2022年度

信州大学大学院 総合理工学研究科
理学専攻

一般選抜 第Ⅱ期 学力試験問題

専門科目(理科学分野 物理学ユニット)

解答時間　13:00 ～ 16:00

解答するときの注意事項

1. 5問中4問を選択して解答せよ。
2. 解答用紙は1問につき1枚を使用し，白紙の場合でも必ず4枚提出すること。
3. 各解答用紙には選択した問題番号と受験番号を必ず記入すること。
4. 必要ならば解答用紙の裏面を使用してもよい。

$\boxed{1}$ 万有引力の作用のもとで，質量 m の惑星が質量 M の恒星のまわりを回っているとする。以下の問いに答えよ。

(a) 惑星の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_1$，恒星の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_2$，万有引力定数を G とする。惑星の運動方程式と恒星の運動方程式を書き下せ。

(b) 惑星と恒星の 2 体系について，重心座標 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{G}}$ に関する運動方程式と相対座標 $\boldsymbol{r}(=\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)$ に関する運動方程式を書き下せ。

以下では，惑星に比べて恒星が十分重い場合（$M \gg m$）について考察する。このとき，相対座標に関する運動方程式は，

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -G\frac{mM}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{1}$$

で近似される。ここで，$r=|\boldsymbol{r}|$ である。

(c) (1) 式およびベクトルに関する公式 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$ を用いて，

$$\boldsymbol{e} = \frac{1}{GM}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\left(\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)-\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{2}$$

で定義されるベクトル $\boldsymbol{e}$ が保存することを示せ。

(d) 角運動量 $\boldsymbol{L} = m\boldsymbol{r}\times\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ を用いて，$\boldsymbol{e}$ は，

$$\boldsymbol{e} = \frac{1}{GMm}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\boldsymbol{L}-\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{3}$$

と表される。ベクトルに関する公式 $|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|^2 = |\boldsymbol{A}|^2|\boldsymbol{B}|^2-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^2$，$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$ を用いて，$e=\sqrt{1+\dfrac{2EL^2}{G^2M^2m^3}}$ を示せ。ここで，$e=|\boldsymbol{e}|$，$L=|\boldsymbol{L}|$ である。また，E は力学的エネルギーで，

$$E = \frac{1}{2}m\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|^2 - G\frac{mM}{r} \tag{4}$$

である。

(e) $\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{e}$ のなす角を θ とする。$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{e}$ の内積を計算することにより，$r=\dfrac{\ell}{1+e\cos\theta}$ を示せ。ここで，$\ell=\dfrac{L^2}{GMm^2}$ である。

2 水素原子の基底状態における，位置 (x, y, z) での電子の存在確率密度 ρ は，水素原子核 (質点とみなす) の位置を原点として，$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とすると，

$$\rho = \rho(r) = \frac{1}{\pi a_0^3}\exp\left(\frac{-2r}{a_0}\right)$$

と表すことができる。ただし，a_0 はボーア半径である。これを用いて水素原子の静電ポテンシャル V を，ポアッソン方程式を解くことにより求める。真空の誘電率を ε_0，素電荷を e として以下の問いに答えよ。

(1) $\rho(r)$ を全空間で積分すると 1 になることを示せ。

(2) 電荷分布が球対称であるから静電ポテンシャルも球対称となり，$V = V(r)$ と書くことができる。このとき，

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)V(r) = \frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\Big(rV(r)\Big)$$

を示せ。

(3) 「$V(\infty) = 0$ であること」および「$r \to 0$ でのポテンシャルは，原子核のみのポテンシャルに一致すること」を用いて，原点以外での水素原子の静電ポテンシャル $V(r)$ を求めよ。

$\boxed{3}$ 座標x, 運動量p, 質量m, 角振動数ω $(\omega > 0)$, ハミルトニアン$H = \dfrac{1}{2m}p^2 + \dfrac{1}{2}m\omega^2 x^2$ の調和振動子の量子論を考える。Planck 定数はhで, $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ とする。関数 $f(x)$ と $g(x)$ の内積を $(f, g) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \big(f(x)\big)^* g(x)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) 交換子 $[x, p]$ の値を書け。答のみでよい。

(2) $\begin{pmatrix} [H,x] \\ [H,p] \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}$ を満たす 2×2 定数行列 A を求めよ。

(3) $P^{-1}AP$ が対角行列となる 2×2 行列 P を求めよ。ただし, P の $(1,1)$ 成分と $(1,2)$ 成分を 1 とし, $P^{-1}AP$ の $(1,1)$ 成分は正となるようにせよ。

