

平成28年度

信州大学大学院 総合理工学研究科
理学専攻

一般選抜 第Ⅱ期 学力試験問題

専門科目 (理科学分野 物理学ユニット)

解答時間 13:00 ~ 16:00

解答するときの注意事項

1. 5問中4問を選択して解答せよ。
2. 解答用紙は1問につき1枚を使用し、白紙の場合でも必ず4枚提出すること。
3. 各解答用紙には選択した問題番号と受験番号を必ず記入すること。
4. 必要ならば解答用紙の裏面を使用してもよい。

1

図1のように、水平面と角 θ をなす斜面を質量 M 、半径 a の一樣な円柱が滑らず転がり降りる。斜面に沿ってはかった円柱の重心の座標を x 、重力加速度を g として、以下の問いに答えよ。

- (1) 円柱の中心軸周りの慣性モーメント I を求めよ。
- (2) 円柱の運動のラグランジアンを、重心の座標 x と速度 \dot{x} を用いて表わせ。慣性モーメントは I のままでもよい。
- (3) ラグランジュの運動方程式を用いて重心の加速度を求め、それが $g \sin \theta$ より小さいことを示せ。慣性モーメントは I のままでもよい。
- (4) 一般化された運動量 p と \dot{x} の関係を書け。
- (5) 円柱の運動のハミルトニアンを求めよ。慣性モーメントは I のままでもよい。
- (6) ハミルトニアン of 運動エネルギーの項が、重心の運動エネルギー $M\dot{x}^2/2$ と異なるのはなぜか。物理学的理由を説明せよ。

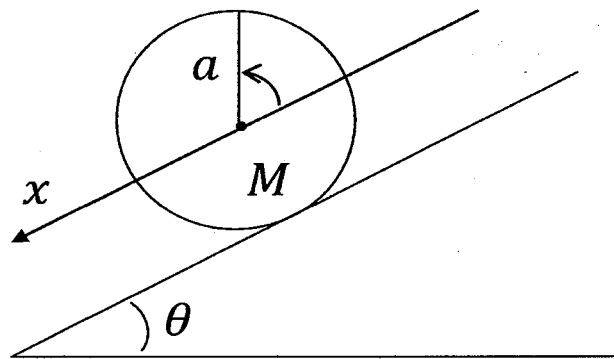


図1

2

図2のように、 z 軸を中心軸とし、 z 軸方向に無限に長い半径 a の円柱を仮定して、以下の問いに答えよ。ただし円柱の置かれている空間の誘電率と透磁率を、それぞれ ϵ_0 、 μ_0 とする。

- (1) 円柱が一様な電荷密度 ρ で帯電しているとき、円柱内外の電場を求め、グラフを示せ。
- (2) (1) の円柱の内側を半径 $b (< a)$ の同心円柱でくりぬいたとき、円筒内外の電場を求め、グラフを示せ。
- (3) 円柱が導体であり、円柱の内部に電流 I (方向は z 軸の正の向き) を一様に流したとき、円柱内外の磁場を求め、グラフを示せ。ただし導体の透磁率を μ とする。
- (4) (3) の円柱の内側を半径 $b (< a)$ の同心円柱でくりぬき、残った部分に電流 I (方向は z 軸の正の向き) を一様に流したとき、円筒内外の磁場を求め、グラフを示せ。
- (5) (3) の場合において、長さ L あたりの円柱内部の磁場エネルギーを求めよ。
- (6) (4) の場合において、長さ L あたりの円筒部分の磁場エネルギーを求めよ。
- (7) (3) の場合において、長さ L あたりの円柱の自己インダクタンス (内部インダクタンスのみでよい) を求めよ。
- (8) (4) の場合において、長さ L あたりの円筒の自己インダクタンス (内部インダクタンスのみでよい) を求めよ。

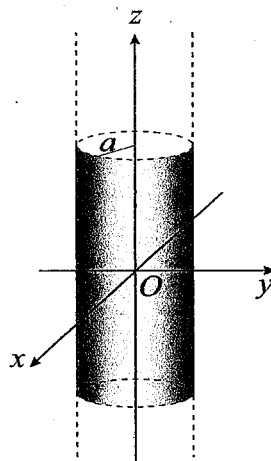


図2

3

1次元空間に質量 m の粒子がポテンシャル $V(x) = -V_0\delta(x)$ の場の中にある。 V_0 は定数で $V_0 > 0$ とし、 $\delta(x)$ はデルタ関数とする。以下の問いに答えよ。

1. 粒子の波動関数を $\psi(x)$ 、エネルギーを E としたとき、粒子がしたがう Schrödinger 方程式を書き下せ。
2. (1) で求めた Schrödinger 方程式を、微小区間 $[-\varepsilon, +\varepsilon]$ で積分し、 $\varepsilon \rightarrow 0$ とすることにより、波動関数の $x = 0$ における接続の条件を示せ。
3. 粒子がポテンシャルに束縛されている場合を考える。このときのエネルギー固有関数とエネルギー固有値を求めよ。
4. エネルギー E の自由粒子が $x < 0$ の方向から入射した場合を考える。このとき、ポテンシャルに対する反射率と透過率を求めよ。

