$\boxed{1}$

(1) 全力学的エネルギーを E とすると

$$E = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}m_2\dot{r}^2 - m_2 g\,(l - r)$$

(2) この系の Lagrangean $\mathcal{L}$ は

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}m_2\dot{r}^2 + m_2 g\,(l - r)$$

$m_1 = m_2 = m$ のとき

$$\mathcal{L}' = m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + mg\,(l - r)$$

よって r 方向の運動方程式は

$$m\ddot{r} = \frac{m}{2}\left(r\dot{\theta}^2 - g\right)$$

(3) 前問で与えられた Lagrangean $\mathcal{L}$ から

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0 \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = m_1 r^2\dot{\theta}$$

よって θ 方向の運動方程式は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(m_1 r^2\dot{\theta}\right) &= 0 \\ \therefore\quad \frac{dL}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

これにより角運動量 L が保存されることが示された。

(4)$L = m_1 r^2\dot{\theta}$ つまり $\dot{\theta} = \frac{L}{m_1 r^2}$ だから、これを用いて (1) で与えられた全力学的エネルギー E を書き直すと

$$E = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2m_1 r^2} - m_2 g\,(l - r)$$

(5) 前問より m_1 の感じる有効ポテンシャルは

$$V_{eff} = \frac{L^2}{2m_1 r^2} - m_2 g\,(l - r)$$

(6) 例えば、m_1 に働く遠心力と m_2 に働く重力、つまり m_1 に働く張力がつりあうように m_1 に初速度を与えてやれば m_1 の軌道は円になる。

$\boxed{2}$

1. ガウスの法則より電束密度 D は

$$D = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi r^2} & (r \geq b\ ,\ a < r < b) \\ 0 & (r \leq a) \end{cases}$$

よって電場 E は

$$E = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & (r \geq b) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} & (a < r < b) \\ 0 & (r \leq a) \end{cases}$$

電位 ϕ は

$$\phi = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & (r \geq b) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b} + \frac{Q}{4\pi\epsilon}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right) & (a < r < b) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b} + \frac{Q}{4\pi\epsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) & (r \leq a) \end{cases}$$

2. a) 電流 I が点 $x^{'}$ に作る磁束密度の大きさ B は、アンペールの法則より

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x^{'}}$$

つまり点 A での磁束密度は

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

(方向は y 軸の正の方向)

b) 対称性より図の微小面積を貫く磁束密度は一様だから、この斜線部を貫く磁束 $d\Phi$ は

$$d\Phi = \mathbf{B} \bullet \mathbf{dS} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi x^{'}} dx^{'}$$

よって磁束 Φ は

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \int_{x_0+vt}^{x_0+vt+b} \frac{dx^{'}}{x^{'}} \\ &= \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \log \frac{x_0 + vt + b}{x_0 + vt} \end{aligned}$$

また、起電力 V は

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \frac{vb}{(x_0 + vt)(x_0 + vt + b)}$$

$\boxed{3}$

1.

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$$

$$[\hat{a}, \hat{a}] = [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = 0$$

2.

$$\{\hat{b}, \hat{b}^\dagger\} = 1$$

$$\{\hat{b}, \hat{b}\} = \{\hat{b}^\dagger, \hat{b}^\dagger\} = 0$$

3.

$$\begin{cases} \hat{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \\ \hat{p} = -i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \end{cases}$$

これらから、

$$\begin{aligned} \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}^2 &= \frac{\hbar\omega}{2}(\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}) \\ &= \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

また、

$$\begin{cases} \hat{\xi} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{b} + \hat{b}^\dagger) \\ \hat{\eta} = -i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(\hat{b} - \hat{b}^\dagger) \end{cases}$$

これらから、

$$\begin{aligned} i\omega\hat{\xi}\hat{\eta} &= \frac{\hbar\omega}{2}(\hat{b}^\dagger\hat{b} - \hat{b}\hat{b}^\dagger) \\ &= \hbar\omega(\hat{b}^\dagger\hat{b} - \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

