

1

(1) 全力学的エネルギーを E とすると

$$E = \frac{1}{2}m_1(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}m_2\dot{r}^2 - m_2g(l - r)$$

(2) この系の Lagrangean \mathcal{L} は

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}m_2\dot{r}^2 + m_2g(l - r)$$

$m_1 = m_2 = m$ のとき

$$\mathcal{L}' = m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + mg(l - r)$$

よって r 方向の運動方程式は

$$m\ddot{r} = \frac{m}{2}(r\dot{\theta}^2 - g)$$

(3) 前問で与えられた Lagrangean \mathcal{L} から

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m_1 r^2 \dot{\theta}$$

よって θ 方向の運動方程式は

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m_1 r^2 \dot{\theta}) &= 0 \\ \therefore \frac{dL}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

これにより角運動量 L が保存されることが示された。

(4) $L = m_1 r^2 \dot{\theta}$ つまり $\dot{\theta} = \frac{L}{m_1 r^2}$ だから、これを用いて (1) で与えられた全力学的エネルギー E を書き直すと

$$E = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2m_1 r^2} - m_2g(l - r)$$

(5) 前問より m_1 の感じる有効ポテンシャルは

$$V_{eff} = \frac{L^2}{2m_1 r^2} - m_2g(l - r)$$

(6) 例えば、 m_1 に働く遠心力と m_2 に働く重力、つまり m_1 に働く張力が釣りあうように m_1 に初速度を与えてやれば m_1 の軌道は円になる。

2

1. ガウスの法則より電束密度 D は

$$D = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi r^2} & (r \geq b, a < r < b) \\ 0 & (r \leq a) \end{cases}$$

よって電場 E は

$$E = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} & (r \geq b) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2} & (a < r < b) \\ 0 & (r \leq a) \end{cases}$$

電位 ϕ は

$$\phi = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & (r \geq b) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b} + \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) & (a < r < b) \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b} + \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) & (r \leq a) \end{cases}$$

2. a) 電流 I が点 x' に作る磁束密度の大きさ B は、アンペールの法則より

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x'}$$

つまり点 A での磁束密度は

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

(方向は y 軸の正の方向)

b) 対称性より図の微小面積を貫く磁束密度は一樣だから、この斜線部を貫く磁束 $d\Phi$ は

$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi x'} dx'$$

よって磁束 Φ は

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \int_{x_0+vt}^{x_0+vt+b} \frac{dx'}{x'} \\ &= \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \log \frac{x_0 + vt + b}{x_0 + vt} \end{aligned}$$

また、起電力 V は

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \frac{vb}{(x_0 + vt)(x_0 + vt + b)}$$

3

1.

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$$

$$[\hat{a}, \hat{a}] = [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = 0$$

2.

$$\{\hat{b}, \hat{b}^\dagger\} = 1$$

$$\{\hat{b}, \hat{b}\} = \{\hat{b}^\dagger, \hat{b}^\dagger\} = 0$$

3.

$$\begin{cases} \hat{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \\ \hat{p} = -i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \end{cases}$$

これから、

$$\begin{aligned} \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}^2 &= \frac{\hbar\omega}{2}(\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}) \\ &= \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

また、

$$\begin{cases} \hat{\xi} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{b} + \hat{b}^\dagger) \\ \hat{\eta} = -i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(\hat{b} - \hat{b}^\dagger) \end{cases}$$

これから、

$$\begin{aligned} i\omega\hat{\xi}\hat{\eta} &= \frac{\hbar\omega}{2}(\hat{b}^\dagger\hat{b} - \hat{b}\hat{b}^\dagger) \\ &= \hbar\omega(\hat{b}^\dagger\hat{b} - \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

