $y\left(\frac{T}{T_0}\right)$ と $\frac{p}{p_0}$ のみの関数 $z\left(\frac{p}{p_0}\right)$ を求めよ。

$$\mu(T,p)=\mu(T_0,p_0)+Ak_{\mathrm{B}}(T-T_0)+k_{\mathrm{B}}T\left\{y\left(\frac{T}{T_0}\right)+z\left(\frac{p}{p_0}\right)\right\}.$$

(6) 単原子分子理想気体 $n$ モルの Gibbs 自由エネルギー $G_{\mathrm{t}}(T,p,n)$ を熱力学的に求めよ。$n$ モルの理想気体は

- 内部エネルギー $U$ が温度のみの関数 $U(T)$ で，定積モル比熱 $c_v$ は定数
- 気体定数を $R$ として，状態方程式は $pV=nRT$

の 2 つの性質を持った気体とし，温度 $T_0$, 圧力 $p_0$ における Gibbs 自由エネルギーを $G_0=G_{\mathrm{t}}(T_0,p_0,n)$ とする。

(7) $\mu(T,p)=G_{\mathrm{t}}(T,p,n)/(nN_{\mathrm{A}})$ が成り立つとき，$c_v$ を求めよ。$N_{\mathrm{A}}$ は Avogadro 数とする。

**5** 下記に示す部品を用いてプランク定数を測定することを考える。
測定装置の装置図を書き，その原理を説明せよ。その際，使用する部品の役割や原理なども必要に応じて説明をすること。

使用部品： 白色光源，色ガラスフィルター，回折格子，レンズ，スリット，光電管，定電圧源，電圧計，電流計