よってハミルトニアンは

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}^2 + i\omega\hat{\xi}\hat{\eta} \\ &= \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{b}^\dagger\hat{b}) \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} [\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] &= \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{A}\hat{B} \\ &= (\hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{A}\hat{C}\hat{B}) + (\hat{A}\hat{C}\hat{B} - \hat{C}\hat{A}\hat{B}) \\ &= \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B} \\ &= (\hat{A}\hat{B}\hat{C} + \hat{A}\hat{C}\hat{B}) - (\hat{A}\hat{C}\hat{B} + \hat{C}\hat{A}\hat{B}) \\ &= \hat{A}\{\hat{B}, \hat{C}\} - \{\hat{A}, \hat{C}\}\hat{B} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\{\hat{A}\hat{B}, \hat{C}\} &= \hat{A}\hat{B}\hat{C} + \hat{C}\hat{A}\hat{B} \\
&= (\hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{A}\hat{C}\hat{B}) + (\hat{A}\hat{C}\hat{B} + \hat{C}\hat{A}\hat{B}) \\
&= \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + \{\hat{A}, \hat{C}\}\hat{B} \\
&= (\hat{A}\hat{B}\hat{C} + \hat{A}\hat{C}\hat{B}) - (\hat{A}\hat{C}\hat{B} - \hat{C}\hat{A}\hat{B}) \\
&= \hat{A}\{\hat{B}, \hat{C}\} - [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}
\end{aligned}
$$

問題にはないが、これらの交換子、反交換子内の左右を入れ替えることですぐに

$$
\begin{aligned}
[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] &= [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B} \\
&= \{\hat{A}, \hat{B}\}\hat{C} - \{\hat{A}, \hat{C}\}\hat{B}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\{\hat{A}, \hat{B}\hat{C}\} &= [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \{\hat{A}, \hat{C}\}\hat{B} \\
&= \{\hat{A}, \hat{B}\}\hat{C} - [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}
\end{aligned}
$$

という関係もすぐに導き出せる。ただし交換子については左右を入れ替えることでマイナスがつくことに注意。これらは次の問題で使えるから導き出しておくと便利である。

5.(a)

$$
\begin{aligned}
[\hat{Q}, \hat{a}] &= [\sqrt{\hbar\omega}\hat{a}^\dagger\hat{b}, \hat{a}] \\
&= \sqrt{\hbar\omega}[\hat{a}^\dagger\hat{b}, \hat{a}] \\
&= \sqrt{\hbar\omega}(\hat{a}^\dagger[\hat{b}, \hat{a}] + [\hat{a}^\dagger, \hat{a}]\hat{b}) \\
&= -\sqrt{\hbar\omega}\hat{b}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\{\hat{Q}, \hat{b}^\dagger\}^{1} &= \{\sqrt{\hbar\omega}\hat{a}^\dagger\hat{b}, \hat{b}^\dagger\} \\
&= \sqrt{\hbar\omega}\{\hat{a}^\dagger\hat{b}, \hat{b}^\dagger\} \\
&= \sqrt{\hbar\omega}(\hat{a}^\dagger\{\hat{b}, \hat{b}^\dagger\} - [\hat{a}^\dagger, \hat{b}^\dagger]\hat{b}) \\
&= \sqrt{\hbar\omega}\hat{a}^\dagger
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\{\hat{Q}, \hat{Q}^\dagger\} &= \{\sqrt{\hbar\omega}\hat{a}^\dagger\hat{b}, \sqrt{\hbar\omega}\hat{b}^\dagger\hat{a}\} \\
&= \hbar\omega\{\hat{a}^\dagger\hat{b}, \hat{b}^\dagger\hat{a}\} \\
&= \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\{\hat{b}, \hat{b}^\dagger\hat{a}\} - [\hat{a}^\dagger, \hat{b}^\dagger\hat{a}]\hat{b}) \\
&= \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\{\hat{b}, \hat{b}^\dagger\}\hat{a} - \hat{b}^\dagger[\hat{a}^\dagger, \hat{a}]\hat{b}) \\
&= \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{b}^\dagger\hat{b}) \\
&= \hat{H}
\end{aligned}
$$