よってハミルトニアンは

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{q}^2 + i\omega\hat{\xi}\hat{\eta} \\ &= \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{b}^\dagger\hat{b}) \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} [\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] &= \hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{A}\hat{B} \\ &= (\hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{A}\hat{C}\hat{B}) + (\hat{A}\hat{C}\hat{B} - \hat{C}\hat{A}\hat{B}) \\ &= \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B} \\ &= (\hat{A}\hat{B}\hat{C} + \hat{A}\hat{C}\hat{B}) - (\hat{A}\hat{C}\hat{B} + \hat{C}\hat{A}\hat{B}) \\ &= \hat{A}\{\hat{B}, \hat{C}\} - \{\hat{A}, \hat{C}\}\hat{B} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{\hat{A}\hat{B}, \hat{C}\} &= \hat{A}\hat{B}\hat{C} + \hat{C}\hat{A}\hat{B} \\
&= (\hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{A}\hat{C}\hat{B}) + (\hat{A}\hat{C}\hat{B} + \hat{C}\hat{A}\hat{B}) \\
&= \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + \{\hat{A}, \hat{C}\}\hat{B} \\
&= (\hat{A}\hat{B}\hat{C} + \hat{A}\hat{C}\hat{B}) - (\hat{A}\hat{C}\hat{B} - \hat{C}\hat{A}\hat{B}) \\
&= \hat{A}\{\hat{B}, \hat{C}\} - [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}
\end{aligned}$$

問題にはないが、これらの交換子、反交換子内の左右を入れ替えることですぐに

$$\begin{aligned}
[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] &= [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B} \\
&= \{\hat{A}, \hat{B}\}\hat{C} - \{\hat{A}, \hat{C}\}\hat{B}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{\hat{A}, \hat{B}\hat{C}\} &= [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \{\hat{A}, \hat{C}\}\hat{B} \\
&= \{\hat{A}, \hat{B}\}\hat{C} - [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}
\end{aligned}$$

という関係もすぐに導き出せる。ただし交換子については左右を入れ替えることでマイナスがつくことに注意。これらは次の問題で使えるから導き出しておくとも便利である。

5.(a)

$$\begin{aligned}
[\hat{Q}, \hat{a}] &= [\sqrt{\hbar\omega}\hat{a}^\dagger\hat{b}, \hat{a}] \\
&= \sqrt{\hbar\omega}[\hat{a}^\dagger\hat{b}, \hat{a}] \\
&= \sqrt{\hbar\omega}(\hat{a}^\dagger[\hat{b}, \hat{a}] + [\hat{a}^\dagger, \hat{a}]\hat{b}) \\
&= -\sqrt{\hbar\omega}\hat{b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{\hat{Q}, \hat{b}^\dagger\}^1 &= \{\sqrt{\hbar\omega}\hat{a}^\dagger\hat{b}, \hat{b}^\dagger\} \\
&= \sqrt{\hbar\omega}\{\hat{a}^\dagger\hat{b}, \hat{b}^\dagger\} \\
&= \sqrt{\hbar\omega}(\hat{a}^\dagger\{\hat{b}, \hat{b}^\dagger\} - [\hat{a}^\dagger, \hat{b}^\dagger]\hat{b}) \\
&= \sqrt{\hbar\omega}\hat{a}^\dagger
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\{\hat{Q}, \hat{Q}^\dagger\} &= \{\sqrt{\hbar\omega}\hat{a}^\dagger\hat{b}, \sqrt{\hbar\omega}\hat{b}^\dagger\hat{a}\} \\
&= \hbar\omega\{\hat{a}^\dagger\hat{b}, \hat{b}^\dagger\hat{a}\} \\
&= \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\{\hat{b}, \hat{b}^\dagger\hat{a}\} - [\hat{a}^\dagger, \hat{b}^\dagger\hat{a}]\hat{b}) \\
&= \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\{\hat{b}, \hat{b}^\dagger\}\hat{a} - \hat{b}^\dagger[\hat{a}^\dagger, \hat{a}]\hat{b}) \\
&= \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{b}^\dagger\hat{b}) \\
&= \hat{H}
\end{aligned}$$

