2024 年度

信州大学大学院 総合理工学研究科
理学専攻

一般選抜 第 II 期 学力試験問題

専門科目 (理科学分野 物理学ユニット)

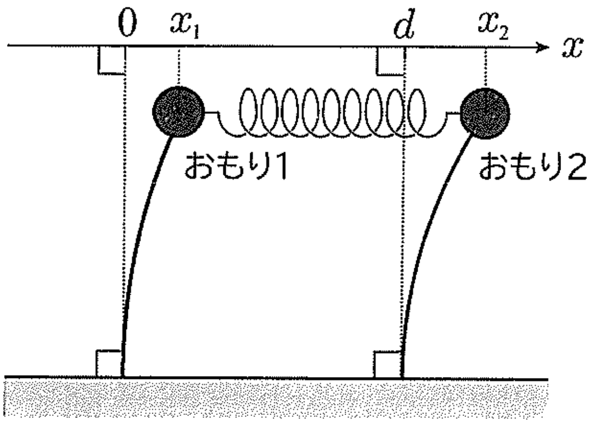
解答時間　13:00 ～ 16:00

解答するときの注意事項

1. 解答用紙は 1 問につき 1 枚を使用し，白紙の場合でも必ず 4 枚提出すること。
2. 各解答用紙には問題番号と受験番号を必ず記入すること。
3. 必要ならば解答用紙の裏面を使用してもよい。

1

図に示すように，同じ長さの2つの板ばねを距離 d だけ離して，それぞれ一端を水平な床に固定し，鉛直になるように設置する。それぞれの板ばねのもう一端に質量 m のおもりをつける。板ばねはねじれずに曲がり，曲がるとおもりにはおもりの変位に比例した復元力が働く。この比例係数はどちらの板ばねも k である。さらに，2つのおもりをばね定数 k' の軽い巻ばねでつなぐ。2つの板ばねが鉛直方向になっているときに，巻ばねは自然長になっている。座標軸を図のように水平にとり，おもりと巻ばねは x 軸方向に小さな変位で振動する。次の問いに答えよ。ただし，重力の影響とおもりの x 軸方向以外の運動は無視してよい。



図

(1) 図に示したおもり1，おもり2の座標をそれぞれ x_1, x_2 としたときのこの系のラグランジアンを求めよ。

(2) (1)で求めたラグランジアンから，おもり1とおもり2の運動方程式を求めよ。

(3) この系が振動する際の規準座標（基準座標）を x_1, x_2, m, d を用いて表せ。また，それぞれの規準座標に対応する規準振動（基準振動）の角振動数を求めよ。

(4) 時刻を t として，$x_1(t), x_2(t)$ の一般解を求めよ。ただし，適切な積分定数を用いて表してよい。また，(3)で求めた規準振動で振動している場合，おもり1とおもり2の振動の位相はどのようになっているかを述べよ。

(5) 初期条件が $t = 0$ で $x_1 = a_0,\ x_2 = d,\ \dfrac{dx_1}{dt} = 0,\ \dfrac{dx_2}{dt} = 0$ であるような場合の $x_1(t), x_2(t)$ の解を求めよ。

(6) (5)で与えられた初期条件における，この系が振動する際のうなりの周期を求めよ。

2

位置 $\boldsymbol{r}' = (x', y', z')$ にある電流要素 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')dx'dy'dz'$ の，位置 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ でのベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ は

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} dx'dy'dz' \quad \cdots (*)$$

と表すことができる。ここで，μ_0 は真空の透磁率である。以下の問いに答えよ。

(1) 強さ I の直線電流が $+z$ の方向に z 軸上の区間 $(z-l,\ z+l)$ に流れているとき，点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ でのベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ を求めよ。また，これを用いて $l \to \infty$ のときの磁束密度 $\boldsymbol{B}(x, y, z)$ を求めよ。

(2) 磁化 $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')$ があるときのベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r})$ は，$(*)$ 式の $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')$ を磁化電流 $\boldsymbol{j}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}') = \nabla' \times \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')$ におきかえて，

$$\boldsymbol{A}^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\nabla' \times \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} dx'dy'dz'$$

と表すことができる。これより磁場 $\boldsymbol{H}^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r})$ のクーロンの法則

$$\boldsymbol{H}^{(\mathrm{m})}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\rho_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} dx'dy'dz', \quad \rho_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}) = -\nabla \cdot \boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$$