[1] この web 上の問題では $\{\hat{Q}, \hat{b}\}$ となっているが、正しくは $\{\hat{Q}, \hat{b}^\dagger\}$ である。

$$
\begin{aligned}
\{\hat{Q},\hat{Q}\} &= \{\sqrt{\hbar\omega}\hat{a}^\dagger\hat{b},\sqrt{\hbar\omega}\hat{a}^\dagger\hat{b}\} \\
&= \hbar\omega\{\hat{a}^\dagger\hat{b},\hat{a}^\dagger\hat{b}\} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\{\hat{Q}^\dagger,\hat{Q}^\dagger\} &= \{\sqrt{\hbar\omega}\hat{b}^\dagger\hat{a},\sqrt{\hbar\omega}\hat{b}^\dagger\hat{a}\} \\
&= \hbar\omega\{\hat{b}^\dagger\hat{a},\hat{b}^\dagger\hat{a}\} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
[\hat{Q},\hat{H}] &= [\sqrt{\hbar\omega}\hat{a}^\dagger\hat{b},\hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\hat{b}^\dagger\hat{b})] \\
&= (\hbar\omega)^{\frac{3}{2}}([\hat{a}^\dagger\hat{b},\hat{a}^\dagger\hat{a}]+[\hat{a}^\dagger\hat{b},\hat{b}^\dagger\hat{b}]) \\
&= (\hbar\omega)^{\frac{3}{2}}([\hat{a}^\dagger,\hat{a}^\dagger\hat{a}]\hat{b}+\hat{a}^\dagger\{\hat{b},\hat{b}^\dagger\hat{b}\}) \\
&= (\hbar\omega)^{\frac{3}{2}}(\hat{a}^\dagger[\hat{a}^\dagger,\hat{a}]\hat{b}+\hat{a}^\dagger\{\hat{b},\hat{b}^\dagger\}\hat{b}) \\
&= (\hbar\omega)^{\frac{3}{2}}(-\hat{a}^\dagger\hat{b}+\hat{a}^\dagger\hat{b}) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\hat{Q}^\dagger,\hat{H}] &= [\sqrt{\hbar\omega}\hat{b}^\dagger\hat{a},\hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a},\hat{b}^\dagger\hat{b})] \\
&= (\hbar\omega)^{\frac{3}{2}}([\hat{b}^\dagger\hat{a},\hat{a}^\dagger\hat{a}]+[\hat{b}^\dagger\hat{a},\hat{b}^\dagger\hat{b}]) \\
&= (\hbar\omega)^{\frac{3}{2}}(\hat{b}^\dagger[\hat{a},\hat{a}^\dagger\hat{a}]-\{\hat{b}^\dagger,\hat{b}^\dagger\hat{b}\}\hat{a}) \\
&= (\hbar\omega)^{\frac{3}{2}}(\hat{b}^\dagger[\hat{a},\hat{a}^\dagger]\hat{a}+\hat{b}^\dagger\{\hat{b}^\dagger,\hat{b}\}\hat{a}) \\
&= (\hbar\omega)^{\frac{3}{2}}(-\hat{b}^\dagger\hat{a}+\hat{b}^\dagger\hat{a}) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

6. 前問 (c) $[\hat{Q}^\dagger,\hat{H}]=0$ より

$$
\begin{aligned}
\hat{H}\hat{Q}|\psi> &= \hat{Q}\hat{H}|\psi> \\
&= \hat{Q}E|\psi> \text{ (ただし } E\neq 0) \\
&= E\hat{Q}|\psi>
\end{aligned}
$$

よってエネルギーの固有状態は基底状態 $E=0$ を除いて縮退している。

$\boxed{4}$ この解答は不完全です。1. この系の熱力学的重率 W は、

$$W = \frac{2N!}{N_+!N_-!}$$

ゆえにエントロピー S は、

$$\begin{aligned} S &= k_B \log W \\ &= k_B \log \frac{2N!}{N_+!N_-!} \\ &\simeq k_B \left(N \log N - N - N_+ \log N_+ + N_+ - N_- \log N_- + N_- \right) \\ &= -k_B \left(N_+ \log \frac{N_+}{N} + N_- \log \frac{N_-}{N} \right) \end{aligned}$$

エネルギー E は、

$$E = -J \left(N_+ - N_- \right)$$

1 つのスピンの分配関数 z_1 は、

$$\begin{aligned} z_1 &= e^{\beta J} + e^{-\beta J} \\ &= 2\cosh(\beta J) \qquad \left(\text{以後、}\beta = \frac{1}{k_B T}\text{とする。} \right) \end{aligned}$$