¹ この web 上の問題では $\{\hat{Q}, \hat{b}\}$ となっているが、正しくは $\{\hat{Q}, \hat{b}^\dagger\}$ である。

$$\begin{aligned}
\{\hat{Q}, \hat{Q}\} &= \{\sqrt{\hbar\omega}\hat{a}^\dagger\hat{b}, \sqrt{\hbar\omega}\hat{a}^\dagger\hat{b}\} \\
&= \hbar\omega\{\hat{a}^\dagger\hat{b}, \hat{a}^\dagger\hat{b}\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{\hat{Q}^\dagger, \hat{Q}^\dagger\} &= \{\sqrt{\hbar\omega}\hat{b}^\dagger\hat{a}, \sqrt{\hbar\omega}\hat{b}^\dagger\hat{a}\} \\
&= \hbar\omega\{\hat{b}^\dagger\hat{a}, \hat{b}^\dagger\hat{a}\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
[\hat{Q}, \hat{H}] &= [\sqrt{\hbar\omega}\hat{a}^\dagger\hat{b}, \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{b}^\dagger\hat{b})] \\
&= (\hbar\omega)^{\frac{3}{2}}([\hat{a}^\dagger\hat{b}, \hat{a}^\dagger\hat{a}] + [\hat{a}^\dagger\hat{b}, \hat{b}^\dagger\hat{b}]) \\
&= (\hbar\omega)^{\frac{3}{2}}([\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger\hat{a}]\hat{b} + \hat{a}^\dagger\{\hat{b}, \hat{b}^\dagger\hat{b}\}) \\
&= (\hbar\omega)^{\frac{3}{2}}(\hat{a}^\dagger[\hat{a}^\dagger, \hat{a}]\hat{b} + \hat{a}^\dagger\{\hat{b}, \hat{b}^\dagger\}\hat{b}) \\
&= (\hbar\omega)^{\frac{3}{2}}(-\hat{a}^\dagger\hat{b} + \hat{a}^\dagger\hat{b}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\hat{Q}^\dagger, \hat{H}] &= [\sqrt{\hbar\omega}\hat{b}^\dagger\hat{a}, \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{b}^\dagger\hat{b})] \\
&= (\hbar\omega)^{\frac{3}{2}}([\hat{b}^\dagger\hat{a}, \hat{a}^\dagger\hat{a}] + [\hat{b}^\dagger\hat{a}, \hat{b}^\dagger\hat{b}]) \\
&= (\hbar\omega)^{\frac{3}{2}}(\hat{b}^\dagger[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\hat{a}] - \{\hat{b}^\dagger, \hat{b}^\dagger\hat{b}\}\hat{a}) \\
&= (\hbar\omega)^{\frac{3}{2}}(\hat{b}^\dagger[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]\hat{a} + \hat{b}^\dagger\{\hat{b}^\dagger, \hat{b}\}\hat{a}) \\
&= (\hbar\omega)^{\frac{3}{2}}(-\hat{b}^\dagger\hat{a} + \hat{b}^\dagger\hat{a}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

6. 前問 (c) $[\hat{Q}^\dagger, \hat{H}] = 0$ より

$$\begin{aligned}
\hat{H}\hat{Q}|\psi\rangle &= \hat{Q}\hat{H}|\psi\rangle \\
&= \hat{Q}E|\psi\rangle \text{ (ただし } E \neq 0 \text{)} \\
&= E\hat{Q}|\psi\rangle
\end{aligned}$$

よってエネルギーの固有状態は基底状態 $E = 0$ を除いて縮退している。

□4 この解答は不完全です。1. この系の熱力学的重率 W は、

$$W = \frac{2N!}{N_+!N_-!}$$

ゆえにエントロピー S は、

$$\begin{aligned} S &= k_B \log W \\ &= k_B \log \frac{2N!}{N_+!N_-!} \\ &\simeq k_B (N \log N - N - N_+ \log N_+ + N_+ - N_- \log N_- + N_-) \\ &= -k_B \left(N_+ \log \frac{N_+}{N} + N_- \log \frac{N_-}{N} \right) \end{aligned}$$

エネルギー E は、

$$E = -J(N_+ - N_-)$$

1 つのスピンの分配関数 z_1 は、

$$\begin{aligned} z_1 &= e^{\beta J} + e^{-\beta J} \\ &= 2 \cosh(\beta J) \quad \left(\text{以後、} \beta = \frac{1}{k_B T} \text{ とする。} \right) \end{aligned}$$