4

長さが L の一次元空間に閉じ込められた質量 m の自由ボーズ粒子の集まりを考えよう。以下の問いに答えよ。

- (1) 一つの粒子の取り得るエネルギーが

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 n^2, \quad n \text{ は正の整数}$$

であることを示せ。

- (2) エネルギー ε と $\varepsilon + d\varepsilon$ の間に含まれる一粒子エネルギー準位の個数を $D(\varepsilon)d\varepsilon$ としたとき、この $D(\varepsilon)$ をエネルギー状態密度という。いま考えている系の $D(\varepsilon)$ を求めよ。

上の系が、温度 T の熱浴と接して熱平衡状態になったとしよう。以下の問いに答えよ。

- (3) 一つのエネルギー準位を占有する平均粒子数（ボーズ分布関数）を書け。ただし用いた文字については定義すること。
- (4) 化学ポテンシャル μ が必ず $\mu \leq 0$ であることを説明せよ。
- (5) 系に含まれる全粒子数を、最低エネルギー準位を占有する粒子数とそれ以外に分けて表せ。
- (6) (5) で求めた表式で、最低エネルギー準位以外の粒子数の和が、アッペル関数 $\phi(1/2, z)$ に比例していることを示せ。アッペル関数は以下の定義とする：

$$\phi(s, z) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t z^{-1} - 1} dt,$$

ここで、 $\Gamma(s)$ はガンマ関数で $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ とする。さらに、 $z = e^{\beta\mu}$, $\beta = 1/(k_B T)$ (k_B はボルツマン定数) とする。

- (7) アッペル関数 $\phi(1/2, z)$ は z の増加関数で $z = 1$ で正に発散する。このことを用いて、ボーズ・アインシュタイン凝縮が起こらないことを説明せよ。

5

以下の問いに答えよ。

1. 次の文章の空欄(ア)から(コ)に当てはまる式を求めよ。

N 組の測定点 $(x_1, y_1 \pm \sigma_1)$, $(x_2, y_2 \pm \sigma_2)$, \dots , $(x_N, y_N \pm \sigma_N)$ がある。ここで, x_i ($i = 1, 2, \dots, N$) に対する測定値が y_i で, y_i の測定誤差が σ_i である。これらの測定点を最小二乗法により直線 $y = ax + b$ に当てはめるとき, a と b の関数である $\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{y_i - (ax_i + b)}{\sigma_i} \right\}^2$ を最小にするように a, b を求める。この式の変分 $\delta\chi^2$ を, a, b の変分 $\delta a, \delta b$ で表すと, $\delta\chi^2 = \boxed{\text{ア}} \delta a + \boxed{\text{イ}} \delta b$ であるから, $\delta\chi^2 = 0$ となるように a と b を決定すればよい。この式を満足する必要十分条件は, $\boxed{\text{ア}} = 0$, $\boxed{\text{イ}} = 0$ が同時に満たされることであり, これらの連立一次方程式を解けば, $a = \boxed{\text{ウ}}$, $b = \boxed{\text{エ}}$ となる。次に, a, b の誤差を求める。 a, b は y_i ($i = 1, 2, \dots, N$) の関数になっているので, 誤差の伝播を用いて求めることができる。 a, b の誤差 σ_a, σ_b はそれぞれ, $\sigma_a = \boxed{\text{オ}}$, $\sigma_b = \boxed{\text{カ}}$ となる。特に, y_i の誤差 σ_i が y_i によらず $\sigma_i = \sigma$ の場合, $\sigma = \boxed{\text{キ}}$ となり, $\Delta = \boxed{\text{ク}}$ とおくと, $a = \boxed{\text{ケ}}$, $b = \boxed{\text{コ}}$, $\sigma_a = \left(\frac{\sigma}{\Delta} \sum_{i=1}^N x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, $\sigma_b = \left(N \frac{\sigma}{\Delta} \right)^{\frac{1}{2}}$ である。

2. 鉛直につるした軽いバネの上端を固定し, 下端におもりをつけ, おもりの重さを変えながら, バネの長さを測定したところ, 表1のような結果が得られた。ただし, おもりの重さの誤差は無視してよく, バネの長さの測定誤差は全て同じである。バネの自然長 (cm) とバネ定数 (N/m) を最小二乗法を用いて有効数字2桁で求めよ。重力加速度を 9.8m/s^2 とし, 誤差を求める必要はない。

おもりの重さ (g)	バネの長さ (cm)
1.0	3.7
2.0	5.4
3.0	8.1

表1