(4) $\begin{pmatrix} b^\dagger \\ b \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}$ とおく。$[b, b^\dagger]$ を求めよ。

(5) H を, x と p を用いずに, b と $b^\dagger$ を用いて表せ。ただし, $b^\dagger$ は b の左側に位置するようにせよ。

(6) $[H, b]$, $[H, b^\dagger]$ を求めよ。ただし, 結果は, x と p を用いずに, b と $b^\dagger$ を用いて表せ。

(7) $b\phi_0(x) = 0$ となる $\phi_0(x)$ を求めよ。ただし, $(\phi_0, \phi_0) = 1$ で, $\phi_0(x)$ は正となるようにせよ。

演算子 A に対して, $\langle A \rangle = (\phi_0, A\phi_0)$ とおく。また, $\Delta A = \sqrt{\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle}$ とおく。

(8) $\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$ を求めよ。

(9) $\langle x^2 \rangle$, $\langle p^2 \rangle$ を求めよ。

(10) Δx, Δp を求めよ。また, $\Delta x \Delta p$ はいくらになるか。

4 質量 m の N 個 $(N \gg 1)$ の同種原子が規則正しく並んだ固体結晶を考える。原子 i の位置を $\vec{r}_i = (r_{ix}, r_{iy}, r_{iz})$, $\vec{r}_i$ に共役な運動量を $\vec{p}_i$ として，ハミルトニアンを

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m} + \Phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N) \tag{1}$$

とする。固体中の原子は固体全体を動き回ることはなく，それぞれ特定の位置 $\vec{R}_{i0}$ の周りを動いていると考えられ，$\vec{r}_i = \vec{R}_{i0} + \vec{u}_i$ で原子 i の $\vec{R}_{i0}$ からの変位 $\vec{u}_i = (u_{ix}, u_{iy}, u_{iz})$ を定義する。$\Phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N)$ は原子間に働く相互作用であり，一般に複雑な関数であるが，最隣接原子間距離 R と比べて $|\vec{u}_i| \ll R$ なら，$\Phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N)$ は $\vec{u}_i$ で展開することができると考えられる。そこで，全ての $\vec{u}_i$ を並べた行ベクトル $\mathrm{U} = (u_{1x}\, u_{1y}\, u_{1z}\, \cdots\, u_{Nz})$ とその転置である列ベクトル ${}^t\mathrm{U}$，および $3N$ 次の実対称行列を Λ として，

$$\Phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N) \sim \Phi(\vec{R}_{10}, \vec{R}_{20}, \ldots, \vec{R}_{N0}) + \frac{1}{2} m \mathrm{U} \Lambda {}^t\mathrm{U} \tag{2}$$

と近似する。ただし，$\Phi(\vec{R}_{10}, \vec{R}_{20}, \ldots, \vec{R}_{N0})$ は $\Phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N)$ の最小値とし，Λ の固有値は 0 より大きいとする。以下の問 (a) ～ (e) に答えよ。ただし，$N \gg 1$ より，固体表面の効果は考えないものとする。

(a) 行列 Λ の 2 行 3 列成分または 3 行 2 列成分を Φ を用いて表わせ。また行列 Λ の成分の次元を答えよ。

(b) (2) 式に対して適当な直交行列を用いることで，(1) 式の近似式が独立な調和振動子の和

$$\tilde{H} = \sum_{j=1}^{3N} \left(\frac{P_j^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_j^2 X_j^2 \right) \tag{3}$$

で表せること，および (3) 式の P_j, X_j, ω_j の意味を説明せよ。

(c) 1 次元調和振動子の Schrödinger 方程式のエネルギー固有値 ε_n は，Planck 定数を h として $(\hbar = \frac{h}{2\pi})$，振動子の振動数を ω とすると

$$\varepsilon_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{4}$$

である。ハミルトニアンが (3) 式で与えられる固体が温度 T の熱浴中で熱平衡状態にあるとして，分配関数が

$$Z_N = \prod_{j=1}^{3N} \left\{ 2 \sinh\left(\frac{\hbar\omega_j}{2k_{\mathrm{B}}T} \right) \right\}^{-1} \tag{5}$$

となることを示せ。ただし，k_{B} は Boltzmann 定数である。

(d) 固体の内部エネルギー U が

$$U = \sum_{j=1}^{3N} \frac{\hbar\omega_j}{2} \coth\left(\frac{\hbar\omega_j}{2k_\mathrm{B}T}\right) \tag{6}$$