各々のスピンが独立であるとすると、この系の分配関数 z_N は

$$z_N = z_1^N = \{2\cosh(\beta J)\}^N$$

よって熱平衡のときの系のエネルギー $E(T)$ は、

$$\begin{aligned} E(T) &= N \frac{-Je^{\beta J} + Je^{-\beta J}}{e^{\beta J} + e^{-\beta J}} \\ &= -NJ \frac{e^{\beta J} - e^{-\beta J}}{e^{\beta J} + e^{-\beta J}} \\ &= -NJ \tanh(\beta J) \end{aligned}$$

熱力学の温度の定義より、系が平衡状態にある条件は

$$\frac{\partial S}{\partial E} \leq \frac{1}{T}$$

一方、前問よりエントロピー S は

$$S = k_B \left(N \log N - N_+ \log N_+ - N_- \log N_- \right)$$

今、$M \equiv N_+ - N_-$ とおくと $N_+ = \frac{N+M}{2}$, $N_- = \frac{N-M}{2}$ だから

$$S = k_B \left(N \log N - \frac{N+M}{2} \log \frac{N+M}{2} - \frac{N-M}{2} \log \frac{N-M}{2} \right)$$

これより、

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial E} &= \frac{\partial S}{\partial M}\frac{\partial M}{\partial E}\\ &= \frac{k_B}{2J}\log\left(\frac{N+M}{N-M}\right)\\ &= \frac{k_B}{2J}\log\frac{N_+}{N_-}\end{aligned}$$

よって平衡条件は

$$\begin{aligned}\frac{k_B}{2J}\log\frac{N_+}{N_-} &\leq \frac{1}{T}\\ T &\leq \frac{2J}{k_B\log\frac{N_+}{N_-}}\end{aligned}$$

3. カノニカル分布として (N_+, N_-) が実現される確率 $P(N_+, N_-)$ は、

$$\begin{aligned}P(N_+, N_-) &= \frac{N!}{N_+!N_-!}\frac{e^{\beta J(N_+-N_-)}}{z_1^N}\\ &= \frac{N!}{N_+!N_-!}\left(\frac{e^{\beta J}}{z_1}\right)^{N_+}\left(\frac{e^{-\beta J}}{z_1}\right)^{N_-}\\ &\equiv \frac{N!}{N_+!N_-!}P_+^{N_+}P_-^{N_-}\\ &= \frac{N!}{N_+!\,(N-N_+)!}P_+^{N_+}(1-P_+)^{N-N_+}\end{aligned}$$

これは二項分布であるから、

$$\begin{aligned}N_+ &= NP_+\\ &= N\frac{e^{\beta J}}{z_1}\\ &= \frac{Ne^{\beta J}}{2\cosh(\beta J)} \equiv N_+^0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N_- &= NP_-\\ &= N\frac{e^{-\beta J}}{z_1}\\ &= \frac{Ne^{-\beta J}}{2\cosh(\beta J)} \equiv N_-^0\end{aligned}$$

4. 平衡時のエントロピーを S_0 とすると、

$$S_0 + \delta S = k_B\Big\{N\log N - \left(N_+^0 + n_+\right)\log\left(N_+^0 + n_+\right)$$

$$
\begin{aligned}
& -\left(N_-^0 + n_-\right)\log\left(N_-^0 + n_-\right)\Big\} \\
= \;& k_B\Bigg[N\log N - \left(N_+^0 + n_+\right)\left\{\log N_+^0 + \log\left(1 + \frac{n_+}{N_+^0}\right)\right\} \\
& -\left(N_-^0 + n_-\right)\left\{\{\log N_-^0 + \log\left(1 + \frac{n_-}{N_-^0}\right)\right\}\Bigg]
\end{aligned}
$$

ここで $\log\left(1+\frac{n_+}{N_+^0}\right)$ を $\frac{n_+}{N_+^0}$ で展開すると、

$$
\log\left(1+\frac{n_+}{N_+^0}\right) = \frac{n_+}{N_+^0} - \frac{1}{2}\left(\frac{n_+}{N_+^0}\right)^2 + O\left(\left(\frac{n_+}{N_+^0}\right)^3\right)
$$

同様に $\log\left(1+\frac{n_-}{N_-^0}\right)$ についても、

$$
\log\left(1+\frac{n_-}{N_-^0}\right) = \frac{n_-}{N_-^0} - \frac{1}{2}\left(\frac{n_-}{N_-^0}\right)^2 + O\left(\left(\frac{n_-}{N_-^0}\right)^3\right)
$$

