

1

解答を上から書き下します。

$$T = \frac{1}{2}m \{ (\dot{x}_s + l\dot{\theta} \cos \theta)^2 + l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta \} \quad (1)$$

$$V = mgl(1 - \cos \theta) \quad (2)$$

$$L = \frac{1}{2}m \{ (\dot{x}_s + l\dot{\theta} \cos \theta)^2 + l^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta \} - mgl(1 - \cos \theta) \quad (3)$$

$$\left(l \frac{d^2 \theta}{dt^2} + g \sin \theta \right) = - \left(\frac{d^2 x_s}{dt^2} \right) \cos \theta \quad (4)$$

$$l \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -g \sin \theta + \omega^2 \cos \theta \cdot x_s \quad (5)$$

2

(1)

$rot \vec{E} = 0$	電磁誘導	
$div \vec{D} = 0$	ガウスの法則	
$rot \vec{H} = i$	アンペールの法則	
$div \vec{B} = 0$	ガウスの法則	
i : 電流密度	\vec{E} : 電場	$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$
ρ : 電荷密度	\vec{B} : 磁場	$\vec{B} = \mu \vec{H}$

(2)

普通の形式

$$V = -\frac{d\Phi}{dt}$$

微分形式

$$rot \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

説明 : \vec{B} の時間変化で \vec{B} と垂直方向に \vec{E} が生じる。

(3)

$$rot \vec{H} = \vec{i}$$

これは、電荷保存則 $\left(div \vec{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \right)$ と矛盾する。

証明 : $div (rot \vec{H}) = div \vec{i} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

となり、左辺 = 0、右辺 $\neq 0$ となるため。

(4)

$$rot \vec{H} = \vec{i} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

ととると

$$\begin{aligned} div (rot \vec{H}) &= div \left(\vec{i} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \\ &= \nabla \cdot \vec{i} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \end{aligned}$$

となり矛盾なくまとまる。

(5)

ヘルツの実験で電磁波が検出され確かめられた。

(6)

波動方程式は、

$$\Delta \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

伝播速度: v は、

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{3.374 \times 10^{-9}} = 3.0 \times 10^8 \quad (m/s)$$

3

(1)

$$[q, p] = i\hbar$$

(2)

$$p = -i\hbar\nabla$$

(3)

$$[a, a^\dagger] = 1$$

(4)

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right)$$

(5)

$$[H, a^\dagger] = \hbar\omega a^\dagger$$

(6)

$$\begin{aligned} H|n\rangle &= \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) |n\rangle \\ &= \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle \end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned} [a, a^{\dagger n}] &= a a^{\dagger n} - a^{\dagger n} a \\ &= a a^\dagger - a^{\dagger n-1} a a^\dagger - a^{\dagger n-1} \\ &= n a^{\dagger n-1} \end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned} \langle n|n\rangle &= \langle 0|a^n \frac{1}{\sqrt{n!}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n!}} a^{\dagger n}|0\rangle \\ &= \frac{1}{n!} \langle 0|a^n a^{\dagger n}|0\rangle \\ &= \frac{1}{n!} \langle 0|a^{n-1} a^{\dagger n} a + a^{n-1} a^{\dagger n-1}|0\rangle \\ &= \frac{1}{n!} \langle 0|n!|0\rangle \\ &= 1 \end{aligned}$$

(9)

$$\begin{aligned} [a_j, a_k^\dagger] &= \delta_{jk} \\ [a_j, a_k] &= 0 \\ [a_j^\dagger, a_k^\dagger] &= 0 \end{aligned}$$

(10)

$$H = \sum_{j=1}^2 \hbar\omega (a_j^\dagger a_j + 1)$$

(11)

$$|n\rangle|m\rangle = \frac{a_j^{\dagger n}}{\sqrt{n!}} \frac{a_k^{\dagger m}}{\sqrt{m!}} |0\rangle$$

(12)

$$\frac{2n_1 + 1}{2n_2 + 1} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

(13)

$$n + 1$$

(14)

$$|n - m\rangle|m\rangle = \frac{a^{\dagger n-m}}{\sqrt{n-m!}} \frac{b^{\dagger m}}{\sqrt{m!}} |0\rangle$$

(15)

$[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$ を使って計算すると

$$[J^3, J^\pm] = J^\pm, \quad [J^+, J^-] = 2J^3$$

(16)

(15) と同様に

$$[J, J^3] = 0, \quad [J, J^\pm] = 0$$

(17)

$n = 2$ だから三重の縮退が生じ、固有状態は

$$|3\rangle = |0\rangle|2\rangle$$

$$|2\rangle = |1\rangle|1\rangle$$

$$|1\rangle = |2\rangle|0\rangle$$

(18)

$$\begin{aligned} J^+|3\rangle &= a_1^\dagger a_2 |0\rangle|2\rangle \\ &= |1\rangle|1\rangle = |2\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J^+|2\rangle &= a_1^\dagger a_2 |1\rangle|1\rangle \\ &= |2\rangle|0\rangle = |1\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J^+|1\rangle &= a_1^\dagger a_2 |0\rangle |2\rangle \\
&= 0 \\
J^-|3\rangle &= a_2^\dagger a_1 |0\rangle |2\rangle \\
&= 0 \\
J^-|2\rangle &= a_2^\dagger a_1 |1\rangle |1\rangle \\
&= |0\rangle |2\rangle = |3\rangle \\
J^-|1\rangle &= a_2^\dagger a_1 |2\rangle |0\rangle \\
&= |1\rangle |1\rangle = |2\rangle
\end{aligned}$$