となることを示せ。

(e) (3) 式の ω_j のうち，$\omega \leqq \omega_j < \omega + \delta\omega$ となる j の数 $g(\omega)\delta\omega$ は階段関数 $\theta(x)$ を用いて

$$g(\omega)\delta\omega = \sum_{j=1}^{3N} \{\theta(\omega_j - \omega - \delta\omega) - \theta(\omega_j - \omega)\} = \begin{cases} \dfrac{9N\omega^2}{\omega_\mathrm{D}^3}\delta\omega & (\omega \leqq \omega_\mathrm{D}) \\ 0 & (\omega > \omega_\mathrm{D}) \end{cases}, \tag{7}$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & (x < 0) \\ 0 & (x \geqq 0) \end{cases}, \tag{8}$$

$$\sum_{\omega=0}^{\omega_\mathrm{D}} g(\omega)\delta\omega = 3N \tag{9}$$

で求まる。ここで ω_D は (3) 式の ω_j の最大値である。$N \gg 1$ で，ω が連続的 $(\delta\omega \to 0)$ とみなせるとき，(9) 式の和は

$$\sum_{\omega=0}^{\omega_\mathrm{D}} g(\omega)\delta\omega = 3N \quad \Rightarrow \quad \int_0^{\omega_\mathrm{D}} g(\omega)d\omega = 3N \tag{10}$$

のように積分に置き換えられるとする。(7)~(10) 式を利用して (6) 式が

$$U = \frac{9N\hbar\omega_\mathrm{D}}{8} \times \left(1 + \frac{8}{\eta^4}\int_0^{\eta} \frac{y^3}{\mathrm{e}^y - 1}dy\right) \tag{11}$$

となることを示し，η を求めよ。

5 光（光子）と物質の相互作用に関する以下の問いに答えよ。

(1) 下の文章の $\boxed{\text{(A)}}$ ～ $\boxed{\text{(G)}}$ に当てはまる言葉を答えよ。

光子と物質の相互作用は光子のエネルギーにより主要となる反応が異なる。1MeV 以下の低エネルギーでは $\boxed{\text{(A)}}$ が，1～10 MeV の領域では $\boxed{\text{(B)}}$ が，それより高いエネルギーでは $\boxed{\text{(C)}}$ が光子と物質の主要な相互作用になる。

$\boxed{\text{(A)}}$ では光子の全てのエネルギーが物質中の軌道に束縛された電子に与えられ，$\boxed{\text{(D)}}$ がたたき出される。$\boxed{\text{(D)}}$ の運動エネルギーは光子のエネルギーから軌道電子の $\boxed{\text{(E)}}$ を差し引いた値になる。従って光子のエネルギーが $\boxed{\text{(E)}}$ 以下ではこの反応は起こらない。

$\boxed{\text{(B)}}$ では光子が物質中の電子と $\boxed{\text{(F)}}$ 散乱することにより光子のエネルギーを部分的に電子に与え散乱する。

$\boxed{\text{(C)}}$ では光子が物質に吸収されて電子陽電子対を生成するため，電子と陽電子の質量の和に相当する 1.02 MeV のエネルギー以下の光子ではこの反応は起こらない。入射光子のエネルギーのうち 1.02 MeV を超過した分は $\boxed{\text{(G)}}$ となる。

(2) エネルギーが 100 keV 程度を超える高エネルギーの光を γ 線と呼ぶ。光のエネルギーと物質の全吸収係数から，γ 線の遮蔽に必要な物質の厚みを決定することができる。いま鉛による 10 MeV の γ 線の遮蔽を考える。10 MeV の γ 線に対する鉛の質量吸収係数を $0.050\,\mathrm{cm^2/g}$，鉛の密度を $11\,\mathrm{g/cm^3}$ として，強度を 1/100 に遮蔽するために必要な鉛の厚さを求めよ。計算過程も解答し，数値は有効数字 2 桁とする。$\ln 10 = 2.3$ として計算をしてもよい。

(3) 最先端の高エネルギー物理学実験における新粒子の探索で光子は今でも非常に重要な粒子である。近年発見されたヒッグス粒子は，ヒッグス粒子が 2 つの光子に崩壊する過程などを用いて発見された。いまこの反応について考える。ヒッグス粒子の質量とエネルギーをそれぞれ m_h, E_h，2 つの光子のエネルギーを E_1, E_2，光子の進行方向の間の角度を θ，光速度を c とするとき，$2E_1E_2(1-\cos\theta) = (m_hc^2)^2$ となることを示せ。また，m_h=125 GeV/c^2，E_h=250 GeV の場合に，光子の取りうるエネルギーの最小値と最大値を求めよ。