平成29年度

信州大学大学院 総合理工学研究科
理学専攻

一般選抜 第Ⅱ期 学力試験問題

専門科目 (理科学分野 物理学ユニット)

解答時間　13:00 ～ 16:00

解答するときの注意事項

1. 5問中4問を選択して解答せよ。
2. 解答用紙は1問につき1枚を使用し，白紙の場合でも必ず4枚提出すること。
3. 各解答用紙には選択した問題番号と受験番号を必ず記入すること。
4. 必要ならば解答用紙の裏面を使用してもよい。

1

図 1 のような半径 R の半円形の斜面を考える。座標軸も図のように x 軸を水平方向，y 軸を鉛直方向にとり，原点Oを半円の中心にとる。斜面は点Pより左側では摩擦がなく滑らかで，右側では摩擦がある。この斜面上の点Aに質量 m の質点を静かに置いたところ，質点は斜面を滑り降り，点Pを左から右に通過した後に点Bでいったん静止した。その後，質点は点Bから斜面を左向きに滑り降り，点Pを右から左に通過した。質点が運動している間，質点が斜面から離れることはないとして，以下の問いに答えよ。ただし，点O, 点A, 点B, 点Pは全て同一平面内にあるとし，重力加速度の大きさを g，斜面の右側で斜面と質点の間の静止摩擦係数を μ_0, 動摩擦係数を μ とする。極座標を用いる場合の角度 θ は，y 軸の負の向きから測って，反時計回りを正，時計回りを負とする。このとき $\angle \mathrm{POB} = \theta_{\mathrm{B}}$ とする。

(a) 点Aから滑り始めた質点が最初に点Pを通過するときの質点の速さ v_0 を求めよ。

(b) 点Aから滑り始めた質点が最初に点Pを通過するまでの間の質点の運動方程式を $\theta(t)$ を未知関数とする微分方程式として導け。このとき斜面から質点に働く垂直抗力の大きさを N_0 とする。

(c) 質点が点Pを通過してから点Bに到達するまでの間の質点の運動方程式を導け。このとき斜面から質点に働く垂直抗力の大きさを N_1 とする。

(d) $y=0$ を重力によるポテンシャルエネルギーの原点に選んだとき，質点が点Pを通過してから点Bに到達するまでの間の任意の点で

$$\frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - mgR\cos\theta - \tilde{\mu}R\int_0^{\theta} N_1 d\theta' = 0 \tag{1}$$

が成り立つことを示せ。ただし，$\dfrac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} > 0$ のとき $\tilde{\mu} = -\mu$，$\dot{\theta} < 0$ のとき $\tilde{\mu} = \mu$ とする。

式 (1) で，t の関数 $\dot{\theta}^2(t)$ を θ の関数 $z(\theta)$ とみなすと，$z(\theta)$ は微分方程式

$$\frac{dz}{d\theta} + \frac{2g}{R}\sin\theta - \frac{2\tilde{\mu}g}{R}\cos\theta - 2\tilde{\mu}z = 0$$

に従い，この方程式の解は C を積分定数として，

$$z(\theta) = C\mathrm{e}^{2\tilde{\mu}\theta} + \frac{2g}{R\left(4\tilde{\mu}^2+1\right)}\left\{3\tilde{\mu}\sin\theta - \left(2\tilde{\mu}^2-1\right)\cos\theta\right\}$$

となる。

(e) (a) の答えを用いて，点Pを通過してから点Bに到達するまでの間の積分定数が $C = \dfrac{12\mu^2 g}{R(4\mu^2+1)}$ となることを示せ。

(f) $\theta_{\mathrm{B}} = \frac{\pi}{3}$ となる μ の値は，$z(\frac{\pi}{3}) = 0$ から

$$\mu = \frac{3}{2\pi} \log \frac{12\mu^2}{2\mu^2 + 3\sqrt{3}\mu - 1}$$

となることが分かり，この式を満たす μ の値を数値的に求めるとおよそ $\mu \sim 0.255656$ となる。また，質点が点Bから点Pまで滑り降りる間に摩擦力がした仕事 W を求めると，

$$W = \frac{23\mu^2 - 1}{24\mu^2} mgR$$

となる。このとき，$\dfrac{W}{mgR}$ のおよその値を求めよ。ただし，点Bから滑り降りた質点は点Pを通過後，斜面の左側をある高さまで登った後に再び右向きに滑り降りて点Pを通過し，斜面の右側でおよそ $y \sim -0.93R$ の位置に静止し，その後動くことはなかった。