よって

$$
\begin{aligned}
S_0 + \delta S \;=\; & k_B\Bigg[[N\log N - \left(N_+^0 + n_+\right)\left\{\log N_+^0 + \frac{n_+}{N_+^0} - \frac{1}{2}\left(\frac{n_+}{N_+^0}\right)^2 + O\left(\left(\frac{n_+}{N_+^0}\right)^3\right)\right\} \\
& -\left(N_-^0 + n_-\right)\left\{\log N_-^0 + \frac{n_-}{N_-^0} - \frac{1}{2}\left(\frac{n_-}{N_-^0}\right)^2 + O\left(\left(\frac{n_-}{N_-^0}\right)^3\right)\right\}\Bigg]
\end{aligned}
$$

ここで、n_+, n_- の 2 次の項まで取ると

$$
\begin{aligned}
S_0 + \delta S \;\simeq\; & k_B\Bigg[N\log N - \left\{N_+^0\log N_+^0 + \left(\log N_+^0 + 1\right)n_+ + \left(\frac{1}{N_+^0} - \frac{1}{2N_+^0}\right)n_+^2\right\} \\
& -\left\{N_-^0\log N_-^0 + \left(\log N_-^0 + 1\right)n_- + \left(\frac{1}{N_-^0} - \frac{1}{2N_-^0}\right)n_-^2\right\}\Bigg] \\
=\; & k_B\Big\{\{N\log N - N_+^0\log N_+^0 - N_-^0\log N_-^0 \\
& -\left(\log N_+^0 + 1\right)n_+ - \left(\log N_-^0 + 1\right)n_- - \frac{n_+^2}{2N_+^0} - \frac{n_-^2}{2N_-^0}\Big\}
\end{aligned}
$$

よって

$$
\frac{\delta S}{k_B} = -\left\{\left(\log N_+^0 + 1\right)n_+ + \left(\log N_-^0 + 1\right)n_- + \frac{1}{2}\left(\frac{n_+^2}{N_+^0} + \frac{n_-^2}{N_-^0}\right)\right\}
$$

$\boxed{5}$ (1) 空洞内に閉じ込められた振動数の間隔が $(\nu, \nu + d\nu)$ であるような電磁放射のモード数。

(2) 温度 T で熱平衡状態にある振動子の平均エネルギー。

(3)$x = \frac{h\nu}{kT}$ とおくと

$$\frac{\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = \frac{x^3}{e^x - 1} \xrightarrow{x \to 0} \frac{x^3}{(1 + x + O(x^2)) - 1} \simeq x^2 = \left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2$$

よって

$$u(\nu, T)\, d\nu \xrightarrow{\frac{h\nu}{kT} \to 0} \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT d\nu$$

(4)

$$\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \xrightarrow{\frac{h\nu}{kT} \to 大} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}}$$

よって

$$u(\nu, T)\, d\nu \xrightarrow{\frac{h\nu}{kT} \to 大} \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}} d\nu$$

(5)

$$\begin{aligned} u(\lambda, T)\, d\lambda &= u(\nu, T) \left|\frac{d\nu}{d\lambda}\right| d\lambda \\ &= 8\pi hc\lambda^{-5} e^{-\frac{hc}{kT\lambda}} d\lambda \qquad \left(\nu = \frac{c}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

ここで $\frac{du}{d\lambda} = 0$ をとると

$$\lambda_{max} = \frac{hc}{5kT} \equiv \frac{b}{T} \qquad \left(b = \frac{hc}{5k}\right)$$

(6)

$$\begin{aligned} U &= \int_0^\infty u(\nu, T)\, d\nu \\ &= \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty d\nu \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kt}} - 1} \\ &= \frac{8\pi h}{c^3} \left(\frac{kT}{h}\right)^4 \int_0^\infty \frac{\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\left(\frac{h\nu}{kT}\right) \\ &= \frac{8\pi k^4}{h^3 c^3} T^4 \int_0^\infty \frac{\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\left(\frac{h\nu}{kT}\right) \\ &\equiv aT^4 \qquad \left(a = \frac{8\pi k^4}{h^3 c^3} \int_0^\infty \frac{\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\left(\frac{h\nu}{kT}\right)\right) \end{aligned}$$