を導け。ただし，磁化は有限な空間に分布しているとする。また，任意のスカラー量を f，任意のベクトル量を $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$ とするとき，

$$\nabla \times (f\boldsymbol{F}) = f\,\nabla \times \boldsymbol{F} - \boldsymbol{F} \times \nabla f$$

$$\begin{aligned}(\nabla f \times (\nabla \times \boldsymbol{F}))_x = \; & \frac{\partial}{\partial x}\left(f\frac{\partial F_x}{\partial x} - F_x\frac{\partial f}{\partial x} - f\,\nabla \cdot \boldsymbol{F}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(f\frac{\partial F_y}{\partial x} - F_x\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ & + \frac{\partial}{\partial z}\left(f\frac{\partial F_z}{\partial x} - F_x\frac{\partial f}{\partial z}\right) + \nabla \cdot \boldsymbol{F}\frac{\partial f}{\partial x} + F_x \nabla \cdot \nabla f\end{aligned}$$

である。

$\boxed{3}$

量子力学系に関する以下の問いに答えよ。

物理量

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

に関する固有状態は,

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。

(1) 状態 $|\uparrow(\theta)\rangle = \cos\theta\,|\uparrow\rangle + \sin\theta\,|\downarrow\rangle$ に対して, σ_z を測って 1 という値を得る確率を求めよ。ここで, θ は定数で, $0 < \theta < 2\pi$ とする。

(2) 状態 $|\downarrow(\theta)\rangle = -\sin\theta\,|\uparrow\rangle + \cos\theta\,|\downarrow\rangle$ とする。$|\uparrow(\theta)\rangle$ と $|\downarrow(\theta)\rangle$ を用いて, $|\uparrow\rangle$ と $|\downarrow\rangle$ を表せ。

(3) $\sigma(\theta)$ は, $\sigma(\theta)|\uparrow(\theta)\rangle = |\uparrow(\theta)\rangle$, $\sigma(\theta)|\downarrow(\theta)\rangle = -|\downarrow(\theta)\rangle$ を満たす物理量とする。$\sigma(\theta)\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ を行列で表せ。

次に, 部分系 A の状態 $|\uparrow\rangle_{\mathrm{A}}$, $|\downarrow\rangle_{\mathrm{A}}$ と部分系 B の状態 $|\uparrow\rangle_{\mathrm{B}}$, $|\downarrow\rangle_{\mathrm{B}}$ から構成された複合系に関する状態

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle_{\mathrm{A}}|\downarrow\rangle_{\mathrm{B}} - |\downarrow\rangle_{\mathrm{A}}|\uparrow\rangle_{\mathrm{B}}\right)$$

について考える。アリスとボブがそれぞれ部分系 A における物理量と部分系 B における物理量を異なる場所で測定する。アリスが測定を行うときは σ_z あるいは $\sigma(\theta)$ を測るとし, ボブは σ_z あるいは $\sigma(\varphi)$ を測るとする。ここで, $\sigma(\varphi)$ は, 状態 $|\uparrow(\varphi)\rangle = \cos\varphi|\uparrow\rangle + \sin\varphi|\downarrow\rangle$, $|\downarrow(\varphi)\rangle = -\sin\varphi\,|\uparrow\rangle + \cos\varphi\,|\downarrow\rangle$ に対して, $\sigma(\varphi)|\uparrow(\varphi)\rangle = |\uparrow(\varphi)\rangle$, $\sigma(\varphi)|\downarrow(\varphi)\rangle = -|\downarrow(\varphi)\rangle$ を満たす物理量とし, φ は定数で, $0 < \varphi < 2\pi$, $\varphi \neq \theta$ とする。また, 測定は独立に行われるとする。

(4) アリスは測定を行わず, ボブが σ_z を測って 1 という値を得る確率 $P(\uparrow_{\mathrm{B}})$ を求めよ。

(5) アリスが σ_z を測って -1 という値を得たという条件のもとで, ボブが σ_z を測って 1 という値を得る確率 $P_{\downarrow_{\mathrm{A}}}(\uparrow_{\mathrm{B}})$ を求めよ。

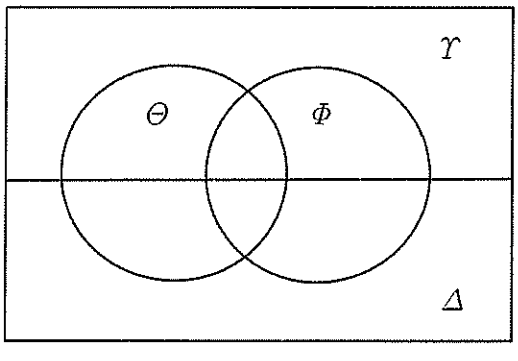
(6) アリスが σ_z を測って 1 という値を得る，かつボブが σ_z を測って 1 という値を得る確率 $P(\uparrow,\uparrow)$ を求めよ。

(7) アリスが $\sigma(\theta)$ を測って 1 という値を得る，かつボブが $\sigma(\varphi)$ を測って 1 という値を得る確率 $P(\theta,\varphi)$ を求めよ。

