2023年度

信州大学大学院 総合理工学研究科
理学専攻

一般選抜 第Ⅱ期 学力試験問題

専門科目(理科学分野 物理学ユニット)

解答時間　13:00 ～ 16:00

解答するときの注意事項

1. 解答用紙は1問につき1枚を使用し，白紙の場合でも必ず4枚提出すること。

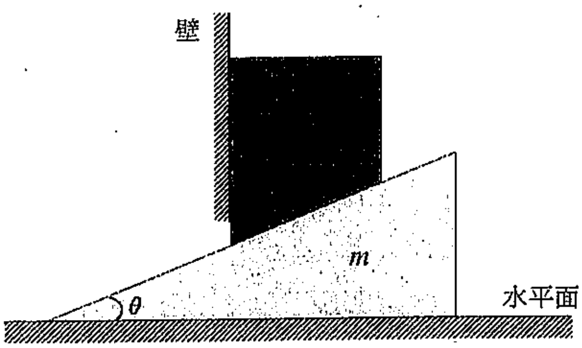
2. 各解答用紙には問題番号と受験番号を必ず記入すること。

3. 必要ならば解答用紙の裏面を使用してもよい。

1

(1) 力学的エネルギーの保存則を用いて，物体が地球の引力圏から脱出するために地球表面で持たなければならない最小の速度の大きさが 11.2 km/s であることを示せ。ただし，重力加速度の大きさを $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$，地球の半径を 6400 km とし，地球の重力以外の力は無視して考えよ。

(2) 図のように，水平面上に置かれた質量 m のくさびの上に質量 M の物体をのせる。壁を使って物体の運動を鉛直方向のみに限定し，物体に押されてくさびが水平方向に運動する場合を考える。くさびが動き出すときの加速度はいくらになるか。ただし，くさびの斜面と水平面がなす角を θ，重力加速度の大きさを g とし，摩擦は考えなくてよいものとする。



(3) 質量 m_1, m_2 の質点がそれぞれ位置 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ にある。ポテンシャル $V(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)$ が作用している場合，Lagrangian は

$$L = \frac{1}{2}m_1 \left|\frac{d\boldsymbol{r}_1}{dt}\right|^2 + \frac{1}{2}m_2 \left|\frac{d\boldsymbol{r}_2}{dt}\right|^2 - V(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)$$

と書ける。2質点系の質量中心の位置 $\boldsymbol{R} = \dfrac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2}$ と相対座標 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ を用いて Lagrangian を書き直せ。なお，途中式も省略せずに記入すること。

(4) 天井のある点Oからつり下げられた，長さ l の軽い糸の先に質量 m の小さなおもりを取り付けた振り子の運動について，運動方程式が $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{g}{l}\sin\theta = 0$ となることを Lagrangian，および Hamiltonian からそれぞれ導け。ただし，振り子は点Oを通る鉛直面内を運動するものとする。また，g は重力加速度の大きさ，θ は鉛直と糸のなす角である。

2 以下の問いに答えよ。ただし，必要ならば以下に示すマクスウェル方程式と構成方程式を用いてもよい。

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{J}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$$

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu}\boldsymbol{B}$$

ここで，$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{D}$，$\boldsymbol{B}$，ρ，$\boldsymbol{J}$は，それぞれ電場，磁場，電束密度，磁束密度，電荷密度，電流密度である。またεとμはそれぞれ媒質の誘電率と透磁率であり，ともに周波数分散は無く，かつ実数であるとする。

(1) ある媒質を伝搬する電磁波を考える。また，$\rho \neq 0$及び，$\boldsymbol{J} \neq 0$とする。

(a) マクスウェル方程式から，電荷保存則を示す以下の関係式を導け。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$$

また，関係式のそれぞれの項の物理的な意味を述べることにより，関係式が電荷保存則を示していることを説明せよ。

(b) マクスウェル方程式から，電磁場のエネルギー保存則を示す以下の関係式を導け。

$$-\frac{\partial}{\partial t}U_{\mathrm{EM}} = \nabla \cdot \boldsymbol{S} + \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J}$$