各々のスピンの独立であるとする、この系の分配関数 z_N は

$$z_N = z_1^N = \{2 \cosh(\beta J)\}^N$$

よって熱平衡のときの系のエネルギー $E(T)$ は、

$$\begin{aligned} E(T) &= N \frac{-J e^{\beta J} + J e^{-\beta J}}{e^{\beta J} + e^{-\beta J}} \\ &= -N J \frac{e^{\beta J} - e^{-\beta J}}{e^{\beta J} + e^{-\beta J}} \\ &= -N J \tanh(\beta J) \end{aligned}$$

熱力学の温度の定義より、系が平衡状態にある条件は

$$\frac{\partial S}{\partial E} \leq \frac{1}{T}$$

一方、前問よりエントロピー S は

$$S = k_B (N \log N - N_+ \log N_+ - N_- \log N_-)$$

今、 $M \equiv N_+ - N_-$ とおくと $N_+ = \frac{N+M}{2}$, $N_- = \frac{N-M}{2}$ だから

$$S = k_B \left(N \log N - \frac{N+M}{2} \log \frac{N+M}{2} - \frac{N-M}{2} \log \frac{N-M}{2} \right)$$

これより、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial E} &= \frac{\partial S}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial E} \\
&= \frac{k_B}{2J} \log \left(\frac{N+M}{N-M} \right) \\
&= \frac{k_B}{2J} \log \frac{N_+}{N_-}
\end{aligned}$$

よって平衡条件は

$$\begin{aligned}
\frac{k_B}{2J} \log \frac{N_+}{N_-} &\leq \frac{1}{T} \\
T &\leq \frac{2J}{k_B \log \frac{N_+}{N_-}}
\end{aligned}$$

3. カノニカル分布として (N_+, N_-) が実現される確率 $P(N_+, N_-)$ は、

$$\begin{aligned}
P(N_+, N_-) &= \frac{N!}{N_+! N_-!} \frac{e^{\beta J(N_+ - N_-)}}{z_1^N} \\
&= \frac{N!}{N_+! N_-!} \left(\frac{e^{\beta J}}{z_1} \right)^{N_+} \left(\frac{e^{-\beta J}}{z_1} \right)^{N_-} \\
&\equiv \frac{N!}{N_+! N_-!} P_+^{N_+} P_-^{N_-} \\
&= \frac{N!}{N_+! (N - N_+)!} P_+^{N_+} (1 - P_+)^{N - N_+}
\end{aligned}$$

これは二項分布であるから、

$$\begin{aligned}
N_+ &= N P_+ \\
&= N \frac{e^{\beta J}}{z_1} \\
&= \frac{N e^{\beta J}}{2 \cosh(\beta J)} \equiv N_+^0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_- &= N P_- \\
&= N \frac{e^{-\beta J}}{z_1} \\
&= \frac{N e^{-\beta J}}{2 \cosh(\beta J)} \equiv N_-^0
\end{aligned}$$

4. 平衡時のエントロピーを S_0 とすると、

$$S_0 + \delta S = k_B \left\{ N \log N - (N_+^0 + n_+) \log (N_+^0 + n_+) \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \left(N_-^0 + n_- \right) \log \left(N_-^0 + n_- \right) \Big\} \\
= & k_B \left[N \log N - \left(N_+^0 + n_+ \right) \left\{ \log N_+^0 + \log \left(1 + \frac{n_+}{N_+^0} \right) \right\} \right. \\
& \left. - \left(N_-^0 + n_- \right) \left\{ \log N_-^0 + \log \left(1 + \frac{n_-}{N_-^0} \right) \right\} \right]
\end{aligned}$$

ここで $\log \left(1 + \frac{n_+}{N_+^0} \right)$ を $\frac{n_+}{N_+^0}$ で展開すると、

$$\log \left(1 + \frac{n_+}{N_+^0} \right) = \frac{n_+}{N_+^0} - \frac{1}{2} \left(\frac{n_+}{N_+^0} \right)^2 + O \left(\left(\frac{n_+}{N_+^0} \right)^3 \right)$$

同様に $\log \left(1 + \frac{n_-}{N_-^0} \right)$ についても、

$$\log \left(1 + \frac{n_-}{N_-^0} \right) = \frac{n_-}{N_-^0} - \frac{1}{2} \left(\frac{n_-}{N_-^0} \right)^2 + O \left(\left(\frac{n_-}{N_-^0} \right)^3 \right)$$