(8) アリスが $\sigma(\theta)$ を測って 1 という値を得る，かつボブが σ_z を測って 1 という値を得る確率 $P(\theta,\uparrow)$ を求めよ。

(9) アリスが σ_z を測って 1 という値を得る，かつボブが $\sigma(\varphi)$ を測って 1 という値を得る確率 $P(\uparrow,\varphi)$ を求めよ。

(10) 図のような事象 Θ，Φ，Υ，Δ に関するベン図から $\Theta\cap\Phi \subseteqq (\Theta\cap\Delta)\cup(\Upsilon\cap\Phi)$ が成り立つことがわかる。ここで，Θ，Φ，Υ，Δ はそれぞれ左の円で囲まれた領域，右の円で囲まれた領域，上の長方形で囲まれた領域，下の長方形で囲まれた領域を表す。理論が局所性（影響は瞬時には伝わらない）と実在性（観測をするしないにかかわらず，事物は存在する）を有するとき，事象が起こる確率に関して，$P(\Theta\cap\Phi) \leqq P(\Theta\cap\Delta)+P(\Upsilon\cap\Phi)$ が成り立つと予想されるが，量子力学系においては，その対応物である $P(\theta,\varphi) \leqq P(\theta,\uparrow)+P(\uparrow,\varphi)$ が必ずしも成り立つとは限らないことを (7) から (9) の結果を用いて示せ。ここで，アリスが $\sigma(\theta)$ を測って 1 という値を得る事象を Θ，ボブが $\sigma(\varphi)$ を測って 1 という値を得る事象を Φ，アリスが σ_z を測って 1 という値を得る事象を Υ，ボブが σ_z を測って 1 という値を得る事象を Δ と対応付けた。



図

$\boxed{4}$

質量 m の原子 N 個からなる固体において，原子がそれぞれ固体中の決まった位置のまわりで他の原子と独立に微小振動しているとする。この微小振動の角振動数 ω が，全ての原子について，さらに 3 次元の全ての方向について等しく $\omega=\omega_{\mathrm{E}}$ であるとすると，この系は独立な調和振動子 $3N$ 個の集まりとみなせる。j 番目の振動子の変位を q_j，q_j に共役な運動量を p_j として，固体のハミルトニアンは

$$\hat{H}=\sum_{j=1}^{3N}\left(\frac{p_j^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega_{\mathrm{E}}^2q_j^2\right) \tag{1}$$

と書ける。このとき，この固体の比熱について考える。k_{B} をボルツマン定数, h をプランク定数として以下の問いに答えよ。

[I] z を実数, n を 0 以上の整数として，次の微分方程式を考える。

$$\left(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}+\frac{1}{2}z^2\right)\varphi_n(z)=\epsilon_n\varphi_n(z), \qquad \varphi_n(z)=N_nH_n(z)\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \tag{2}$$

ただし N_n は複素数とし，関数 $H_n(z)$ は

$$\left(\frac{d^2}{dz^2}-2z\frac{d}{dz}+2n\right)H_n(z)=0 \tag{3}$$

を満たす。

(a) A, B を定数として $\epsilon_n=An+B$ となる。A, B を求めよ。

(b) 式 (1) の調和振動子を量子力学で扱う。$j=1$ の調和振動子のエネルギー固有値を λ_1 とする。このとき $\Theta_{\mathrm{E}}=\dfrac{\lambda_1}{\epsilon_n}$ を求めよ。

[II] 考えている固体が温度 T の熱浴に接して熱平衡状態にあるとする。

(c) 分配関数 Z から内部エネルギー U を導く式を書け。

(d) 式 (1) の調和振動子を古典力学で扱う。分配関数 Z_{c} を求め，調和振動子 1 個あたりの内部エネルギー $U_{\mathrm{c}}(T)$ と比熱 $C_{\mathrm{c}}(T)$ を導け。

(e) 式 (1) の調和振動子を量子力学で扱う。分配関数 Z_{q} を求め，調和振動子 1 個あたりの内部エネルギー $U_{\mathrm{q}}(T)$ と比熱 $C_{\mathrm{q}}(T)$ を導け。

(f) 低温 $(T\ll\dfrac{\Theta_{\mathrm{E}}}{k_{\mathrm{B}}})$ および高温 $(T\gg\dfrac{\Theta_{\mathrm{E}}}{k_{\mathrm{B}}})$ における $C_{\mathrm{q}}(T)$ の近似形を求め，$\dfrac{C_{\mathrm{c}}(T)}{k_{\mathrm{B}}}$ と $\dfrac{C_{\mathrm{q}}(T)}{k_{\mathrm{B}}}$ を $t=\dfrac{k_{\mathrm{B}}T}{\Theta_{\mathrm{E}}}$ の関数として概形を図示せよ。