ここで，$U_{\mathrm{EM}} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B})$，$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ である。また関係式のそれぞれの項の物理的な意味を述べることにより，関係式がエネルギー保存則を示していることを説明せよ。ただし必要ならば，ベクトル公式 $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{W}) = \boldsymbol{W}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{V})-\boldsymbol{V}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{W})$ を用いてもよい。

(c) マクスウェル方程式を電磁ポテンシャルを用いて表現することを考える。$\boldsymbol{B}$ が，ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を用いて，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$ と表されるとき，$\boldsymbol{E}$ を $\boldsymbol{A}$ とスカラーポテンシャル ϕ を用いて表わせ。ただし，求める過程も示せ。

(d) マクスウェル方程式から，電磁ポテンシャル $\boldsymbol{A},\phi$ と $\boldsymbol{J}$ との間に成り立つ以下の関係式を導け。ただし必要ならば，ベクトル公式 $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{V}=\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{V})-\boldsymbol{\nabla}^2\boldsymbol{V}$ を用いてもよい。

$$\left(\boldsymbol{\nabla}^2-\varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)=-\mu\boldsymbol{J}$$

(e) マクスウェル方程式から，電磁ポテンシャル $\boldsymbol{A},\phi$ と ρ との間に成り立つ以下の関係式を導け。

$$\left(\boldsymbol{\nabla}^2-\varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi-\frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)=-\frac{\rho}{\varepsilon}$$

(f) $\boldsymbol{A}$ と ϕ をそれぞれ，以下のようにゲージ変換したとき $\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ がゲージ変換に対して不変であることをそれぞれ示せ。

$$\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}+\nabla U$$

$$\phi'=\phi-\frac{\partial U}{\partial t}$$

ここで，U は任意のスカラー場である。

(g) (f) において，U が以下の条件式を満たすとする。

$$\left(\boldsymbol{\nabla}^2-\varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)U=-\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}+\varepsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)$$

このとき，

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}'+\varepsilon\mu\frac{\partial\phi'}{\partial t}=0$$

が成り立つことを示せ。

(h) (g) において，ρ が時間に依存しないときの ϕ が満たすべき微分方程式を示し，その解を求めよ。ただし，求める過程も示せ。

(2) 真空中を伝搬する電磁波を考える。真空の誘電率と透磁率をそれぞれ ε_0，μ_0 とする。また，$\rho = 0$ 及び，$\boldsymbol{J} = 0$ とする。

(a) マクスウェル方程式から，$\boldsymbol{E}$ に関する以下の波動方程式を導け。ただし必要ならば，ベクトル公式 $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{V} = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{V}) - \boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{V}$ を用いてもよい。

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \boldsymbol{E} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

(b) 真空中を電磁波が z 方向に伝搬するとする。このとき $\boldsymbol{E}$ は x 成分のみしかもたず，ある時刻 t での x 成分は $E_x = E_0 \cos(kz - \omega t)$ と表されるものとする。ここで，E_0，k，ω はそれぞれ，振幅，波数，角周波数である。このとき，(a) の波動方程式を用いて，k と ω の間の関係式を ε_0 及び μ_0 を用いて表わせ。ただし，求める過程も示せ。

(c) (b) において，$|\boldsymbol{H}|$ と $|\boldsymbol{E}|$ の間の関係式を ε_0 及び μ_0 を用いて表わせ。ただし，求める過程も示せ。

3 以下の問い (1)〜(8) に答えよ。2 種類の状態 $|\psi_1(t)\rangle$, $|\psi_2(t)\rangle$ がそれぞれ

$$i\hbar\frac{d|\psi_1(t)\rangle}{dt} = E_1|\psi_1(t)\rangle,\quad i\hbar\frac{d|\psi_2(t)\rangle}{dt} = E_2|\psi_2(t)\rangle$$

に従って時間発展している量子力学系について考察する。ここで, $\hbar$ はプランク定数 h を 2π で割った定数, E_1 および E_2 はエネルギーで実数の定数である。

(1) 上記の微分方程式を解いて, $|\psi_1(t)\rangle$, $|\psi_2(t)\rangle$ を求めよ。

(2) $|\psi_1(t)\rangle$, $|\psi_2(t)\rangle$ の初期状態 $|\psi_1(0)\rangle$, $|\psi_2(0)\rangle$ が $\langle\psi_1(0)|\psi_1(0)\rangle = 1$, $\langle\psi_2(0)|\psi_2(0)\rangle = 1$, $\langle\psi_1(0)|\psi_2(0)\rangle = 0$, $\langle\psi_2(0)|\psi_1(0)\rangle = 0$ を満たすとする。$\langle\psi_1(t)|\psi_1(t)\rangle$, $\langle\psi_2(t)|\psi_2(t)\rangle$ を計算せよ。