よって

$$\begin{aligned}
S_0 + \delta S &= k_B \left[N \log N - \left(N_+^0 + n_+ \right) \left\{ \log N_+^0 + \frac{n_+}{N_+^0} - \frac{1}{2} \left(\frac{n_+}{N_+^0} \right)^2 + O \left(\left(\frac{n_+}{N_+^0} \right)^3 \right) \right\} \right. \\
&\quad \left. - \left(N_-^0 + n_- \right) \left\{ \log N_-^0 + \frac{n_-}{N_-^0} - \frac{1}{2} \left(\frac{n_-}{N_-^0} \right)^2 + O \left(\left(\frac{n_-}{N_-^0} \right)^3 \right) \right\} \right]
\end{aligned}$$

ここで、 n_+ , n_- の 2 次の項まで取ると

$$\begin{aligned}
S_0 + \delta S &\simeq k_B \left[N \log N - \left\{ N_+^0 \log N_+^0 + \left(\log N_+^0 + 1 \right) n_+ + \left(\frac{1}{N_+^0} - \frac{1}{2N_+^0} \right) n_+^2 \right\} \right. \\
&\quad \left. - \left\{ N_-^0 \log N_-^0 + \left(\log N_-^0 + 1 \right) n_- + \left(\frac{1}{N_-^0} - \frac{1}{2N_-^0} \right) n_-^2 \right\} \right] \\
&= k_B \left\{ N \log N - N_+^0 \log N_+^0 - N_-^0 \log N_-^0 \right. \\
&\quad \left. - \left(\log N_+^0 + 1 \right) n_+ - \left(\log N_-^0 + 1 \right) n_- - \frac{n_+^2}{2N_+^0} - \frac{n_-^2}{2N_-^0} \right\}
\end{aligned}$$

よって

$$\frac{\delta S}{k_B} = - \left\{ \left(\log N_+^0 + 1 \right) n_+ + \left(\log N_-^0 + 1 \right) n_- + \frac{1}{2} \left(\frac{n_+^2}{N_+^0} + \frac{n_-^2}{N_-^0} \right) \right\}$$

□5 (1) 空洞内に閉じ込められた振動数の間隔が $(\nu, \nu + d\nu)$ であるような電磁放射のモード数。

(2) 温度 T で熱平衡状態にある振動子の平均エネルギー。

(3) $x = \frac{h\nu}{kT}$ とおくと

$$\frac{\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = \frac{x^3}{e^x - 1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{(1 + x + O(x^2)) - 1} \simeq x^2 = \left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2$$

よって

$$u(\nu, T) d\nu \xrightarrow{\frac{h\nu}{kT} \rightarrow 0} \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT d\nu$$

(4)

$$\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \xrightarrow{\frac{h\nu}{kT} \rightarrow \infty} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}}$$

よって

$$u(\nu, T) d\nu \xrightarrow{\frac{h\nu}{kT} \rightarrow \infty} \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}} d\nu$$

(5)

$$\begin{aligned} u(\lambda, T) d\lambda &= u(\nu, T) \left| \frac{d\nu}{d\lambda} \right| d\lambda \\ &= 8\pi hc \lambda^{-5} e^{-\frac{hc}{kT\lambda}} d\lambda \quad \left(\nu = \frac{c}{\lambda} \right) \end{aligned}$$

ここで $\frac{du}{d\lambda} = 0$ をとると

$$\lambda_{max} = \frac{hc}{5kT} \equiv \frac{b}{T} \quad \left(b = \frac{hc}{5k} \right)$$

(6)

$$\begin{aligned} U &= \int_0^\infty u(\nu, T) d\nu \\ &= \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty d\nu \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \\ &= \frac{8\pi h}{c^3} \left(\frac{kT}{h} \right)^4 \int_0^\infty \frac{\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\left(\frac{h\nu}{kT}\right) \\ &= \frac{8\pi k^4}{h^3 c^3} T^4 \int_0^\infty \frac{\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\left(\frac{h\nu}{kT}\right) \\ &\equiv a T^4 \quad \left(a = \frac{8\pi k^4}{h^3 c^3} \int_0^\infty \frac{\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\left(\frac{h\nu}{kT}\right) \right) \end{aligned}$$