(19)

$$\begin{aligned}
\rho(J) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \rho(J^3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
\rho(J^+) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \rho(J^-) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

4

(1)

1 粒子の調和振動子のハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \frac{\vec{p}^2}{2m} + m\omega^2 \frac{\vec{q}^2}{2}$$

古典的な粒子の分配関数は 1 粒子の分配関数を Z_{1c} とすると, $Z_c = Z_{1c}^n$ と表される。

$$\begin{aligned} Z_{1c} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\mathcal{H}}{2kT}} \frac{dp^3 dq^3}{h} \\ &= \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\vec{p}^2}{2mkT}} dp^3 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m\omega^2 \vec{q}^2}{2kT}} dq^3 \\ &= \frac{1}{h} \left(\sqrt{2\pi mkT} \sqrt{\frac{2\pi kT}{m\omega}} \right)^3 \\ &= \left(\frac{2\pi kT}{h\omega} \right)^3 \\ &= \left(\frac{kT}{\hbar\omega} \right)^3 \end{aligned}$$

よって

$$Z_c = \left(\frac{kT}{\hbar\omega} \right)^{3n}$$

(2)

量子力学的な粒子の分配関数は,

$$Z_q = \sum_n e^{-\frac{\epsilon_n}{kT}}$$

であるから、固有値 (ϵ) を代入し計算すると、

$$\begin{aligned} &= \sum e^{-\hbar\omega \frac{(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2})}{kT}} \\ &= e^{\frac{\hbar\omega}{kT} \frac{3}{2}} \left\{ \sum \left(e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} \right)^{n_x} \right\}^3 \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} \sum \left(e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}} \right)^n &= \left(\frac{e^{-\frac{\hbar\omega}{2kT}}}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}} \right) \\ &= \frac{1}{2\sinh \left\{ \frac{\hbar\omega}{kT} \right\}} \end{aligned}$$

であるから、求める分配関数は、

$$Z_q = \left(\frac{1}{2 \sinh \left\{ \frac{\hbar\omega}{kT} \right\}} \right)^{3N}$$

(3)

$h \rightarrow 0$ のとき、 $\hbar \rightarrow 0$ であるから \sinh をテイラー展開すると

$$\begin{aligned} Z_q &\simeq \left(\frac{1}{2 \frac{\hbar\omega}{kT}} \right)^{3N} \\ &= Z_c \end{aligned}$$

よって古典的な粒子の分配関数になった!!

(4)

電気磁気モーメントベクトル μ が外部電場 E と傾きの角 θ をなすとき、ポテンシャルエネルギーは

$$u = -E\mu \cos \theta$$

である。 μ がその方向の立体角要素 $d\omega$ の中に見出される確立は、

$$f(\theta) d\omega = C e^{\frac{-u}{kT}} d\omega = C \exp \{ E\mu \cos \theta / kT \} d\omega$$

よって E の方向の成分 $\mu \cos \theta$ 平均は

$$\begin{aligned} \overline{\mu \cos \theta} &= \mu \int f(\theta) d\omega \\ &= \frac{\mu \int \int \cos \theta e^{E\mu \cos \theta / kT} d\omega}{\int \int e^{E\mu \cos \theta / kT} d\omega} \\ &= \frac{\mu \int_0^\pi \cos \theta e^{E\mu \cos \theta / kT} \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi e^{E\mu \cos \theta} \sin \theta d\theta} \\ &= \frac{\mu \int_{-1}^1 \zeta e^{\frac{E\mu}{kT} \zeta} d\zeta}{\int_{-1}^1 e^{\frac{E\mu}{kT} \zeta} d\zeta} \\ &= \mu L \left(\frac{E\mu}{kT} \right) \end{aligned}$$

求めたい分極ベクトル P は単位堆積あたりの N/V 個の分子の平均であるから

$$P = \frac{N}{V} \mu L \left(\frac{E\mu}{kT} \right)$$

(またここで、 $L(a) = \frac{a}{3} - \frac{a^3}{45} + \dots$ をつけた)

5

(ア) $\frac{1}{2}mv^2$
(イ) $h\nu$

(ウ) mv

(エ) $\frac{h}{\lambda}$

(オ) ドブロイ波

(カ) ドブロイ波長

(キ) $frachmv$

(ク) $\frac{mc^2}{mv}$

(ケ) v

(コ) $\frac{2\pi a}{n}$

(サ) $\frac{x}{\nu}$

(シ) $px - Et$

(ス) E

(セ) x

(ソ) $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$