次に, $|\psi_1(t)\rangle$ と $|\psi_2(t)\rangle$ からなる 2 種類の状態

$$|\psi_e(t)\rangle = \cos\theta\,|\psi_1(t)\rangle - \sin\theta\,|\psi_2(t)\rangle,\quad |\psi_\mu(t)\rangle = \sin\theta\,|\psi_1(t)\rangle + \cos\theta\,|\psi_2(t)\rangle$$

について考える。ここで, θ は混合角で実数の定数である。

(3) $|\psi_e(t)\rangle$ の状態でエネルギーを測って, E_1 という値を得る確率を求めよ。

(4) $|\psi_e(t)\rangle$ の状態におけるエネルギーの期待値を求めよ。

(5) $|\psi_1(0)\rangle$, $|\psi_2(0)\rangle$ を $|\psi_e(0)\rangle$ と $|\psi_\mu(0)\rangle$ を用いて表せ。

(6) $|\psi_e(t)\rangle$, $|\psi_\mu(t)\rangle$ を $|\psi_e(0)\rangle$ と $|\psi_\mu(0)\rangle$ を含んだ形で表せ。

(7) $|\psi_e(0)\rangle$, $|\psi_\mu(0)\rangle$ をそれぞれ ψ_e の状態, ψ_μ の状態とよぶことにする。時刻 0 で ψ_e の状態にあり, 時刻 t で ψ_μ の状態を観測する確率 $\mathrm{P}(\psi_e \to \psi_\mu; t)$ を求めよ。

(8) $\mathrm{P}(\psi_e \to \psi_\mu; t)$ に関する長時間平均

$$\overline{\mathrm{P}}(\psi_e \to \psi_\mu; t) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{P}(\psi_e \to \psi_\mu; t)\,dt$$

を計算し, $\overline{\mathrm{P}}(\psi_e \to \psi_\mu; t)$ の最大値を求めよ。

4 一辺の長さ L の立方体（体積 $V = L^3$）の中に，相互作用のない N 個のフェルミ粒子が存在しているとする。各フェルミ粒子のエネルギーは，波数ベクトル $\boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)$ を用いて，$\varepsilon(\boldsymbol{k}) = c\hbar k$ で与えられるとする。ただし，c は光速，$\hbar$ はプランク定数を 2π で割ったもの（ディラック定数），$k = |\boldsymbol{k}|$ である。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 波数 (k_x, k_y, k_z) の値は，フェルミ粒子に対する波動関数に周期的境界条件（周期 L）を課すことにより，

$$(k_x,\ k_y,\ k_z) = \left(\frac{2\pi}{L}n_x,\ \frac{2\pi}{L}n_y,\ \frac{2\pi}{L}n_z\right)$$

となる。ここで，n_x, n_y, n_z は整数である。このことを用いて，エネルギーが 0 から ε の間に含まれる一粒子の状態数 $N(\varepsilon)$ を求めよ。ただし，各 $\boldsymbol{k}$ に対する $\varepsilon(\boldsymbol{k})$ の縮重度は 2 とする。

(2) エネルギー ε と $\varepsilon + d\varepsilon$ の間に含まれる一粒子の状態数を $D(\varepsilon)d\varepsilon$ としたとき，この $D(\varepsilon)$ をエネルギー状態密度という。最低エネルギー準位を除いたエネルギー領域で $D(\varepsilon)$ を求めよ。

(3) フェルミエネルギー ε_{F} を，粒子数密度 n を用いて表せ。ただし，$n = N/V$ とする。

(4) この系の $T = 0$ K（絶対ゼロ度）における内部エネルギー E を，ε_{F} と N を使って表せ。

(5) この系の $T = 0$ K における圧力 P を，ε_{F} と n を使って表せ。

(6) $T = 0$ K での圧力 P の起源は何か述べよ。

(7) $PV = \dfrac{1}{3}E$ であることを示せ。