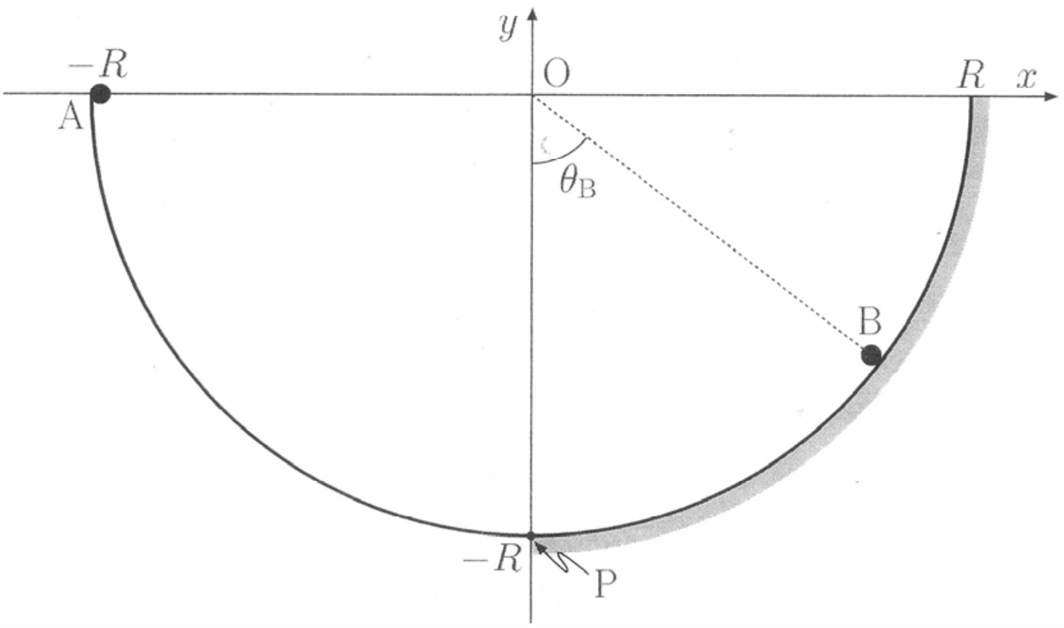

図1

2 次の設定ア～カを考える。これらは独立の設定とするが，同じ文字で書かれた量 (q, a) は同じ量とする。

ア 原点を中心とする半径 a の球内に電荷 q が一様な電荷密度で分布している。

イ 原点におかれた点電荷 q が内半径 a, 外半径 b $(a < b)$ の導体球殻で囲まれている。

ウ 点電荷 q と q が距離 a だけ離れた 2 点におかれている。（ただし，2 点の中点を原点とする。）

エ 点電荷 q と $-q$ が距離 a だけ離れた 2 点におかれている。（ただし，2 点の中点を原点とする。）

オ 半径 a の円形コイルに電流 I が流れている。（ただし，円の中心を原点とする。）

カ 一辺 $2a$ の正方形コイルに電流 I が流れている。（ただし，正方形の対角線の交点を原点とする。）

以下の問いに答えよ。

(1) アとイそれぞれにおいて，原点からの距離 r における電場を求めてグラフに描き，説明せよ。

(2) ウとエそれぞれにおいて，2 つの電荷を結ぶ直線の垂直 2 等分線上の電場を求め，グラフに描け。

(3) アとイとエそれぞれにおいて，原点からじゅうぶん離れた距離 r $(\gg b)$ における電位 $V(r)$ はどのように減衰するか。$V(r)$ の関数形を求めよ。

(4) オとカそれぞれにおいて，原点の磁場を求めよ。

(5) オとカそれぞれにおいて，原点を通りコイルに垂直な軸を x 軸とすると x 軸上で原点からじゅうぶん離れた距離 x $(\gg a)$ における磁場 $H(x)$ はどのように減衰するか。$H(x)$ の関数形を求めよ。

3 次のハミルトニアンと交換関係に従う調和振動子の量子力学を考える。

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}, \qquad [x, p] = i\hbar.$$

ここで，x は座標，p は運動量，$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$（h はプランク定数），m は質量，ω は角振動数である。

(1) 演算子 $a, a^\dagger$ を

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{\ell} + \frac{ip\ell}{\hbar}\right), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{\ell} - \frac{ip\ell}{\hbar}\right), \qquad \left(\ell = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\right)$$

のように定義すると, a と $a^\dagger$ の交換関係が

$$[a, a^\dagger] = 1$$

となることを示せ。

(2) a と $a^\dagger$ を用いて, 調和振動子のハミルトニアンが

$$H = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)$$

と表せることを示せ。

(3) 状態 $|n\rangle$ $(n = 0, 1, \cdots)$ を

$$a|0\rangle = 0, \qquad |n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle$$

のように定義すると, 次の式が成り立つことを示せ。

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \qquad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle.$$

(4) 状態 $|n\rangle$ のエネルギー E_n が

$$E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

で与えられることを示せ。

(5) 状態 $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle$ に対応する波動関数 $\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x)$ のグラフを定性的に描け。

(6) $a|0\rangle = 0$ であることを用いて, 基底状態の波動関数 $\psi_0(x)$ を求めよ。

(7) 基底状態のエネルギー $E_0 = \dfrac{\hbar\omega}{2}$ が 0 ではないことの物理的な理由を説明せよ。

4

角振動数 ω で振動する 1 個の一次元調和振動子のもつエネルギーは，

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

で与えられる。ここで，$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$（h はプランク定数）である。上式のエネルギーをもつ独立な N 個の一次元調和振動子が集まった系が，温度 T の熱浴に接して熱平衡状態に達しているとする。

(1) この系の分配関数を求めよ。

(2) ヘルムホルツの自由エネルギーを求めよ。

(3) エントロピーを求めよ。

(4) 内部エネルギーを求めよ。

(5) N をアボガドロ数 N_{A} として，1 モルあたりの定積比熱を求めよ。

(6) (5) で求めた定積比熱が高温で気体定数 R となることを示せ。またこれは何を意味しているか。

(7) 系のエネルギーのゆらぎの 2 乗の熱平均が，定積比熱に比例することを示せ。ただし，ある物理量 X のゆらぎとは，その熱平均の値 $\langle X\rangle$ からのずれ $X - \langle X\rangle$ で定義される。

5 物質の電気抵抗の温度依存性を測定することを考える。以下の問に答えよ。

(a) 温度を測定する方法として，熱電対を利用する方法がある。熱電対を用いた温度測定の原理を説明せよ。必要ならば，図などを用いて良い。

(b) 電気抵抗を測定する方法として，二端子法と四端子法がある。四端子法を用いた電気抵抗の測定原理を説明するとともに，二端子法に比べて四端子法の利点を説明せよ。

(c) ある不純物半導体の電気抵抗の温度依存性を測定したところ，おおよそ図2のようになった。図2のような特性を示すのはなぜか。そのメカニズムを説明せよ。

(d) 典型的な金属の電気抵抗の温度依存性を図示せよ。また，(c) の半導体の電気抵抗の温度依存性との違いを，メカニズムの観点から説明せよ。

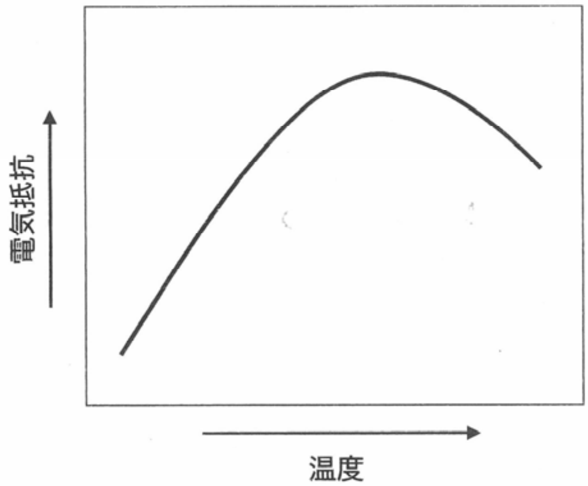

図2